

彈性碰撞和電腦撞球遊戲

國中組應用科學科第一名

台北市敦化國民中學

作者：楊卓翰

指導教師：杜雯華

一、研究動機

- (一)撞球選手，眼神專注，球桿出手，撞球應聲入袋；這兩球之間的碰撞是否遵守著某些規則呢？
- (二)能否將科學上的諸多實驗及公式，在電腦上模擬出來？以便讓同學們了解各個公式，並激發學習電腦的興趣。
- (三)撞球是一項手腦並用的運動，理當大力提倡，所以才有意研發此程式。

二、研究目的

- (一)由最基本的物理學運動公式：如牛頓三大運動公式，轉動學的碰撞公式、滾動公式、動量守恆、動能守恆、角動量及摩擦力；數學上的向量，推演出撞球公式並應用在電腦上。
- (二)結合撞球技巧，設計出一個「撞球教室」的CAI。

三、文獻探討

- (一)對理想狀態下的某些公式，我們必須做適度的修改，才適用於電腦上，如二維運動公式：

$$S = \vec{v} \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a} (\Delta t)^2$$

經由坐標的轉換，配合：

$$\begin{cases} X = x + \vec{v}_x \Delta t \\ Y = y + \vec{v}_y \Delta t \end{cases}$$

可得：

$$\begin{cases} X = x + \vec{v}_x \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a}_x (\Delta t)^2 \\ Y = y + \vec{v}_y \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a}_y (\Delta t)^2 \end{cases}$$

本公式直接用在電腦上，速度太慢，故要利用電腦的特性，和迴路的不斷改

變，來簡化計算。

(二)物理學的碰撞公式：

$$\begin{cases} MV = m_1\vec{v}_1 \times \cos\theta + m_2\vec{v}_2 \times \cos\alpha \\ m_1\vec{v}_1 \times \sin\theta + m_2\vec{v}_2 \times \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

配合能量守恆公式：

$$\frac{1}{2} M\vec{V}^2 = \frac{1}{2} m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2\vec{v}_2^2$$

可求出兩球撞後的角度。公式中的三角函數，會影響執行速度，故新公式的研發，勢在必行。

(三)撞球選手，必定能利用球體的自轉，來改變碰撞後的行徑，因此加入摩擦力及轉動因素，產生推桿、拉桿、轉彎，便是我們的工作了。

四、研究設備及器材

(一)IBM 386及其相容的主機板。

(二)VGA CADR 及顯示器。

(三)倚天中文系統24字形——stdfont. 24k。

(四)DOS 3.3 以上的版本。

(五)Turbo C 2.0

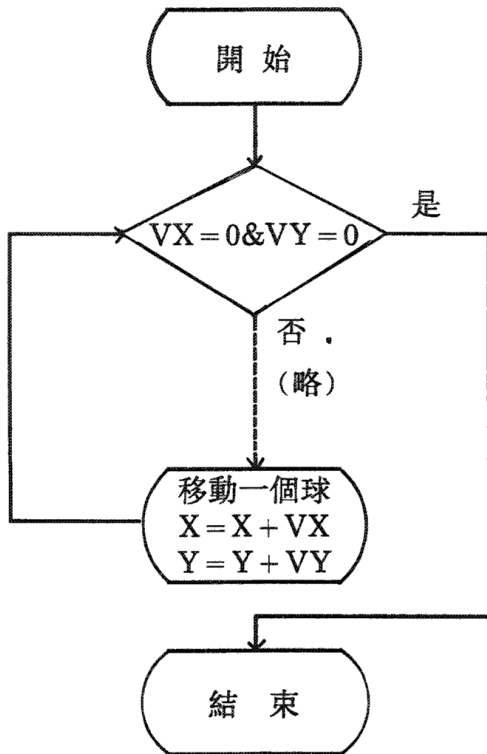
五、研究過程或方法

(一)平面運動：

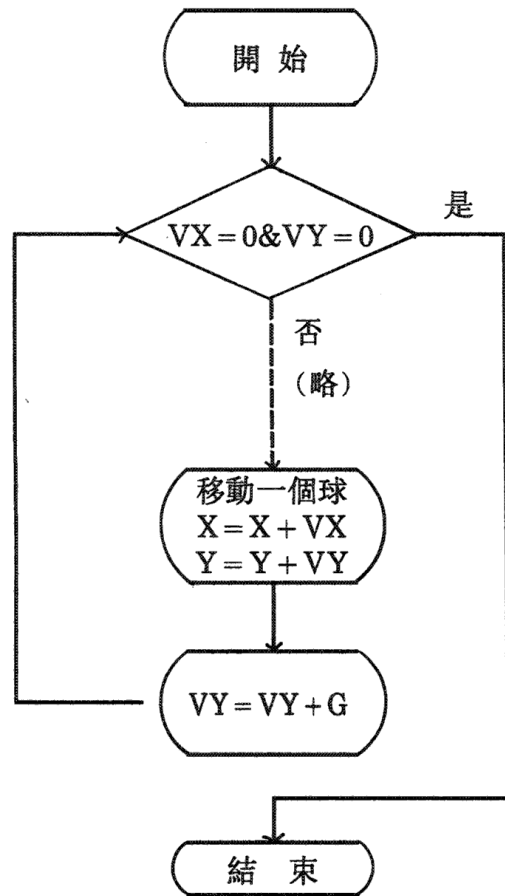
一個球在平面上運動，經由公式：

$$\begin{cases} X = x + \vec{V}_x \Delta t \\ Y = y + \vec{V}_y \Delta t \\ \vec{V}_x = \vec{v}_x + \vec{a}_x \Delta t \\ \vec{V}_y = \vec{v}_y + \vec{a}_y \Delta t \end{cases}$$

我們不需要繁雜的公式，便可求出每一單位時間的位置，流程式如表一：



表一



表二

(二)重力的加入：經由 $\vec{V}_y = \vec{v}_y + \vec{G} \Delta t$ 我們把每一個

迴路當作一個單位時間，因此 $\Delta t = 1$ ，可得

$\vec{V}_y = \vec{v}_y + \vec{G}$ 流程圖改為如表二：

(三)一維彈性碰撞公式的向量化：

把純量改為向量式，如圖一：

依動量守恆可得：

$$M_2 \vec{V}_{10} + M_2 \vec{V}_{20} = M_1 \vec{V}_1 + M_2 \vec{V}_2 \quad \text{球 1 : 質量 } M_1 \quad \text{球 2 : 質量 } M_2$$

移項可得

$$M_1 (\vec{V}_{10} - \vec{V}_1) = M_2 (\vec{V}_2 - \vec{V}_{20}) \dots\dots ①$$

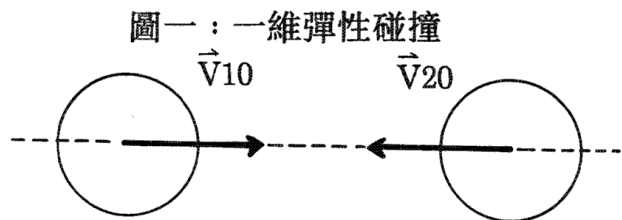
又依動能不變可得：

$$\frac{1}{2} M_1 \vec{V}_{10}^2 + \frac{1}{2} M_2 \vec{V}_{20}^2 = \frac{1}{2} M_1 \vec{V}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \vec{V}_2^2 \dots\dots ②$$

運用向量的內積法：故 ② 又可寫成：

$$M_1 (\vec{V}_{10} - \vec{V}_1) (\vec{V}_{10} + \vec{V}_1) = M_2 (\vec{V}_2 - \vec{V}_{20}) (\vec{V}_2 + \vec{V}_{20}) \dots\dots ③$$

代入 ① 消去 V_2 得：



圖一：一維彈性碰撞

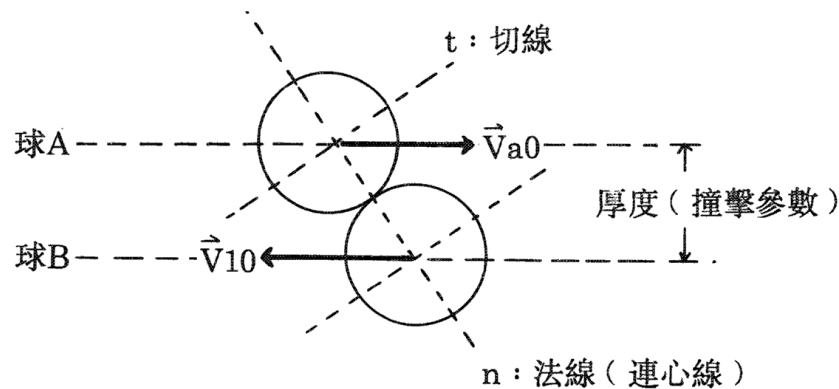
$$\vec{V}_1 = \frac{2M_2}{M_1 + M_2} \times \vec{V}_{20} + \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \times \vec{V}_{10}$$

$$\vec{V}_2 = \frac{2M_1}{M_1 + M_2} \times \vec{V}_{10} + \frac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2} \times \vec{V}_{20}$$

此即一維碰撞公式！！

(四)二維碰撞公式：二球不是直撞而是擦撞時，如圖二：

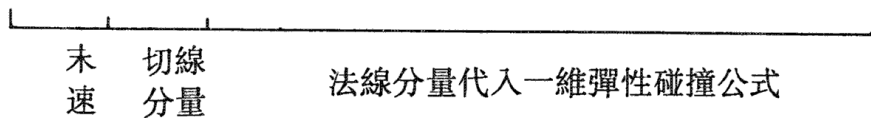
圖二：二維碰撞



二維碰撞後的末速，即保留切線的分量，加上由一維碰撞公式求出速度的法線分量交互作用的結果。

$$\therefore \vec{V}_a = \vec{V}_{a0t} + \frac{M_a - M_b}{M_a + M_b} \times \vec{V}_{a0n} + \frac{2M_b}{M_a + M_b} \times \vec{V}_{b0n}$$

$$\vec{V}_b = \vec{V}_{b0t} + \frac{M_b - M_a}{M_a + M_b} \times \vec{V}_{b0n} + \frac{2M_a}{M_a + M_b} \times \vec{V}_{a0n}$$

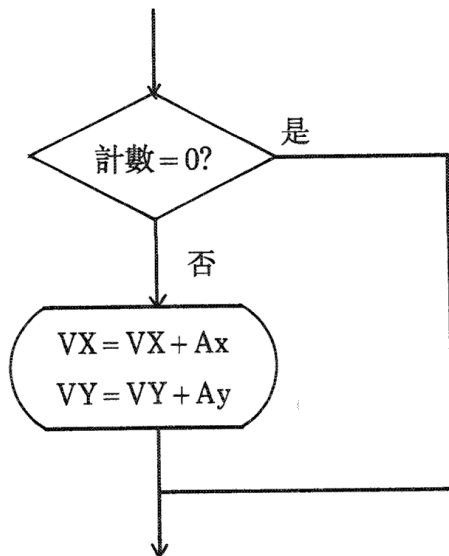


(五)摩擦力與角動量：一球的速度為 (\vec{V}_x, \vec{V}_y) 為使摩擦力的大小固定要使用投影法：

$$\left[\begin{array}{l} \vec{V}_x = \vec{v}_x - f/m \times \Delta t \text{ (x方向上的分量)} \\ \vec{V}_y = \vec{v}_y - f/m \times \Delta t \text{ (y方向上的分量)} \end{array} \right.$$

在角動量方面，真正厲害的撞球高手，都能運用不同的撞點，使母球撞後，

繼續移至最佳的位置，在此我們以模擬的方法，只要略知起動時的加速度，再配上一個計速器（timer）在時間未到達前，將球的速度加上一個固定的加速度，便可仿造出類似拋物線的彎曲軌道。 $A_x A_y$ 為轉動所造成的加速度。



六、程式寫作技巧的研發

(一)單位向量對照表格的建立：在程式的執行中，用到了許多求出單位向量的地方。例如：求動摩擦力的時候。一般計算單位向量。要用下列的方法：

```

double jx, jy ;
double vx, vy ;
double dot ;
:
:
dot=sqrt(vx * vx + vy * vy ) ;           /* 求出向量的總長 */
jx=vx / dot ;                           /* 求出X方向的單位向量 */
jy=vy / dot ;                           /* 求出Y方向的單位向量 */
  
```

但是，為了加快程式的速度，我採用了一種方便又簡潔的「表格對照法」。在程式執行之初，我們用setvalue（）建立了單位向量表格at__x [dx] [dy]和at__y [dx] [dy]這兩個陣列，dx、dy為某向量的分量，dx、dy的範圍在±30間，如果兩分量皆落於±30之間，直接取用at__x [dx+30] [d

y+30]、at__y[dx+30][dy+30]。如果超過了範圍，將dx、dy不斷除以2直到落至範圍以內。如此可大幅提高運算的速度！程式如下：

```
double jx, jy ;
double vx, vy ;
float at__x[61][61] , at__y[61][61] ;
:
:
setvalue( ) ;
:
:
while( ( vx>30 ) || ( vx<-30 ) || ( vy>30 ) || ( vy<-30 ) )
{
    jx /= 2 ;                /* 如果分量不在±30的 * /
    jy /= 2 ;                /* 範圍之內，不斷除以2 * /
}
vx=at__x[ (int)(jx+30) ][ (int)(jy+30) ] ;
                                /* 求出X方向的單位向量 * /
vy=at__y[ (int)(jx+30) ][ (int)(jy+30) ] ;
                                /* 求出Y方向的單位向量 * /
```

(二)移動球的堆疊：當我們知道一個球目前的速度，而要去移動它時。如果球的個數不多一般的人，大多人都會直接show到螢幕上去。但如果球的數目很多，就會造成一次螢幕上只有一個球在動，非常不協調。因此，我們建立了一個堆疊，先將所有愈移動的球pop進去，要傳遞的訊息也放進去。再呼叫display()一氣呵成。

```
:
:
:
pop(i) ;                        /* 放入愈移動的球號i * /
pop(ball[i].x) ;                /* 放入新的x座標 * /
pop(ball[i].y) ;                /* 放入新的y座標 * /
:
:
:
```

```

:
pop ( -1 ) ;           / * 換頁的訊號           * /
pop ( -2 ) ;           / * 結束的訊號           * /
display ( ) ;

```

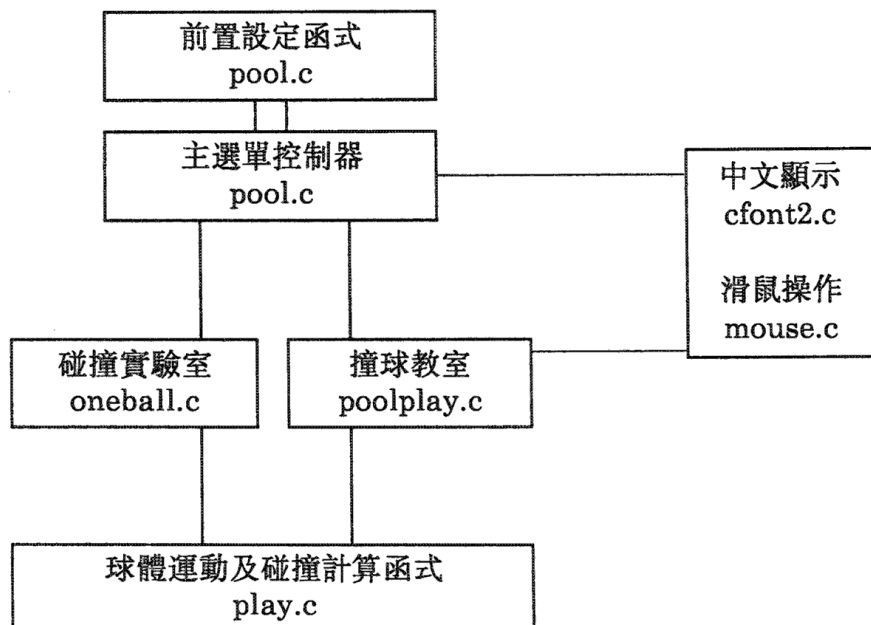
(三)中文化的立體螢幕按鈕：爲了使操作更易學、螢幕更美觀，我們在程式中採用了滑鼠、和螢幕按鈕。所謂螢幕上的按鈕，即是利用陰影法，在螢幕上畫出一個凸出的區域，中間寫上中文的功能名稱，利用滑鼠的指標來按下這一個按鈕（使按鈕看起來好像凹了下去），選取一定的功能。爲了避免過多的座標計算，我們採用取代碼的方法。c_box () 建立一個按鈕，並傳回這個按鈕的代碼。其後，利用input_mouse_key () 取得滑鼠的按鍵，再用ispress () 比較是否按下了螢幕上的按鈕。

```

char key ;
int press ;
int num , x , y ;
num=c_box ( 24 , 30 , 20 , " ( 1 ) . . . . . " , XOR - PUT ) ;
:
:
:
key=input_mouse_key ( LEFT_KEY , &x , &y ) ;
press=ispress ( x , y ) ;
:
if ( press == num ) .....

```

七、程式概觀



八、程式使用說明

(一)硬體需求：

1. IBM 386及其相容主機板。
2. VGA CARD及顯示器。
3. 倚天中文系統24字形——stdfont、24k。
4. DOS 3.3以上的版本。
5. Mouse (二或三鍵) & 驅動程式。

(二)主選單：

在主要選單中共有二項：一為碰撞實驗室另為撞球教室。碰撞實驗室分為(1)單球碰撞實驗(2)雙球碰撞實驗(3)改變重力加速度(4)改變球體質量(5)回到上目錄。而撞球教室分為(1)基本球練習(2)反彈球練習(3)炮彈球練習(4)聯合球練習(5)接吻球練習(6)個人撞球室。

1.碰撞實驗室：所有功能下列之，以滑鼠操作：

- (1)力量 (+ / -)：以長條大小表示球起動之速度。
- (2)速度 (< / >)：以長條大小表示電腦執行的速度，這要配合各種電腦商的速度，可自行調整。
- (3)軌跡：可留下球的移動軌跡，以便研究用，欲除去軌跡，再以滑鼠按一次即可。
- (4)清除畫面：當螢幕上留下了太多的軌跡，可以此功能，清除剩下亮綠色的螢幕。
- (5)發射：當全部參數設定完成，按此鍵，球便在螢幕上橫衝直撞了起來。
- (6)設定：這項功能在每一實驗下都不盡相同，但都和實驗的名稱有關。
- (7)離開：要結束操作時，可選用本項。

2.撞球教室：所有功能如下，都以滑鼠控制之。

- (1)上 / 下一頁：在許多題目中，如果要跳過一題，或回到上一題，可用本功能進行換頁。
- (2)撞點：不同的撞點會有不同的角動量，可用來控制或改變球碰撞後的位置。
- (3)厚度：厚度是撞球用語、物理學中叫撞擊參數，不同的厚度會使得球被撞擊後，偏向不同的方向。
- (4)解答：若您真的無法將球打進袋，就讓電腦示範一次，並告訴您正確的答案吧！

九、研究結果

(一)將物理世界的彈性碰撞，應用於電腦上。

(二)研究出二維碰撞公式的向量表示式：

$$\vec{V}_a = \vec{V}_{a0t} + \frac{M_a - M_b}{M_a + M_b} \times \vec{V}_{a0n} + \frac{2M_b}{M_a + M_b} \times \vec{V}_{b0n}$$

$$\vec{V}_b = \vec{V}_{b0t} + \frac{M_b - M_a}{M_a + M_b} \times \vec{V}_{b0n} + \frac{2M_a}{M_a + M_b} \times \vec{V}_{a0n}$$

末 切線
速 分量

法線分量代入一維彈性碰撞公式

(三)原始程式：需二千五百行佔幅過廣，作者保留之。

十、結論

(一)實驗不再假手他人，在小小的電腦世界中，便可以模擬出各式各樣的環境，供實驗及教學之用。

(二)一個問題的背後，通常都隱藏著鮮為人知的祕密，只有真正努力去挖掘，才能看清問題的真象，與破解之道。

(三)每一個程式的完成，都是程式設計師，不眠不休的努力結晶，我們一定要尊重其智慧財產權，不可任意翻拷軟體。

(四)彈性碰撞的理論並不難理解，困難的是如果是要由實驗來證明，將受到其他不易控制的變因；如力的大小、方向、摩擦係數等之影響，而不容易做得準確，但改由電腦來模擬，則容易達到預期的結果。

(五)使用C語言來設計的程式，執行時既迅速又方便。所呈現的畫面也更有美感，尤其加上青少年們所喜愛的撞球遊戲，更能達到寓教於樂的效果。

(六)在設計程式之過程中，必須不斷地尋求解決問題的方法，除了運用前人所發現的公式外，自己也導出了兩個公式，證明只要肯思考，便會有創見，此即科學精神。

十、參考資料

(一)國中理化課本（第二冊），第十一章：直線運動

第十二章：力與運動 第十三章：功與能

(二)高中物理課本（第一冊）5－3：衡量 7－6：質點的碰撞

(三)基礎物理學（第二版） 曉園出版社 Halliday. Resnick原著

第十章：碰撞 第十二章：轉動動力學 曹培熙、駱劍秋 譯

(四)Turbo C 使用手冊 波前出版社

(五)Turbo C 動畫與電玩程式設計 全欣資訊出版

評 語

- 1.本作品以C 語言撰寫程式，摹擬電腦撞球實驗。以運動學原理近似處理，對摩擦力的近似處理，頗見巧思，提高演示速度不少。
- 2.在電腦視窗的設計與規畫，考慮使用者的使用親和程度，設計週全。研究成果相當完整，可作教學示範。
- 3.作者表達能力清晰，對程式語言的掌握相當清楚，對問題的思考相當深入，亦多所嘗試不同方法（如以牛頓動力學直接探討等）。值得鼓勵。