

由恆星角距測量月地距離

國中組地球科學科第一名

高市陽明國民中學

作者：顏吉鴻

指導教師：陳玫蓉、李玉貞

一、研究動機

月球是最接近地球的天體，自古以來就有許多美麗的傳說。記得去年參加科展時，便想到月球視半徑每日不同，分析天秤動時是不是應將月面放大成一樣的大小？因此由每日月球視半徑的變化及原有的天文攝影基礎和數學、物理等知識，是不是可以用來測量月地距離？

二、研究目的

- (一)使用簡單的數學方法及攝影技術，以求得月地距離。
- (二)使用已得之資料，繪出月球軌道。
- (三)推導有關之月球常數。
- (四)探討月球距離與潮汐的關係

三、研究器材

此次所用的器材約可分為二大部份：

(一)拍攝器材：

Vixen 102M 折射式天文望遠鏡 $D=102\text{mm}$ $f=1000\text{mm}$

Vixen GP 赤道儀（馬達雙軸驅動）

Vixen GA-4 暗視野導星裝置

Mizar BN-80 導星鏡；傾斜儀

Mikon F-801 & FM2 135 相機；T-RING & CAMERA ADAPTER

FUJI SUPER G-800 135-36 底片；FUJI HG2 (ISO400) 135-36 底片

(二)數據分析：

ASURE F58-2 386DX-33 個人電腦

LOTUS 1-2-3 電子試算表

天文計算程式集

游標卡尺；圓規；描圖紙

四、研究過程

(一)由視半徑及仰角求月地距離

所謂月地距離是指月心到地心的距離，經由多方尋找有關資料，決定使用下列方式來求月地距離：

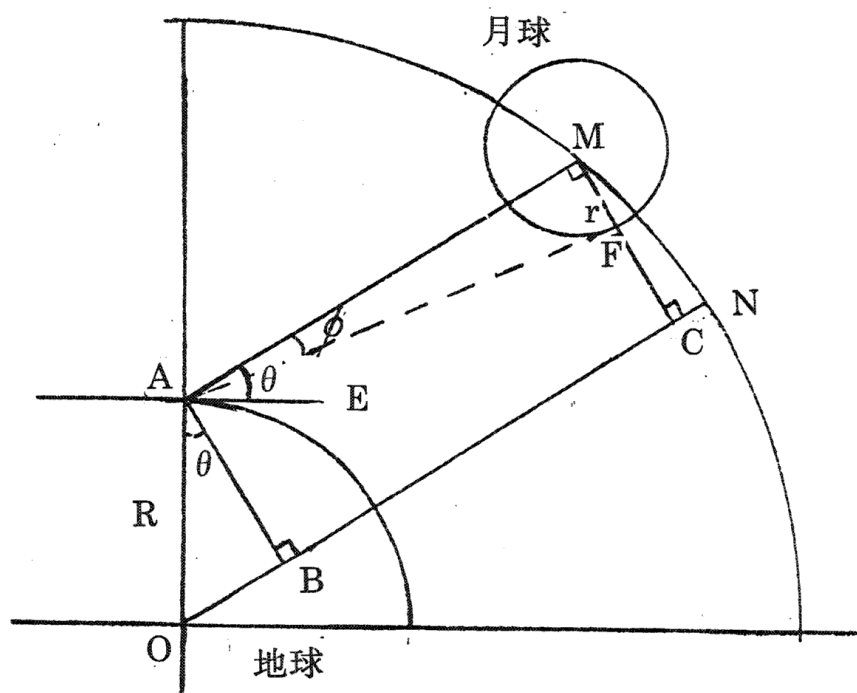
1.由圖一：觀測者位於A點，則月地距離 $D=OM=ON=OB+BC+CN$

$\angle MAE$ 為月球仰角 θ ； $\angle MAF$ 為月地視半徑 ϕ ， $R=6378\text{km}$ ，

$r=1738\text{km}$ ，故 $OB=R \sin\theta$ ，又 $BC=AM=r \cot\phi$ ，故

$D=OB+BC+CN=R \sin\theta+r \cot\phi+CN$

2.CN隨 θ 的值改變，當 $\theta=90^\circ$ ， $CN=0$ ； $\theta=0$ 度，CN最大。經查閱香港業餘天文學會論文集相關之研究得知，當 $\theta=0$ 度時，CN平均為53km，佔月地距離的0.015%，故將CN略去，則式子可寫為 $R \sin\theta+r \cot\theta$ 。而 θ 使用傾斜儀測量， θ 則須用間接方法。首先拍攝恆星照片，度量出兩顆恆星在照片上的距離，再查出相距的角距，從而算出照片上1mm長度所等於的角度；再以相同的光學系統拍攝月球，所得照片用作圖法將其復圓，求出半徑，即可將視半徑的長度換算成角度。



圖一

(二)拍攝恆星及月球，月球的拍攝是由82年11月至83年1月，共有29個照片，而恆星拍攝則以開陽及其附近恆星為主，地點為祝山。

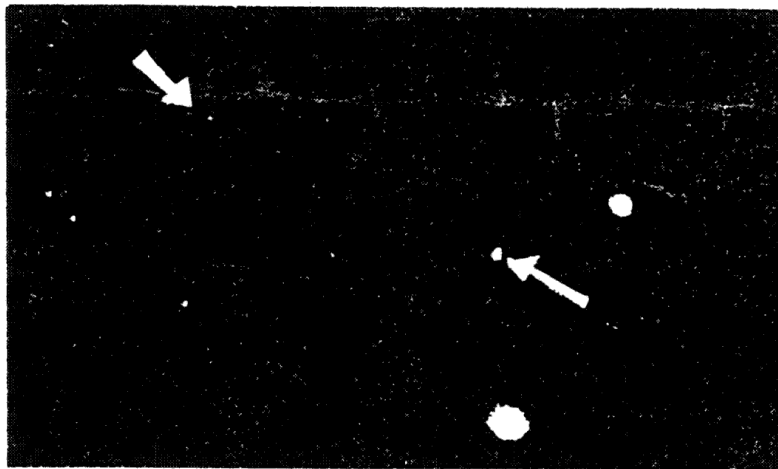
(三)照片及數據分析：在我們獲得了所需的資料及照片後，便計算每張照片所應對應的月地距離。在比較誤差方面，則使用Peter D.SMITH所寫的高次多項式所得到的理論值來加以分析。

(四)繪製月球軌道：使用1964年Sky and Telescope所刊載的方法：

- 1.取一描圖紙，給定一原點，以正X軸為黃經0度；正Y軸為黃經90度；負X軸180度，負Y軸270度。
- 2.因月地距離和視直徑成反比，所以繪圖時的座標選擇要和視直徑成反比；故該月份之照片量出直徑（mm）後，取一任意常數800除之，所得之值S即與月地距離成比例。
- 3.使用線性內插法，計算出拍攝當時的月球視黃經。
- 4.以原點為一端點，各照片的S值為線段長，視黃經為角度，繪出各照片在圖上的向量。
- 5.求出該月S之平均值，以S為半徑於另一紙上作圓，並寫下此圓重疊於圖上，使之儘可能與各端點重合。
- 6.重合後此圓圓心即為月球軌道中心，而圖上座標原點即為地球（焦點）；實際之軌道則必須經過線段的各端點。
- 7.在本圖中，由於軌道中心和焦點並不共點，所以仍可以算出離心率。即量取圖中軌道中心到焦點的距離，以平均S除之，所得之值即為e。

五、結果及討論

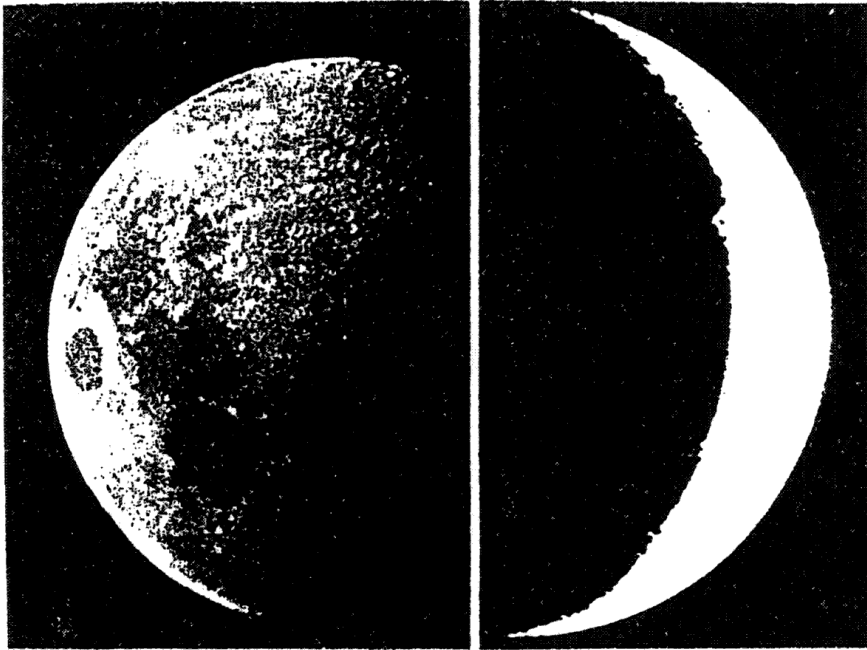
(一)恆星的拍攝所選擇的是大熊座開陽及輔星周圍的二顆恆星，如照片箭頭所示，度量出兩量相距37mm，且查閱星圖後，計算所得之照片1mm等於0.4054，則該數據即可用來換算月球視半徑。



(二)經查閱天文年鑑得知82.12.10及82.12.22分別為近地及遠地點，而我們將兩張

照片重合後，即可清楚的看出視直徑的變化。從照片可知，月球的視半徑與距離成反比。

82
、
12
、
22
遠地點

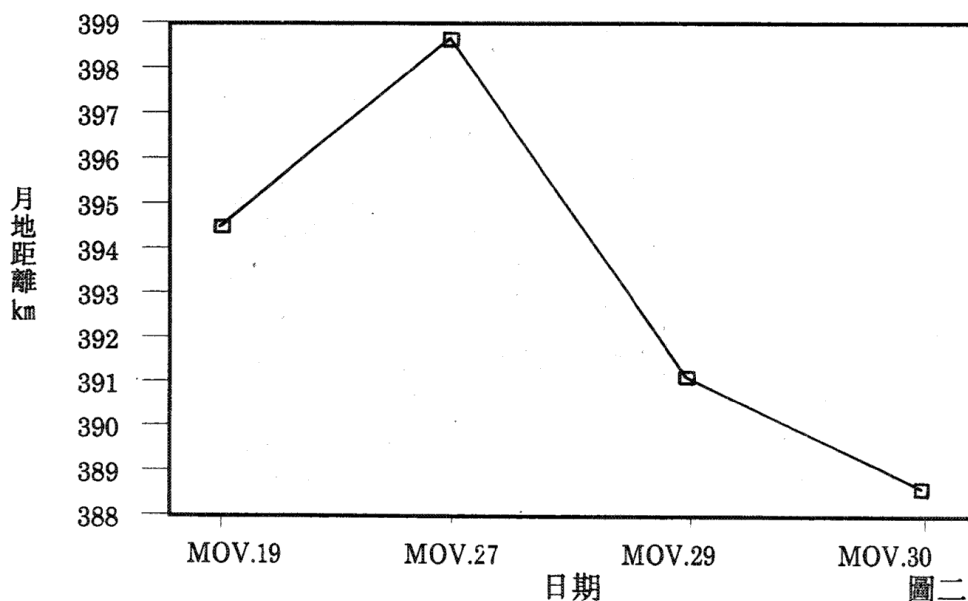


82
、
12
、
10
近地點

(三)將11 / 19~1 / 21日之月球復圓，度量出視直徑，並代入公式，得其結果如圖表1~3。在表中可知共有2個近地點、2個遠地點，同時並將月地距離做成折線圖，如圖二、三、四。

表 一

日期	時刻	仰角(度)	視直徑(mm)	視半徑(')	月地距離	理論值km	誤差%
NOV.19	20.5	30	75.6	15.3241	394464	390944	0.9
NOV.27	20.4	64	75	15.2025	398680	395955	0.69
NOV.29	21.0	49	76.3	15.466	391129	395513	1.1
NOV.30	21.5	47.5	76.8	15.5674	388561	392224	1.39



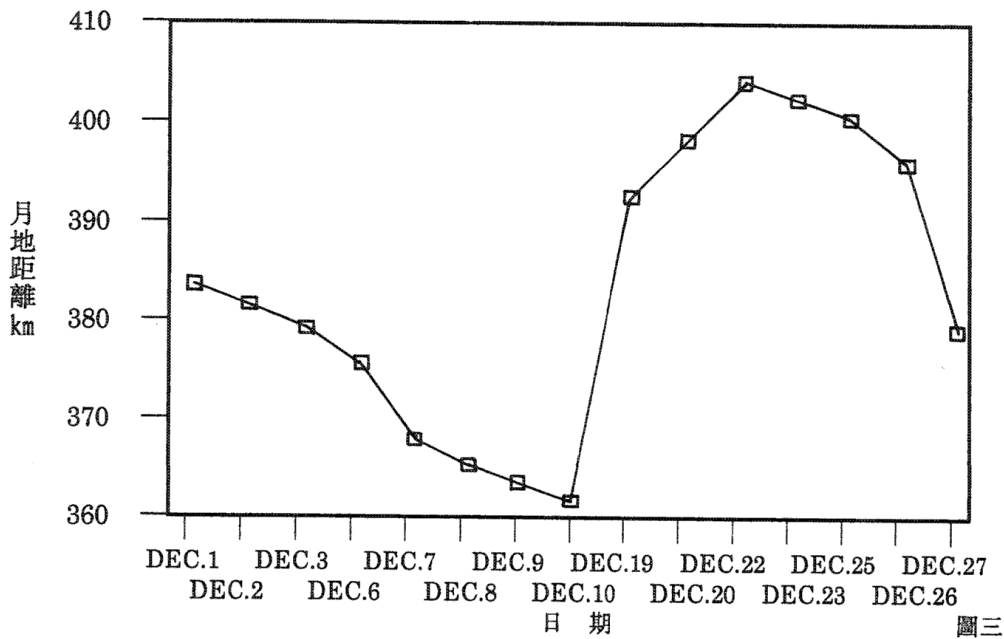
圖二

表 二

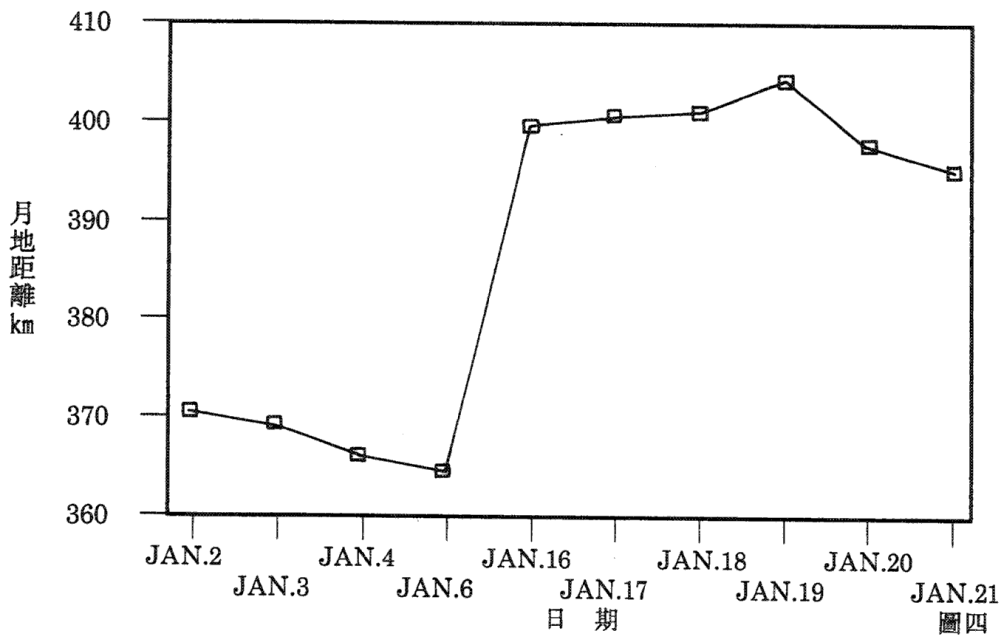
日期	時刻	仰角(度)	視直徑(mm)	視半徑(')	月地距離	理論值km	誤差%
DEC.1	21.4	35	77.7	15.7498	383013	388951	1.5
DEC.2	22.0	36	78.1	15.8311	381182	385579	1.1
DEC.3	23.0	27.5	78.4	15.8919	378953	382107	0.82
DEC.6	5.03	74	79.8	16.1757	375513	374731	0.21
DEC.7	5.21	60	81.3	16.4795	368079	371740	0.36
DEC.8	5.24	55	81.8	16.5809	365564	369501	0.94
DEC.9	5.31	43	82	16.6214	363811	366927	0.85
DEC.10	5.34	32	82.2	16.6619	361967	365636	1
DEC.19	18.2	44	75.9	15.3849	392783	399120	1.5
DEC.20	20.0	49	75	15.2025	398407	402345	0.98
DEC.22	21.4	47	73.7	14.939	404582	407764	0.78
DEC.23	22.4	46	74	14.9998	402906	404826	0.47
DEC.25	21.1	86	74.7	15.1417	400952	403095	0.53
DEC.26	18.4	45	75.2	15.243	396478	403503	1.7
DEC.29	21.2	36.5	78.4	15.8917	379802	395611	0.55

表 三

日期	時刻	仰角(度)	視直徑(mm)	視半徑(')	月地距離	理論值km	誤差%
JAN.2	4.15	79	80.9	16.3984	370610	374171	0.95
JAN.3	5.05	63	81.1	16.409	369134	372436	0.89
JAN.4	5.16	61	81.8	16.5809	365919	371235	1.4
JAN.6	5.11	49	82	16.6214	364295	370165	1.6
JAN.16	18.5	36	74.4	15.0811	399954	399658	0.07
JAN.17	20.0	31	74.1	15.0203	401072	402470	0.32
JAN.18	21.0	29	73.9	14.9797	401410	404063	0.64
JAN.19	21.2	35	74	14.9998	404649	405731	0.26
JAN.20	22.2	31.5	74.7	15.1419	397966	403115	1.2
JAN.21	20.3	87	75.8	15.3647	395233	400930	1.4



圖三



圖四

(四)在我們所得的資料中，共有2個遠、近地點，分別為：

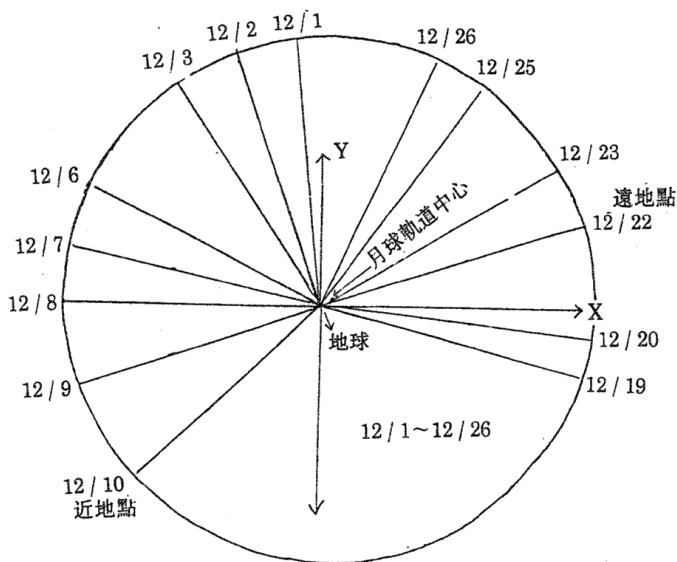
近地點：12月10日5:34及1月6日5:11

遠地點：12月22日21:43及1月19日21:22

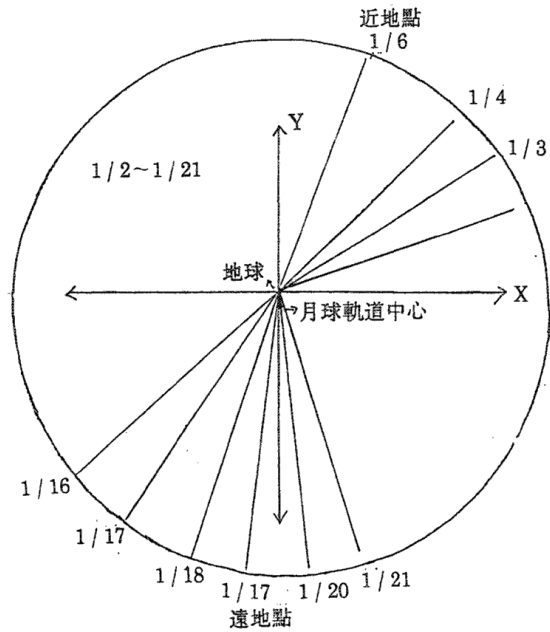
其中12月10日至1月6日的週期為26.99日，12月22日至1月19日為27.98日，平均所得的近點月為27.49日。

(五)利用研究步驟(四)所繪之月球軌道如圖五、六。由圖可看出這些線段幾半相等，可知月球的軌道近似正圓，利用焦點（地球）到軌道中心長除以平均 s 可得離心率 e ，計算得十二月之 e 為0.0537，軌道為圖五；一月之 e 為0.0532，

軌道為圖六，平均值0.053。另外我們發現遠近地點之赤經差並不是180度，這是因月球運動牽涉到三體運動，且月球質量很大，所以月球的軌道每月並不相同，且遠近地點的黃經差不會是180度。



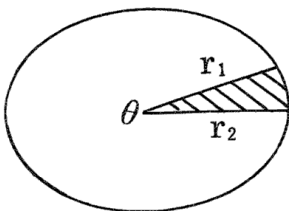
圖五



圖六

(六)從我們所得的數據中，可用來印證刻卜勒第二定律：行星（衛星）與恆星（行星）的連線，在相同時間內掃過的面積相等，此稱為掠面速度（areal velocity），其計算方式如下：

首先查出近地點附近（12/9，05：31~12/10，05：34）和遠地點附近（12/22，21：43~12/23，22：41及1/19，21：22~1/20，22：34）的黃經差分別為14.5度，11.83度和11.81度，計算扇形面積的公式，如圖七所示：



$$\text{斜線面積} = \frac{r_1 \times r_2 \times \pi \times \theta}{360}$$

將其所得之值除以經過時間，即為掠面速度。公式中 r_1 ， r_2 為兩日分別之月地距

離； θ 為公轉的角度，即黃經差。而掠面速度結果如下：

日期	計算值	比較值	誤差%
近地點(12/9-12/10)	192862km ² /sec	196485km ² /sec	1.8
遠地點(12/22-12/23)	194773km ² /sec	197241km ² /sec	1.3
遠地點(1/19-1/20)	192092km ² /sec	195097km ² /sec	1.5

(七)由刻卜勒第二定律一行星之掠面速度恆為相等，我們可推得，近地點的軌道速度會大於遠地點的軌道速度，由於先前的計算得出月球軌道離心率約為0.053，近似正圓，所以我們在這裡為了方便計算，假設月球軌道為圓形，日期仍為12/9~12/10、12/22~12/23，計算的方法是將該時間內月球所經過的路徑長除以時間，計算式如右： $\frac{2\pi\bar{R}(\theta/360)}{\text{經過時間(秒)}}$ ，其中 \bar{R} 表兩日月地距離的平均值， θ 為黃經差，結果如下：

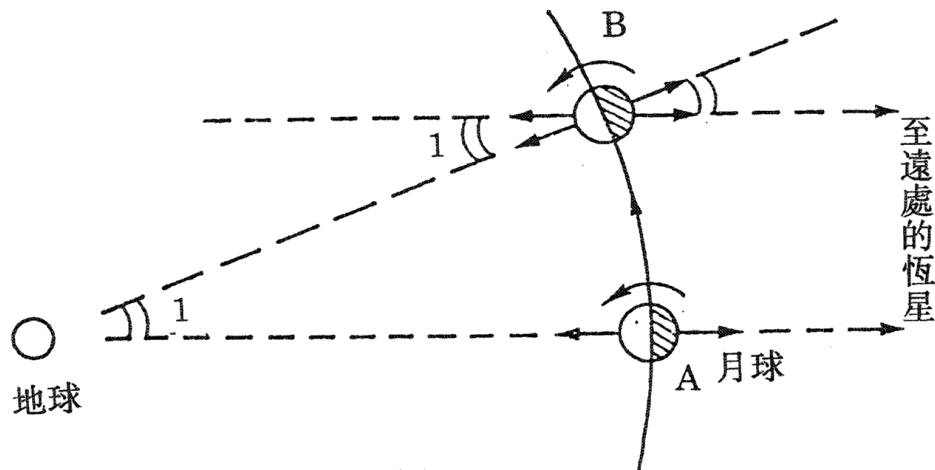
日期	計算值	比較值	誤差%
近地點(12/9-12/10)	1.063km/sec	1.073km/sec	0.93
遠地點(12/22-12/23)	0.965km/sec	0.971km/sec	0.62
遠地點(1/19-1/20)	0.957km/sec	0.965km/sec	0.83

(八)如圖八所示，由於月球本身有公轉的運動，且與地球自轉同向，所以假設今天某一時刻月球在A點的位置，隔了一天後，月球公轉到B點，故第二天的同一時刻，月球便向東移動了 $\angle 1$ 的角度，在地球看來，月球就比前一天更晚升起。地球潮汐受到月球運行的影響，據地科上冊所載，潮汐的週期「平均每日延遲50分鐘，但是，因為月球運行軌道的關係，每日潮汐的延遲時間也不一定，依先前的計算，月球公轉一周約27.3日，則每日公轉約13度，所以每日潮汐或月球升起延遲的時間可由比例式：

$$\text{公轉角度(黃經差)} : 360(\text{度}) = \text{延遲時間} : 1440(\text{分})$$

因月球平均自轉角度為13度；遠地點速度較小，為11.8度；近地點速度較大，為14.5度，求得各種情況月球延遲的時間為：

平均=52分 遠地=47.2分 近地=58分



圖八

六、結論

(一)在29個資料中，共有近地點2個，分別為12 / 10、1 / 6；遠地點2個為12 / 22、1 / 19，計算其近點月為27.49日。在所有的月地距離數據中，最遠為1月19日404649km，最近為12月10日361967km。

(二)由所繪得的軌道中，求得12月離心率為0.0537，1月為0.0532，平均值0.05345。

(三)由刻卜勒第二定律得知，行星（衛星）的掠面速度恆為相等，求得三個掠面速度如下：

$$12 / 9 \sim 12 / 10 : 192862 \text{ km}^2 / \text{sec}$$

$$12 / 22 \sim 12 / 23 : 194773 \text{ km}^2 / \text{sec}$$

$$1 / 19 \sim 1 / 20 : 192092 \text{ km}^2 / \text{sec}$$

(四)由刻卜勒第二定律推得：近地點的軌道速度大於遠地點速度，計算得：近地=1.063 km / sec 遠地=0.961 km / sec

(五)因為月球公轉與地球同向，所以每日月昇及潮汐都會延遲，而時間分為下列三種情況：

$$\text{平均} = 52 \text{分} \quad \text{遠地} = 47.2 \text{分} \quad \text{近地} = 58 \text{分}$$

(六)另附上月球各種理論值的常數，以供參考：

$$\text{平均視半徑} \quad 15.5432'$$

$$\text{朔望月} \quad 29.530589 \text{日}$$

$$\text{近點月} \quad 27.554550 \text{日}$$

$$\text{最遠距離} \quad 405500 \text{公里}$$

$$\text{最近距離} \quad 363300 \text{公里}$$

平均距離 384400公里
軌道速度 1.022 km / sec
軌道離心率 0.549005

七、參考資料

天文年鑑(1993~1994) 台北市立天文台
天文學論文集 2 香港業餘天文學會
應用天文學 夏堅白著 台灣商務印書社
Laboratory Exercises in Astronomy—The Moon's Orbit URANOMETRIA 2000.0

評 語

本作品為獨立研究多年之成果，從天文攝影技術至研究方法操作，敘述尚完整，且有創意，值得鼓勵表揚。