矩形比例分割後的變化與其還原的探討

國中組數學科第三名

高雄縣立鳳山國民中學　　作　者：洪芷漪、陳宜妙、劉怡伶、陳官琳
指導教師：杜鴻祥

一、研究動機

在復習第四冊時，發現了八十年度台灣省高中聯考的數學題目：在一個矩形紙板上，剪去其 $\frac{2}{3}$ ，再剪去其剩下之紙板的 $\frac{2}{3}$ ，反覆地做…。基於好玩的心理就在附圖上畫了起來，突然發現這個圖形非常有規律，有點像黃金矩形。我們便向老師提出問題：〝若不按此種比值作分割，是否有其他變化，結果如何？〞老師說：〝如果你們有興趣想知道答案的話，可以去研究看看。〞因而，便在老師的指導下，展開了我們一連串的探討旅程。

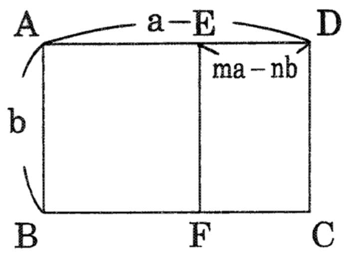
二、研究目的

探討長寬不等之矩形經規律分割後，其對角線的交點所衍生的變化，同時也討論平面上的已知點坐標，藉其比值還原爲唯一矩形的方法。

三、研究過程

(一)不同比值的分割及變化：

1. 長a寬b且a＞b的矩形ABCD，若分割後剩下的矩形DEFC與原矩形ABCD相似，且 $\overline{ED}=ma-nb(m,n\in N)$ 的形式，則：



$$\frac{a}{b}=\frac{b}{ma-nb} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{ma-nb}{b}=m\times\frac{a}{b}-n$$

設 $x=\dfrac{a}{b}$ 　 $mx^2-nx-1=0$

$$x=\frac{n+\sqrt{n^2+4m}}{2m} \quad \left[\begin{array}{l}\because n<\sqrt{n^2+4m} \\ \therefore \text{取正值}\end{array}\right]$$

2.探討$ma-nb(m,n\in N)$的限制：

(1)$\because 0<ma-nb<b$

$$\therefore \begin{cases} ma-nb>0 \\ ma-nb<b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{b}=\dfrac{n+\sqrt{n^2+4m}}{2m}>\dfrac{n}{m} \\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{n+\sqrt{n^2+4m}}{2m}<\dfrac{n+1}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>0 \\ m<n+1 \end{cases}$$

(2)$\therefore 0<m<n+1$

$\therefore n^2<n^2+4m<(n+2)^2 \Rightarrow n<\sqrt{n^2+4m}<n+2$

又$4m\neq 2n+1$　$\therefore x=\dfrac{n+\sqrt{n^2+4m}}{2m}$　不爲有理數

$\therefore$a不爲b的有理數倍

$\therefore ma-nb$的限制爲

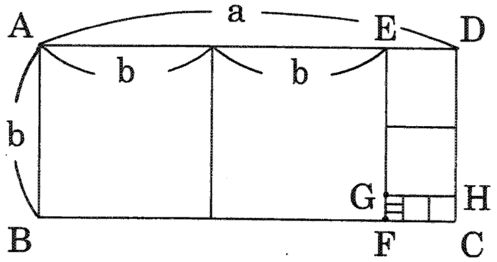
$m<n+1(m,n\in N)$，a不爲b的有理數倍

3.意義：

$\because x=\dfrac{a}{b}=\dfrac{n+\sqrt{n^2+4m}}{2m}$（$m>0,m<n+1$）爲矩形長寬比值

(1)$m=1$，$n=1$　$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$（黃金矩形之長寬比值）

(2)$m=1$，$n=2$　$x=1+\sqrt{2}$（如圖）



矩形ABCD～矩形DEFC
～矩形GFCH～……

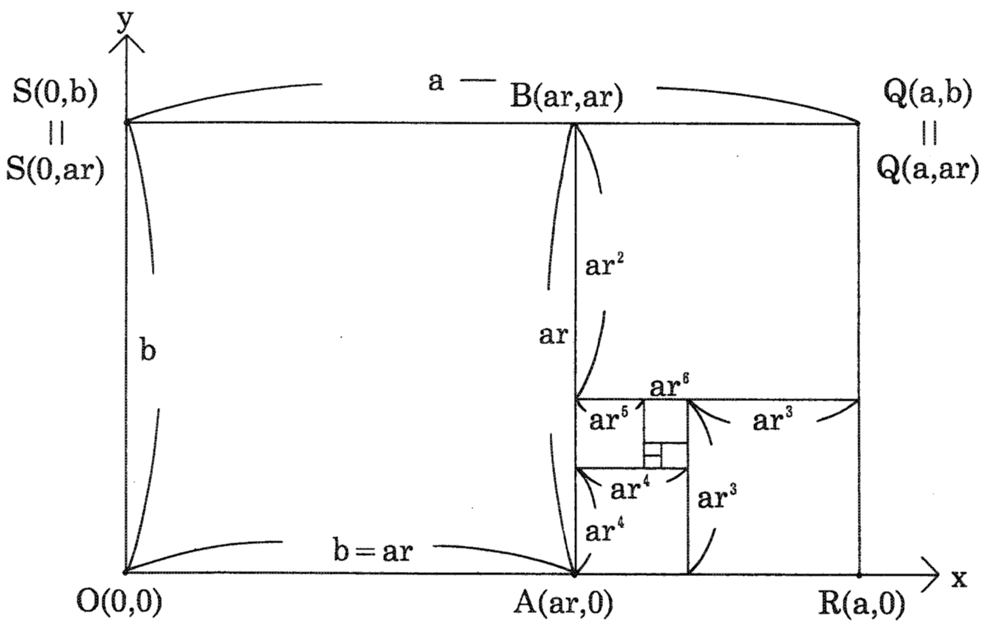
4.$\because$長寬不等矩形可依規律無限次分割得出與原矩形相似的圖形，故亦可依此方法分割剩下的矩形，直到一不可分割的點。因此，我們試著在直角坐標系上找出此點位置，考慮長寬不等（長a，寬b）矩形中，令$r=\dfrac{b}{a}$

$=\dfrac{ma-nb}{b}<1$，以r值來求收斂點。

$\therefore r=m\times\dfrac{1}{r}-n \Rightarrow r^2+nr-m=0$

即$r=\dfrac{-n+\sqrt{n^2+4m}}{2}$（$m<n+1$，$m,n\in N$）

5.取一直角坐標系後，以矩形左下角為原點（0,0），長邊a在x軸正方向上，短邊b在y軸正方向上，令$r=\dfrac{b}{a}$自左開始，順時針分割。



x 坐 標

$ar+ar^5+ar^9+ar^{13}+\cdots$

$=ar(1+r^4+r^8+r^{12}+\cdots)$

$=ar\times\dfrac{1}{1-r^4}$

$=\dfrac{ar}{1-r^4}$

y 坐 標

$ar^4+ar^8+ar^{12}+ar^{16}+\cdots$

$=ar^4(1+r^4+r^8+r^{12}+\cdots)$

$=ar\times\dfrac{1}{1-r^4}$

$=\dfrac{ar^4}{1-r^4}$

$\therefore m=1$，$n=1$時

收斂點位置$P_{11}(\dfrac{ar_{11}}{1-r_{11}^4}$，$\dfrac{ar_{11}^4}{1-r_{11}^4})$且$r_{11}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

6.依同方法演算可得：

$\frac{b}{a}=r_{1n}=\frac{-n+\sqrt{n^2+4}}{2}$時，$m=1$，$n=n$，

則收斂點$P_{1n}(\frac{nar_{1n}}{1-r_{1n}^4}, \frac{nar_{1n}^4}{1-r_{1n}^4})$

$\frac{b}{a}=r_{2n}=\frac{-n+\sqrt{n^2+8}}{2}$時，$m=2$，$n=n$，

則收斂點$P_{2n}(\frac{a(nr_{2n}-1)}{1-r_{2n}^4}, \frac{ar_{2n}^3(nr_{2n}-1)}{1-r_{2n}^4})$

$\frac{b}{a}=r_{mn}=\frac{-n+\sqrt{n^2+4m}}{2}$時，$m=m$，$n=n$，

則收斂點$P_{mn}(\frac{a[nr_{mn}-(m-1)]}{1-r_{mn}^4}, \frac{ar_{mn}^3[nr_{mn}-(m-1)]}{1-r_{mn}^4})$

∴由討論過程可知：

$$P_{mn}(\frac{a[nr_{mn}-(m-1)]}{1-r_{mn}^4}, \frac{ar_{mn}^3[nr_{mn}-(m-1)]}{1-r_{mn}^4}), \quad r_{mn}=\frac{-n+\sqrt{n^2+4m}}{2}$$

7.討論的過程中，我們亦發現收斂點似乎在$\overline{SR}$，$\overline{AQ}$的交點上。

∵$S(0,ar)$　$R(a,0)$　∴$\overleftrightarrow{SR}$：$r_{mn}x+y=ar_{mn}$

$A((1-m)a+nar_{mn},0)$　$Q(a,ar)$

∴$\overleftrightarrow{AQ}$：$r_{mn}x+(nr_{mn}-m)y=ar_{mn}(nr_{mn}-m+1)$

利用$m=m$，$n=n$得$r_{mn}^2+nr_{mn}-m=0$

〔註〕$\overline{OA}=\overline{OR}-\overline{AR}=a-(ma-nb)=(1-m)a+nar$

$P_{mn}(\frac{a[nr_{mn}-(m-1)]}{1-r_{mn}^4}, \frac{ar_{mn}^3[nr_{mn}-(m-1)]}{1-r_{mn}^4})$　代入$\overleftrightarrow{SR}$、$\overleftrightarrow{AQ}$

$$\overleftrightarrow{SR}：r_{mn}\times\frac{a(nr_{mn}-m+1)}{1-r_{mn}^4}+\frac{ar_{mn}^3(nr_{mn}-m+1)}{1-r_{mn}^4}$$

$$=\frac{ar_{mn}}{1-r_{mn}^4}(1-r_{mn}^2)+\frac{ar_{mn}^3(1-r_{mn}^2)}{1-r_{mn}^4}=\frac{ar_{mn}}{1+r_{mn}^2}(1+r_{mn}^2)=ar_{mn}$$

$$\overleftrightarrow{AQ}：r_{mn}\times\frac{a(nr_{mn}-m+1)}{1-r_{mn}^4}+(nr_{mn}-m)\times\frac{ar_{mn}^3(nr_{mn}-m+1)}{1-r_{mn}^4}$$

$$=\frac{ar_{mn}(1-r_{mn}^2)}{1-r_{mn}^4})+(-r_{mn}^2)\times\frac{ar_{mn}^3(1-r_{mn}^2)}{1-r_{mn}^4}=ar_{mn}(1-r_{mn}^2)$$

$$=ar_{mn}(nr_{mn}-m+1)$$

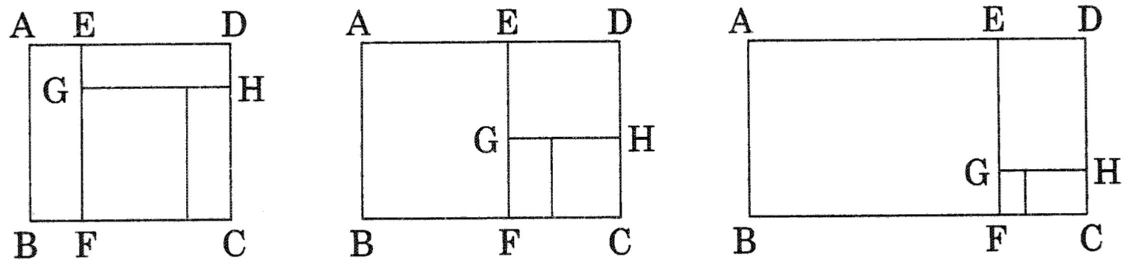
由討論可知：無論m,n變動，其收斂點

$P_{mn}(\frac{a[nr_{mn}-(m-1)]}{1-r_{mn}^4},\frac{ar_{mn}^3[nr_{mn}-(m-1)]}{1-r_{mn}^4})$恆在$\overleftrightarrow{SR}$、$\overleftrightarrow{AQ}$的交點上。

(二)任意長寬不等矩形的規律分割：

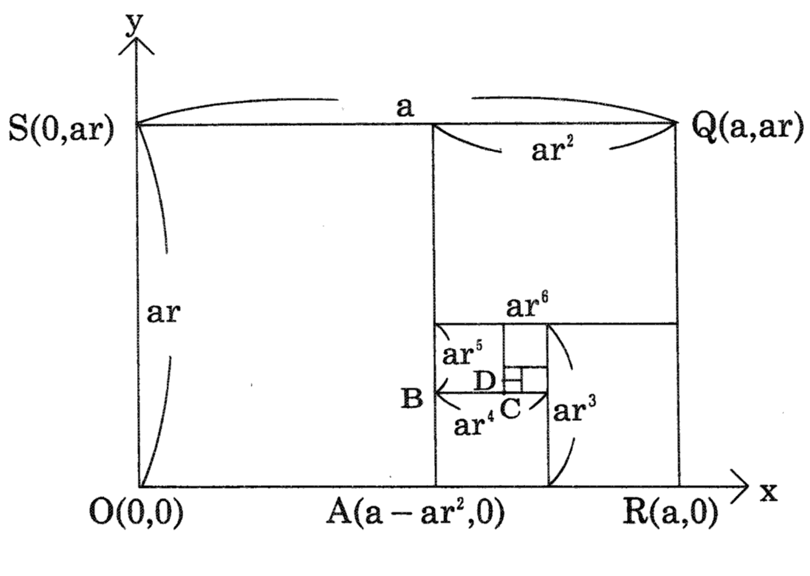
1.討論之後，我們發現前項類似黃金矩形之分割方法，有其m,n之限制，亦即$\frac{b}{a}=r=\frac{-n+\sqrt{n^2+4m}}{2}$時，才可依此法分割。於是再次試著去找一種分割方法，對於任何長寬不等的矩形皆適用。

如圖，利用比例線段的作圖，直接作出和原矩形相似之矩形。



矩形ABCD～矩形DEFC～矩形GFCH～……

2.討論此分割方法的收斂點位置，我們發現當一長寬不等之矩形採用比例線段方式分割（自左開始，順時針方向）如下圖，設$r=\frac{b}{a}$，長邊a在x軸上，短邊b在y軸上。



$\overline{OA}=a-ar^2$

$\overline{BC}=ar^4-ar^6$

$\vdots$

$\overline{AB}=ar^3-ar^5$

$\overline{CD}=ar^7-ar^9$

x 坐標 | y 坐標

$(a-ar^2)+(ar^4-ar^6)+(ar^8-ar^{10})+\cdots$

$=a(1-r^2)(1+r^4+r^8+\cdots)$

$=\dfrac{a(1-r^2)}{1-r^4}$

$=\dfrac{a}{1+r^2}$

$(ar^3-ar^5)+(ar^7-ar^9)+(ar^{11}-ar^{13})+\cdots$

$=ar^3(1-r^2)(1+r^4+r^8+\cdots)$

$=\dfrac{ar^3(1-r^2)}{1-r^4}$

$=\dfrac{ar^3}{1+r^2}$

∴收斂點坐標$P(\dfrac{a}{1+r^2},\dfrac{ar^3}{1+r^2})$

3.進一步討論此種分割法之收斂點是否亦在$\overline{SR}$、$\overline{AQ}$交點上。

∵$S(0,ar)$　$R(a,0)$　∴$\overleftrightarrow{SR}$：$rx+y=ar$

∵$A(a-ar^2,0)$　$Q(0,ar)$　∴$\overleftrightarrow{AQ}$：$-x+ry=a(r^2-1)$

$P(\dfrac{a}{1+r^2},\dfrac{ar^3}{1+r^2})$代入$\overleftrightarrow{SR}$、$\overleftrightarrow{AQ}$

$\overleftrightarrow{SR}$：$r\times\dfrac{a}{1+r^2}+\dfrac{ar^3}{1+r^2}=\dfrac{ar+ar^3}{1+r^2}=\dfrac{ar(1+r^2)}{1+r^2}=ar$

$\overleftrightarrow{AQ}$：$-\dfrac{a}{1+r^2}+r\times\dfrac{ar^3}{1+r^2}=\dfrac{-a+ar^4}{1+r^2}=\dfrac{a(r^4-1)}{1+r^2}=a(r^2-1)$

∴此種比例分割方式之收斂點亦在$\overleftrightarrow{SR}$、$\overleftrightarrow{AQ}$交點上。

4.因爲前述兩分割方法有諸多相似之處，所以我們再次著手探討同一矩形（指適合兩種分割方法之矩形），依兩種方法分割後，所得之收斂點是否重合。

(1)就圖形而言：把此矩形分爲兩個全等矩形來討論。

∵矩形ABCD≅矩形A′B′C′D′　∴$\overline{CD}=\overline{C'D'}$

∴矩形DEFC～矩形ABCD≅矩形A′B′C′D′～矩形D′E′F′C′

∴$\overline{CD}:\overline{DE}=\overline{C'D'}:\overline{D'E'}$　∵$\overline{CD}=\overline{C'D'}$　∴$\overline{DE}=\overline{D'E'}$

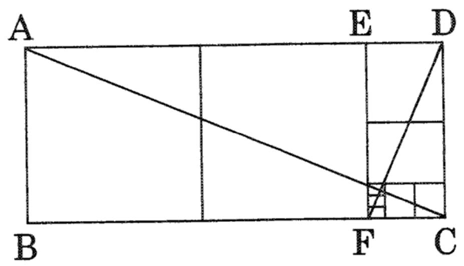
即矩形DEFC≅矩形D′E′F′C′

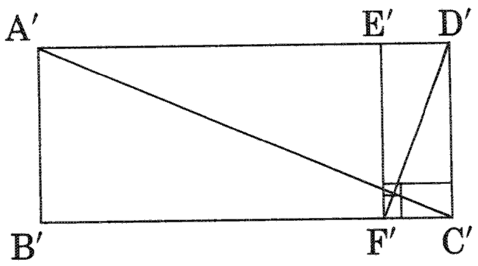
∴若矩形ABCD，矩形A′B′C′D′重合

則矩形DEFC，矩形D′E′F′C′重合

∴$\begin{cases}\overline{AC}、\overline{A'C'}\text{重合}\\ \overline{DF}、\overline{D'F'}\text{重合}\end{cases}$ ⇒$\overline{AC}$和$\overline{DF}$交點，$\overline{A'C'}$和$\overline{D'F'}$交點重合

即收斂點重合。





(2)就收斂點來說：前者類似黃金矩形之分割法收斂點

$\left(\frac{a[nr-(m-1)]}{1-r^4}, \frac{ar^3[nr-(m-1)]}{1-r^4}\right)$而後者比例線段分割法收斂點爲

$\left(\frac{a}{1+r^2}, \frac{ar^3}{1+r^2}\right)$

$\because$設$r=\frac{b}{a}=\frac{ma-nb}{b}$ $\therefore r=m\times\frac{1}{r}-n$ 即$r^2+nr-m=0$ $\therefore r^2=m-nr$

x 坐 標

$$\frac{a[nr-(m-1)]}{1-r^4}$$
$$=\frac{a[(nr-m)+1]}{1-r^4}$$
$$=\frac{a(1-r^2)}{(1-r^2)(1+r^2)}$$
$$=\frac{a}{1+r^2}$$

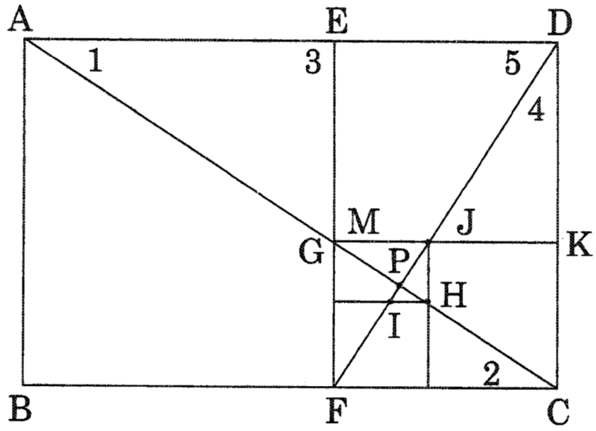
y 坐 標

$$\frac{ar^3[nr-(m-1)]}{1-r^4}$$
$$=\frac{ar^3[(nr-m)+1]}{1-r^4}$$
$$=\frac{ar^3(1-r^2)}{(1-r^2)(1+r^2)}$$
$$=\frac{ar^3}{1+r^2}$$

$\therefore$收斂點（$\frac{a[nr-(m-1)]}{1-r^4}$，$\frac{ar^3[nr-(m-1)]}{1-r^4}$）和收斂點

（$\frac{a}{1+r^2}$，$\frac{ar^3}{1+r^2}$）重合。

5.在求收斂點的過程中，我們亦發現矩形求收斂點的兩條對角線似乎垂直。
而且A,G…H,C似乎共線；而D,J…I,F也如此。



〔求證〕$\overline{AC} \perp \overline{DF}$

〔證明〕∵矩形ABCD～矩形DEFC

∴$\overline{AD}:\overline{CD}=\overline{CD}:\overline{CF}$

又矩形ABCD

∴$\angle ADC=90°=\angle DCF$

∴$\triangle ADC \sim \triangle DCF$[SAS相似]

∴$\angle 1=\angle 4$

∴$\angle 1+\angle 5=\angle 4+\angle 5=90°$

∴$\angle APD=90°$　∴$\overline{AC} \perp \overline{DF}$

〔求證〕A,G⋯H,C共線；

D,J⋯I,F共線

〔證明〕(1)設$\overline{AC}$交$\overline{EF}$於M

∵矩形ABCD　∴$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$

∴$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle MFC$

∴$\triangle AEM \sim \triangle CFM$〔AA相似〕

∴$\overline{AE}:\overline{EM}=\overline{CF}:\overline{MF}$——(a)

(2)∵矩形EFCD　∴$\overline{EF}/\!/\overline{CD}$

∴$\angle 3=\angle ADC$　$\angle 1=\angle 1$

∴$\triangle AEM \sim \triangle ADC$[AA相似]

∴$\overline{AE}:\overline{EM}=\overline{AD}:\overline{CD}$

又矩形ABCD～矩形DEFC～矩形KCFG

∴$\overline{AE}:\overline{EM}=\overline{AD}:\overline{CD}=\overline{CD}:\overline{CF}=\overline{CF}:\overline{FG}$——(b)

(3)由(a)(b)　∴$\overline{CF}:\overline{MF}=\overline{AE}:\overline{EM}=\overline{CF}:\overline{FG}$

∴$\overline{FM}=\overline{FG}$　∴M,G重合

∵M在$\overline{AC}$上　∴A,G,C共線

同理A,G…H,C共線

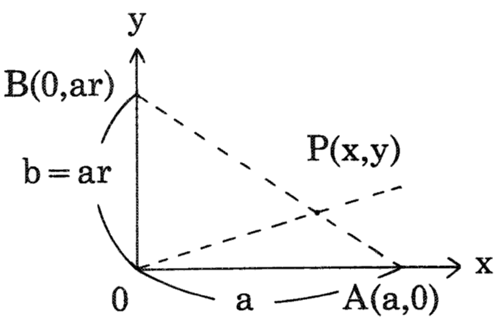
D,J…I,F共線

∴用來求收斂點的兩條對角線互相垂直，且分割後所得之矩形其同方向的對角線都在$\overline{AC}$或$\overline{DF}$上。

㈢平面上點坐標還原爲矩形的探討：

在完成由矩形找其收斂點的討論之後，我們試著利用探討得出之性質，由坐標平面上的一點向外還原，找出原矩形。

在坐標平面上一點P(x,y)，討論其坐標限制：爲使得到之原矩形長邊a在x軸正方向上，短邊b在y軸正方向上，故P(x,y)中，$x>y>0$。



由討論可知$P(x,y)=P(\frac{a}{1+r^2}，\frac{ar^3}{1+r^2})=P(\frac{a[nr-(m-1)]}{1-r^4}，\frac{ar^3[nr-(m-1)]}{1-r^4})$

$$\therefore \overleftrightarrow{OP}\text{斜率}=\frac{y}{x}=\frac{\frac{ar^3}{1+r^2}}{\frac{a}{1+r^2}}=\frac{\frac{ar^3[nr-(m-1)]}{1-r^4}}{\frac{a[nr-(m-1)]}{1-r^4}}=r^3$$

$\therefore y=xr^3$　$\therefore P(x,y)=P(x,xr^3)$　且$r=\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$

∵收斂點P必在原矩形和第一次分割後所得之矩形對角線交點上

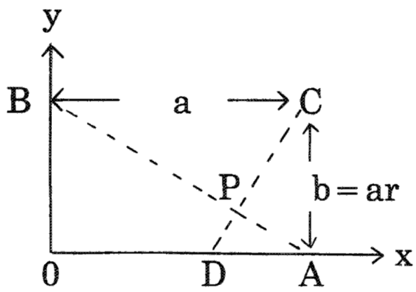
∴設$\overline{AB}$爲原矩形之對角線，$\overline{AO}=a$，$\overline{BO}=b=ar$　$\therefore \overleftrightarrow{AB}$斜率$=-\frac{b}{a}=-r$

依斜率和兩點式觀念可得：$P(x,xr^3)$，$A(a,0)$，P,A在$\overline{AB}$上，$\overleftrightarrow{AB}$斜率$=-r$

$\therefore \frac{0-xr^3}{a-x}=-r$，$\frac{xr^2}{a-x}=1$，$xr^2=a-x$，$a=x(1+r^2)$　$\therefore b=xr(1+r^2)$

$$\therefore\begin{cases} a = x + xr^2 = x + x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{y^2}{x^2}} = x + \sqrt[3]{xy^2} \\ b = xr + xr^3 = x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}} + x\left(\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}\right)^3 = y + \sqrt[3]{x^2y} \end{cases} \qquad \therefore\begin{cases} a = x + \sqrt[3]{xy^2} \\ b = y + \sqrt[3]{x^2y} \end{cases}$$

爲了驗證結果正確，再著手第一次分割所得之相似矩形的對角線



設第一次分割得出之矩形對角線$\overline{CD}$ $\therefore \overline{CD} \perp \overline{AB}$

依斜率觀念：兩垂直線斜率乘積爲-1

$\therefore \overleftrightarrow{CD}$ 斜率$=\dfrac{1}{r}$ 又$P(x,xr^3),C(a,ar)$在$\overleftrightarrow{CD}$上

$\therefore \dfrac{ar-xr^3}{a-x}=\dfrac{1}{r} \Rightarrow a=x+\sqrt[3]{xy^2}$，$b=y+\sqrt[3]{x^2y}$ 和前述相同

∴若坐標平面上一點$P(x,y)$，$x>y>0$，則以此點爲收斂點還原而得之矩形，其長$x+\sqrt[3]{xy^2}$，寬$y+\sqrt[3]{x^2y}$，若P唯一確定，則原矩形也必唯一確定

四、結論

㈠長寬不等之矩形，利用類似黃金矩形之分割方法或比例線段作圖分割法，自左開始順時針作規律性的無限次分割，偶數次分割後所得之矩形對角線和原矩形對角線重合；奇數次分割後所得之矩形對角線則與第一次分割後所得矩形之對角線重合；且分割後可得一收斂點，在原矩形和每一次分割後所得之對角線交點上。

㈡坐標平面上，第一象限中一點（x,y）若$x>y>0$則可由x,y坐標比值經計算後向外還原得出以此點爲收斂點之唯一矩形且長$x+\sqrt[3]{xy^2}$，寬$y+\sqrt[3]{x^2y}$。

㈢一長寬不等之矩形，長a寬b（$a>b$，a不爲b的有理數倍）$r_{mn}=\dfrac{b}{a}=$

$\dfrac{-n+\sqrt{n^2+4m}}{2}$（m,n∈N）時，可依類似黃金矩形之分割法在坐標平面上，自左開始順時針作規律性無限次分割，得到一收斂點

（$\dfrac{a[nr_{mn}-(m-1)]}{1-r_{mn}^4}$，$\dfrac{ar_{mn}^3[nr_{mn}-(m-1)]}{1-r_{mn}^4}$）。

㈣黃金矩形爲上述㈢分割法中，m＝1，n＝1之特例。

㈤一長寬不等之矩形，若依比例線段作圖分割法分割，則無長寬比值之限制，其收斂點（$\dfrac{a}{1+r^2}$，$\dfrac{ar^3}{1+r^2}$）（$r=\dfrac{b}{a}$，長a，寬b，a＞b＞0）

㈥上述類似黃金矩形分割法爲㈤分割法中，m,n∈N之特例。

㈦同一矩形（適合前述兩種分割方式之矩形）無論利用類似黃金矩形分割方法或比例線段作圖分割法，自左開始順時針作規律性的無限次分割所得之收斂點重合。

五、參考資料

㈠國民中學數學課本第四册　國立編譯館

㈡國民中學選修數學上、下册　國立編譯館

㈢初中資優生的解析幾何學　4－3斜率的意義　楊維哲　三民書局

㈤什麼是數　Ⅲ發散？收斂？　李正宏　建興出版社

㈥數學誕生的故事　被比作寶石礦的黃金分割　九章出版社

評　語

將不同比值的分割，無限次執行後得一收斂點，此類分析方式在數學上是相當正統，本作品之作者能完整及正確的分析出來，可算是值得獎勵的作品。