aT＋bU的探討

國中組數學科第三名

南投縣埔里國民中學

作　　者：吳明政、陳界豪、洪銘欽、廖顯明

指導教師：黃季香、陳麗惠

一、研究動機

在日常生活或做題目中，常用到數字的運算，而這些數字均是以十進位法來表示，因此不禁產生了疑問？十進位法是「數」的唯一表示法嗎？我們是不是能用其他型式來表示「數」呢？

二、研究目的

希望以aT＋bU的型式來表示二位數TU，亦希望藉著對aT＋bU的探討，來提升我們的數學能力，及找出一些規則。

三、研究過程

㈠aT＋bU的介紹：

設TU代表一個二位數，欲將TU以aT＋bU的型式來表示，在此T、U、a、b有些限制，即

T、U、a、b均爲整數，且$1 \leqq T \leqq 9$　$0 \leqq U \leqq 9$　$a \geqq 0$　$b \geqq 0$

㈡目標1：是否任何二位數都存在數對（a,b），使得TU＝aT＋bU呢？

$10 = 1a + 0 \cdot b = a$　$\therefore a = 10$而b爲大於等於0的整數

$\therefore$10有數對（10,NU{0}）存在

$11 = 1 \cdot a + 1 \cdot b = a + b$　$\therefore a + b = 11$

當$a=0 \Rightarrow b=11$，當$a=1 \Rightarrow b=10$

當$a=2 \Rightarrow b=9$，當$a=3 \Rightarrow b=8$

當$a=4 \Rightarrow b=7$，當$a=5 \Rightarrow b=6$

當$a=6 \Rightarrow b=5$，當$a=7 \Rightarrow b=4$

當$a=8 \Rightarrow b=3$，當$a=9 \Rightarrow b=2$

當$a=10 \Rightarrow b=1$，當$a=11 \Rightarrow b=0$

因此，構成11＝aT＋bU的數對（a,b）共有(0,11)，(1,10)，(2,9)，(3,8)，(4,7)，(5,6)，(6,5)，(7,4)，(8,3)，(9,2)，(10,1)，(11,0)

$12=1\cdot a+2b$

當$a=0\Rightarrow b=6$，當$a=1\Rightarrow b=\frac{11}{2}$（不合）$\because a$，$b\in N\cup\{0\}$

當$a=2\Rightarrow b=5$，當$a=3\Rightarrow b=\frac{9}{2}$（不合）

當$a=4\Rightarrow b=4$，當$a=5\Rightarrow b=\frac{7}{2}$（不合）

當$a=6\Rightarrow b=3$，當$a=7\Rightarrow b=\frac{5}{2}$（不合）

當$a=8\Rightarrow b=2$，當$a=9\Rightarrow b=\frac{3}{2}$（不合）

當$a=10\Rightarrow b=1$，當$a=11\Rightarrow b=\frac{1}{2}$（不合）

當$a=12\Rightarrow b=0$

因此，構成$12=aT+bU$的數對（a,b）共有(0,6)，(2,5)，(4,4)，(6,3)，(8,2)，(10,1)，(12,0)

〔發現1〕：本擬照上面討論的方式，將所有合乎二位數$TU=aT+bU$的數對（a,b）找出，但在討論的過程中，我們發現有更快的方法找出合乎$TU=aT+bU$的數對（a,b）亦即$a=10+UK\geqq 0$　$K\in Z$

$b=1-TK\geqq 0$

但後來我們又想必須是（10,1）嗎？能不能是符合$TU=aT+bU$的任一組數對（a,b）呢？後經我們一再的代入計算與討論，我們認爲是可以的。

亦即，若先找出一組（a_0,b_0）合乎$TU=a_0T+b_0U$，則其它數對就可以以（a,b）＝（a_0+UK，b_0-TK）的型式出現，但在此的K須符合$a_0+UK\geqq 0$且$b_0-TK\geqq 0$且$K\in Z$

〔證明〕：$\because(a_0,b_0)$爲$TU=aT+bU$的一組數對，$\therefore a_0T+b_0U=TU$，將

$a=a_0+UK$，$b=b_0-TK$代入$aT+bU$中

$$\therefore aT+bU=(a_0+UK)T+(b_0-TK)U$$

$$=a_0T+UKT+b_0U-UKT=a_0T+b_0U=TU$$故得證

由上的證明可知，可由$a=a_0+UK\geqq 0$，$b=b_0-TK\geqq 0$來求出合乎$TU=aT+bU$的所有數對（a,b）

現將所有二位數$TU=aT+bU$的數對列出如附表所示。

觀察附表上的數對後，有以下幾個發現：

〔發現2〕：每個二位數均可找到（10,1）這一組數對，經思考後，我們才知因爲TU這二位數本是以十進位法來表示，因此TU本就可表示爲$10T+U$，所以每個二位數才均有（10,1）這一組數對。

〔發現3〕：共有11組數，它們的數對（a,b）均相同。

①10、20、30、40、50、60、70、80、90

②11、22、33、44、55、66、77、88、99

③12、24、36、48

④13、26、39

⑤14、28

⑥21、42、63、84

⑦23、46、69

⑧31、62、93

⑨32、64、96

⑩41、82

⑪43、86

〔發現4〕：由①～⑪組數中有另一發現，若二個二位數T_0U_0，T_1U_1，其

$\begin{vmatrix} T_0 & U_0 \\ T_1 & U_1 \end{vmatrix}=0$，則$T_0U_0$，$T_1U_1$的所有數對（a,b）均相同

〔證明〕：$T_0U_0=aT_0+bU_0=10T_0+U_0 \quad T_1U_1=aT_1+bU_1=10T_1+U_1$

已知$\triangle=\begin{vmatrix} T_0 & U_0 \\ T_1 & U_1 \end{vmatrix}=0$

則$\triangle_a=\begin{vmatrix} 10T_0+U_0 & U_0 \\ 10T_1+U_1 & U_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 10T_0 & U_0 \\ 10T_1 & U_1 \end{vmatrix}=10\begin{vmatrix} T_0 & U_0 \\ T_1 & U_1 \end{vmatrix}=0$

$\times(-1)$

$\triangle_b=\begin{vmatrix} T_0 & 10T_0+U_0 \\ T_1 & 10T_1+U_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} T_0 & U_0 \\ T_1 & U_1 \end{vmatrix}=0$

$\times(-10)$

因爲$\triangle=\triangle_a=\triangle_b=0$

∴a,b有無限多解，但須符合條件亦即T_0U_0、T_1U_1的所有數對（a,b）均相同。

〔發現5〕：同一個二位數的任二組數對（a,b）的行列式值必爲此二位數的整數倍。

〔證明〕：從〔發現1〕的結果，我們知道同一個二位數TU的任二組數對可以（a_0+UK_1，b_0-TK_1）及（a_0+UK_2，b_0-TK_2）來表示，$K_1,K_2\in Z$

在此的$a_0+UK_1\geqq 0$，$b_0-TK_1\geqq 0$，$a_0+UK_2\geqq 0$，$b_0-TK_2\geqq 0$

則
$$\begin{vmatrix} a_0+UK_1 & b_0-TK_1 \\ a_0+UK_2 & b_0-TK_2 \end{vmatrix} = a_0b_0+b_0UK_1-a_0TK_2-TUK_1K_2$$
$$-a_0b_0+a_0TK_1-b_0UK_2+TUK_1K_2$$
$$=b_0UK_1-a_0TK_2+a_0TK_1-b_0UK_2$$
$$=K_1(a_0T+b_0U)-K_2(a_0T+b_0U)$$
$$=(a_0T+b_0U)(K_1-K_2)=TU(K_1-K_2)$$
爲TU的整數倍。

㈢目標2：若（a,b）已知，可否找出二位數TU呢？

例：$(a,b)=(4,55)$求TU

$TU=4T+55U=10T+U$

$\therefore 6T=54U$（約分即同除以6，54的最大公因數）

$\therefore T=9U$　當$U=1\Rightarrow T=9$　$\therefore TU=91$

再繼續以此法來解一些已知的（a,b），求出TU，由計算過程及觀察驗算中，可找出規則

設（a_0,b_0）爲$aT+bU=TU$的一組數對

(1)當$(a_0,b_0)=(10,1)\Rightarrow TU=10T+U=10T+U\Rightarrow 0T=0U$

$\therefore$有無限多解，但因T,U本身有限制

因此祇要滿足$1\leqq T\leqq 9$，$0\leqq U\leqq 9$，$T,U\in Z$的二位數均可

(2)當$(a_0,b_0)\fallingdotseq(10,1)$則

$$T=\frac{|b_0-1|K}{(|b_0-1|,|10-a_0|)}$$

$$U=\frac{|10-a_0|K}{(|b_0-1|,|10-a_0|)}$$

在此的$K\in Z^+$，$1\leqq T\leqq 9$，$0\leqq U\leqq 9$

〔證明〕：因爲（a_0,b_0）爲$aT+bU=TU$的一組數對　所以$TU=a_0T+b_0U$

$10T+U=a_0T+b_0U\Rightarrow(10-a_0)T=(b_0-1)U$

$\therefore|10-a_0|T=|b_0-1|U$………………Ⓐ

令$(|10-a_0|,|b_0-1|)=t$

Ⓐ式兩邊同除以t$\Rightarrow\frac{|10-a_0|}{t}T=\frac{|b_0-1|}{t}U$

則$T:U=\frac{|b_0-1|}{t}:\frac{|10-a_0|}{t}$（此爲最簡整數比）

$$\therefore\begin{cases}T=\frac{|b_0-1|}{t}K=\frac{|b_0-1|K}{(|b_0-1|,|10-a_0|)}\\ U=\frac{|10-a_0|}{t}K=\frac{|10-a_0|K}{(|b_0-1|,|10-a_0|)}\end{cases}$$ 故得證

(四)目標3：是否可在任二個不同的數對（a,b）上，找到同一個二位數呢？

例：$(a,b)=(12,0)$及$(8,2)$

$TU=12T+0U$及$TU=8T+2U$

$\therefore 12T+0U=8T+2U\quad\therefore 4T=2U$（約分亦即兩邊同除以4,2的最大公因數）

$\therefore 2T=U$

當$T=1\Rightarrow U=2$，當$T=2\Rightarrow U=4$，當$T=3\Rightarrow U=6$

當$T=4\Rightarrow U=8$

$\therefore TU$爲12，24，36，48

例：$(a,b)=(4,17)$、$(3,9)$

則$TU=4T+17U$及$TU=3T+9U$

$\therefore 4T+17U=3T+9U\quad\therefore T=-8U$（不合）

$\because T,U\in Z$ 且$1\leqq T\leqq 9$，$0\leqq U\leqq 9$ 亦即由（4,17），（3,9）找不出共同的二位數TU，由此可知：任二個不同的數對（a,b）不一定找得出共同的二位數TU。我們再繼續舉一些例子來探討、研究，而計算觀察出，若任二組數對（a_0,b_0），（a_1,b_1）且$b_1>b_0$則似乎有$T=b_1-b_0$，$U=a_0-a_1$的規則出現我們再舉一些例子來驗算：

例：(2,19)，(6,10)　$T=19-10=9$　$U=6-2=4$　$\therefore TU=94$

例：(6,3)，(2,5)　$T=5-3=2$　$U=6-2=4$

$\therefore TU=24$

由附表中可查出符合（6,3），（2,5）的二位數TU並非祇有24因此我們必須再修改T,U，我們仍繼續舉一些例子來觀察、計算而找出下列的規則：

若（ a_0,b_0 ），（ a_1,b_1 ）爲不同的兩組數對

則$a_0T+b_0U=TU$及$a_1T+b_1U=TU$

$\Rightarrow a_0T+b_0U=a_1T+b_1U$

$\Rightarrow (a_0-a_1)T=(b_1-b_0)U$，因爲T,U有所限制，因此

(1)若$(a_0-a_1)(b_1-b_0)>0$則

$$T=\frac{|b_1-b_0|K}{(|a_0-a_1|,|b_1-b_0|)}$$

$$U=\frac{|a_0-a_1|K}{(|a_0-a_1|,|b_1-b_0|)} \qquad K\in Z^+$$

〔證明〕：$\because (a_0-a_1)T=(b_1-b_0)U$

$\Rightarrow |a_0-a_1|T=|b_1-b_0|U$（約分即兩邊同除以$(|a_0-a_1|,|b_1-b_0|)$）

$$\Rightarrow \frac{|a_0-a_1|T}{(|a_0-a_1|,|b_1-b_0|)}=\frac{|b_1-b_0|U}{(|a_0-a_1|,|b_1-b_0|)}$$

$$\Rightarrow T:U=\frac{|b_1-b_0|}{(|a_1-a_0|,|b_1-b_0|)}:\frac{|a_0-a_1|}{(|a_0-a_1|,|b_1-b_0|)}$$

（最簡整數比）

$$\therefore \begin{cases} T=\dfrac{|b_1-b_0|}{(|a_1-a_0|,|b_1-b_0|)}K \\ U=\dfrac{|a_0-a_1|}{(|a_0-a_1|,|b_1-b_0|)}K \end{cases} \qquad K\in Z^+$$

故得證

(2)若$(a_0-a_1)(b_1-b_0)<0$ 則無解 $\because 1\leqq T\leqq 9$，$0\leqq U\leqq 9$

(3)若$(a_0-a_1)(b_1-b_0)=0$

(i)$a_0-a_1=0$ $b_1-b_0\neq 0$

則$(a_0-a_1)T=(b_1-b_0)U\Rightarrow 0T=(b_1-b_0)U=0$ $\because b_1\neq b_0$ $\therefore U=0$ $\therefore$T爲任意整數，$U=0$，但因$1\leqq T\leqq 9$，因此符合的TU爲10、20、30、40、50、60、70、80、90

(ii)$a_0-a_1\neq 0$，$b_1-b_0=0$

則$(a_0-a_1)T=0U=0$ $\because a_0-a_1\neq 0$ $\therefore T=0$但$1\leqq T\leqq 9$

$\therefore$無解

(iii)$a_0-a_1=0$，$b_1-b_0=0\Rightarrow 0T=0U$則TU的求法就與目標2相同了

㈤目標4：任兩個二位數是否可找到相同的數對（a,b）？

例12，23

$$\begin{array}{l} 12=a+2b \\ 23=2a+3b \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a+2b=12 \\ 2a+3b=23 \end{cases}$$ 解二元一次聯立方程組

$\Rightarrow a=10$，$b=1$　$\therefore (10,1)$是12，23的共同數對。

〔證明〕：設任兩個二位數爲T_0U_0，T_1U_1，（a,b）爲其共同的數對。

則$aT_0+bU_0=T_0U_0$

$aT_1+bU_1=T_1U_1$

(1)若$\triangle=\begin{vmatrix} T_0 & U_0 \\ T_1 & U_1 \end{vmatrix}=0$　則與目標1的〔發現4〕相同

即T_0U_0，T_1U_1的所有數對（a,b）均相同

(2)若$\triangle=\begin{vmatrix} T_0 & U_0 \\ T_1 & U_1 \end{vmatrix}\neq 0$

則$\begin{cases} T_0U_0=aT_0+bU_0=10T_0+U_0 \\ T_1U_1=aT_1+bU_1=10T_1+U_1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \triangle_a=\begin{vmatrix} 10T_0+U_0 & U_0 \\ 10T_1+U_1 & U_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 10T_0 & U_0 \\ 10T_1 & U_1 \end{vmatrix}=10\begin{vmatrix} T_0 & U_0 \\ T_1 & U_1 \end{vmatrix}=10\triangle$$

$\times(-1)$

$$a=\frac{\triangle_a}{\triangle}=10$$

$$\triangle_b=\begin{vmatrix} T_0 & 10T_0+U_0 \\ T_1 & 10T_1+U_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} T_0 & U_0 \\ T_1 & U_1 \end{vmatrix}=\triangle \quad b=\frac{\triangle_b}{\triangle}=1$$

$\times(-10)$

$\therefore$對$\triangle=\begin{vmatrix} T_0 & U_0 \\ T_1 & U_1 \end{vmatrix}\neq 0$　的任二個二位數必有一共通的數對 $(a,b)=(10,1)$

綜合(1)，(2)可知

任二個二位數必可找到相同的數對（a,b）

四、研究結果

1.任意二位數TU均可以$aT+bU$的型式來表示，且$(a,b)=(10,1)$是所有二位數共通的一數對。

2.若（a,b）已知，則必可找出二位數TU。

3.任二個不同的數對（a,b），不一定可找出同一個二位數TU

4.任兩個二位數必可找到相同的數對，至少有（10,1）這一組數對。

五、結論

在此次的研究中，我們祇針對二位數來探討，但除了二位數外，還可再探討多於二位數的變化，乃至推廣到n位數與n元一次聯立方程組及cramer's rule。

六、參考資料

國中數學一、二冊，及高中數學行列式的部份。

附表

TU	aT＋bU	(a,b)
10	$a+0b=10 \Rightarrow a=10$	(10,NU{0})
11	$a+b=11$	(0,11)(1,10)(2,9)(3,8)(4,7)(5,6) (6,5)(7,4)(8,3)(9,2)(10,1)(11,0)
12	$a+2b=12$	(0,6)(2,5)(4,4)(6,3)(8,2)(10,1)(12,0)
13	$a+3b=13$	(1,4)(4,3)(7,2)(10,1)(13,0)
14	$a+4b=14$	(2,3)(6,2)(10,1)(14,0)
15	$a+5b=15$	(0,3)(5,2)(10,1)(15,0)
16	$a+6b=16$	(4,2)(10,1)(16,0)
17	$a+7b=17$	(3,2)(10,11)(17,0)
18	$a+8b=18$	(2,2)(10,1)(18,0)
19	$a+9b=19$	(1,2)(10,1)(19,0)
20	$2a+0b=20 \Rightarrow a=10$	同10
21	$2a+b=21$	(0,21)(1,19)(2,17)(3,15)(4,13)(5,11)(6,9) (7,7)(8,5)(9,3)(10,1)
22	$2a+2b=22 \Rightarrow a+b=11$	同11
23	$2a+3b=23$	(1,7)(4,5)(7,3)(10,1)
24	$2a+4b=24 \Rightarrow a+2b=12$	同12
25	$2a+5b=25$	(0,5)(5,3)(10,1)
26	$2a+6b=26 \Rightarrow a+3b=13$	同13
27	$2a+7b=27$	(3,3)(10,1)
28	$2a+8b=28 \Rightarrow a+4b=14$	同14

29	$2a+9b=29$	(1,3)(10,1)
30	$3a+0b=30 \Rightarrow a=10$	同10，20
31	$3a+b=31$	(0,31)(1,28)(2,25)(3,22)(4,19)(5,16)(6,13) (7,10)(8,7)(9,4)(10,1)
32	$3a+2b=32$	(0,16)(2,13)(4,10)(6,7)(8,4)(10,1)
33	$3a+3b=33 \Rightarrow a+b=11$	同11，22
34	$3a+4b=34$	(2,7)(6,4)(10,1)
35	$3a+5b=35$	(0,7)(5,4)(10,1)
36	$3a+6b=36 \Rightarrow a+2b=12$	同12，24
37	$3a+7b=37$	(3,4)(10,1)
38	$3a+8b=38$	(2,4)(10,1)
39	$3a+9b=39 \Rightarrow a+3b=13$	同13，26
40	$4a+0b=40 \Rightarrow a=10$	同10，20，30
41	$4a+b=41$	(0,41)(1,37)(2,33)(3,29)(4,25)(5,21)(6,17) (7,13)(8,9)(9,5)(10,1)
42	$4a+2b=42 \Rightarrow 2a+b=21$	同21
43	$4a+3b=43$	(1,13)(4,9)(7,5)(10,1)
44	$4a+4b=44 \Rightarrow a+b=11$	同11，22，33
45	$4a+5b=45$	(0,9)(5,5)(10,1)
46	$4a+6b=46 \Rightarrow 2a+3b=23$	同23
47	$4a+7b=47$	(3,5)(10,1)
48	$4a+8b=48 \Rightarrow a+2b=12$	同12，24，36
49	$4a+9b=49$	(1,5)(10,1)
50	$5a+0b=50 \Rightarrow a=10$	同10，20，30，40
51	$5a+b=51$	(0,51)(1,46)(2,41)(3,36)(4,31)(5,26)(6,21) (7,16)(8,11)(9,6)(10,1)
52	$5a+2b=52$	(0,26)(2,21)(4,16)(6,11)(8,6)(10,1)
53	$5a+3b=53$	(1,16)(4,11)(7,6)(10,1)
54	$5a+4b=54$	(2,11)(6,6)(10,1)
55	$5a+5b=55 \Rightarrow a+b=11$	同11，22，33，44
56	$5a+6b=56$	(4,6)(10,1)
57	$5a+7b=57$	(3,6)(10,1)
58	$5a+8b=58$	(2,6)(10,1)

59	$5a+9b=59$	(1,6)(10,1)
60	$6a+0b=60\Rightarrow a=10$	同10，20，30，40，50
61	$6a+b=61$	(0,61)(1,55)(2,49)(3,43)(4,37)(5,31)(6,25)(7,19)(8,13)(9,7)(10,1)
62	$6a+2b=62\Rightarrow 3a+b=31$	同31
63	$6b+3b=63\Rightarrow 2a+b=21$	同21，42
64	$6a-4b=64\Rightarrow 3a+2b=32$	同32
65	$6a+5b=65$	(0,13)(5,7)(10,1)
66	$6a+6b=66\Rightarrow a+b=11$	同11，22，33，44，55
67	$69+76=67$	(3,7)(10,1)
68	$6a+8b=68\Rightarrow 3a+4b=34$	同34
69	$6a+9b=69\Rightarrow 2a+3b=23$	同23，46
70	$7a+0b=70\Rightarrow a=10$	同10，20，30，40，50，60
71	$7a+b=71$	(0,71)(1,64)(2,57)(3,50)(4,43)(5,36)(6,29)(7,22)(8,15)(9,8)(10,1)
72	$7a+2b=72$	(0,36)(2,29)(4,22)(6,15)(8,8)(10,1)
73	$7a+3b=73$	(1,22)(4,15)(7,8)(10,1)
74	$7a+4b=74$	(2,15)(6,8)(10,1)
75	$7a+5b=75$	(0,15)(5,8)(10,1)
76	$7a+6b=76$	(4,8)(10,1)
77	$7a+7b=77\Rightarrow a+b=11$	同11，22，33，44，55，66
78	$7a+8b=78$	(2,8)(10,1)
79	$7a+9b=79$	(1,8)(10,1)
80	$8a+0b=80\Rightarrow a=10$	同10，20，30，40，50，60，70
81	$8a+b=81$	(0,81)(1,73)(2,65)(3,57)(4,49)(5,41)(6,33)(7,25)(8,17)(9.9)(10,1)
82	$8a+2b=82\Rightarrow 4a+b=41$	同41
83	$8a+3b=83$	(1,25)(4,17)(7,9)(10,1)
84	$8a+4b=84\Rightarrow 2a+b=21$	同21，42，63
85	$8a+5b=85$	(0,17)(5,9)(10,1)
86	$8a+6b=86\Rightarrow 4a+3b=43$	同43
87	$8a+7b=87$	(3,9)(10,1)
88	$8a+8b=88\Rightarrow a+b=11$	同11，22，33，44，55，66，77

89	$8a+9b=89$	(1,9)(10,1)
90	$9a+0b=90\Rightarrow a=10$	同10，20，30，40，50，60，70，80
91	$9a+b=91$	(0,91)(1,82)(2,73)(3,64)(4,55)(5,46)(6,37)(7,28)(8,19)(9,10)(10,1)
92	$9a+2b=92$	(0,46)(2,37)(4,28)(6,19)(8,10)(10,1)
93	$9a+3b=93\Rightarrow 3a+b=31$	同31，62
94	$9a+4b=94$	(2,19)(6,10)(10,1)
95	$9a+5b=95$	(0,19)(5,10)(10,1)
96	$9a+6b=96\Rightarrow 3a+2b=32$	同32，64
97	$9a+7b=97$	(3,10)(10,1)
98	$9a+8b=98$	(2,10)(10,1)
99	$9a+9b=99\Rightarrow a+b=11$	同11，22，33，44，55，66，77，88，99

評 語

將一個二位數表示成$aT+bU$的形式，並討論非十進位數的一些規則理論不難，但有創新，表現甚佳。