三位數的討論

國中組數學科第二名

台中縣立豐原國民中學　　作　者：謝欣芝、王惠珊、黃國順、張嘉珮
指導教師：魏忠信

一、研究動機

升上國中認識了代表數的符號，尤其對個位數與十位數對調的問題，有相當深刻的體會，例如原二位數與對調後所得新二位數之和必爲其數字之和的11倍，故予推廣探討三位數的有關討論。

二、研究目的

取一個三位數：

（例1）358將其數字順序重排，取其最大與最小整數853、358求其差得495，此一演算過程稱爲〝調換順序之差〞簡稱爲〝換序差〞。

（例2）將217依〝換序差〞來處理：

$$\begin{array}{r} 721 \\ -127 \\ \hline 594 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{經換序差}} \quad \begin{array}{r} 954 \\ -459 \\ \hline 495 \end{array}$$

即經二次〝換序差〞仍得495，且經〝換序差〞後所得之數字和爲18，及十位數字必爲 9 。

（例3）將992依〝換序差〞來處理：

$$\begin{array}{r} 992 \\ -299 \\ \hline 693 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 963 \\ -369 \\ \hline 594 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 954 \\ -459 \\ \hline 495 \end{array}$$

即經三次〝換序差〞仍得495，且經〝換序差〞後所得之數字和爲18，十位數字爲 9 。

上述中可看出495做〝換序差〞（954－459＝495）其結果仍爲495，特稱495爲〝最終所產生的定值〞，簡稱爲〝終值〞。

故(1)企圖檢驗是否所有的三位數經若干次〝換序差〞後皆可得495？

(2)是否可判定一個三位數，須經多少次的〝換序差〞才可得495？

(3)並檢驗在不以10爲底的進位體系中之三位數是否有此相同性質。

三、研究過程

一般的有序三位數abc（$a \geq b \geq c$，$a \neq c$）其〝換序差〞具有兩個重要的特性：

【特性A】：

$$\begin{array}{rl} & 100a+10b+c \\ -) & 100c+10b+a \\ \hline & 100(a-c)+0+(c-a)=99(a-c) \end{array}$$

【特性B】：

$$\begin{array}{rccc} & \text{百} & \text{十} & \text{個} \\ & \text{位} & \text{位} & \text{位} \\ & a & b & c \\ -) & c & b & a \\ \hline & x & y & z \end{array}$$

其中 $x=(a-1)-c$

$y=(10+b-1)-b=9$

$z=(10+c)-a$

經“換序差”所得三位數 → (1)數字和 $=x+y+z=(a-1-c)+9+(10+c-a)=18$

(2)十位數字 $=y=9$

(3)必爲99的倍數

現將利用〔特性A〕與〔特性B〕來處理以下相關問題：

［問題甲］是否所有的三位數經若干次〝換序差〞皆可得495？

若取一個三位數且每位數字皆相同者：

（例）555經 $\xrightarrow{\text{〝換序差〞}}$ 000，故每位數字皆相同的PPP不論經多少次〝換序差〞皆無法產生〝終值〞495，由此可知至少須有一位數字不同於其他兩位數字者才能討論。

取一個有序三位數abc（$a \geqq b \geqq c$，$a \fallingdotseq c$）

(一)abc與（abc+101）有相同的〝換序差〞

（例）964、863、762、661有相同的〝換序差〞

〔說明〕：根據〔特性A〕：

將abc 做“換序差”	將（abc+101）做“換序差”
$\begin{array}{rl} & 100a+10b+c \\ - & 100c+10b+a \\ \hline & 100(a-c)+0+(c-a)=99(a-c) \end{array}$	$\begin{array}{rl} & 100(a+1)+10b+(c+1) \\ - & 100(c+1)+10b+(a+1) \\ \hline & 100(a-c)+0+(c-a)=99(a-c) \end{array}$

所以abc與（abc+101）有相同的〝換序差〞。

【注意】經abc+101處理後須仍爲有序三位數。（可由問題乙得到解釋）

㈡abc與a（b+r）c有相同的〝換序差〞

（例）964、994、984、974、964、954、944皆有相同的〝換序差〞。

（說明）：根據〔特性A〕：

將abc 做“換序差”	將（abc+101）做“換序差”
$\begin{array}{rl} & 100a+10b+c \\ - & 100c+10b+a \\ \hline & 100(a-c)+0+(c-a)=99(a-c) \end{array}$	$\begin{array}{rl} & 100(a+1)+10b+(c+1) \\ - & 100(c+1)+10b+(a+1) \\ \hline & 100(a-c)+0+(c-a)=99(a-c) \end{array}$

所以abc與a（b+r）c有相同的〝換序差〞。

【注意】經a（b+r）c處理後須仍為有序三位數。（可由問題乙得到解釋）

（例）332 → 342而342本身不為有序三位數，故不可。

㈢由㈠、㈡可知只須檢驗百位數字為9與十位數字為9的有序三位數。即只須考慮99c來加以討論。

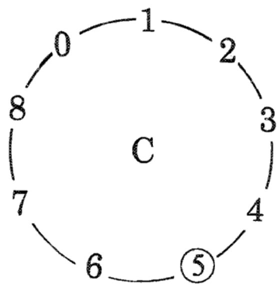
（例）751可利用（abc+101）與a（b+r）c之特性，故取993來討論即可。

因751與993經〝換序差〞之結果必相同，751－157＝993－399＝594

故就99c來討論，其中C＝0、1、2、3、4、5、6、7、8

根據【特性B】來處理：

$\begin{array}{rl} & 99c \\ - & c99 \\ \hline & xyz \end{array}$	$\Rightarrow \begin{cases} x=(9-1)-c=8-c \\ y=9 \\ z=(c+1)-9=c+1 \end{cases}$



即有序三位數經㈠、㈡可調整成99C

經〝換序差〞後得：

百位	十位	個位
(8－c)	9	(c+1)

而495之有序三位數為954，可經㈠、㈡調整成994

經〝換序差〞得：

即 C＝4

百位	十位	個位
(8－4)	9	(4+1)

仍為495

⇒ 即任意有序三位數經若干次〝換序差〞後必可得〝終值495〞。

［問題乙］是否可藉分類來判定那一類型的三位數經多少次的〝換序差〞才可得495？

由（甲）之㈠、㈡可知：只須檢驗百位數字爲 9 與十位數字爲 9 的三位數，故99c來討論，其中C＝0、1、2、3、4、5、6、7、8令K＝9－C（亦即K＝有序三位數的「百位數字－個位數字」）

（例）有序三位數751可利用（abc＋101）與a（b＋r）c之特性其〝換序差〞與993之〝換序差〞會相同，故可取993來討論，此時K＝百位數字－個位數字＝ 9 － 3 ＝ 7 － 1 ＝ 6

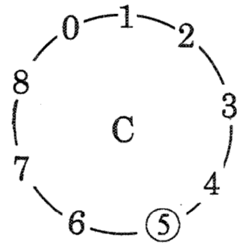
令n＝欲得到「終值495」所須處理的〝換序差〞之次數

k(即9－c)	範例							n(次數)
9	990		990 －099 891	981 －189 792	972 －279 693	963 －369 594	954 －459 495	5
8	991			991 －199 792	972 －279 693	963 －369 594	954 －459 495	4
7	992				992 －299 693	963 －369 594	954 －459 495	3
6	993					993 －399 594	954 －459 495	2
5	994						954 －459 495	1
4	995				995 －599 396	963 －369 594	954 －459 495	3
3	996			996 －699 297	972 －279 693	963 －369 594	954 －459 495	4
2	997		997 －799 198	981 －189 792	972 －279 693	963 －369 594	954 －459 495	5
1	998	998 899 099	990 －099 891	981 －189 792	972 －279 693	963 －369 594	954 －459 495	6

即由（甲）之㈢：

$$\begin{array}{r}99C\\-C99\\\hline xyz\end{array} \rightarrow \begin{cases}x=8-C\\y=9\\z=C+1\end{cases} \rightarrow$$

C可經C＋1之循環處理得5
即經〝換序差〞得「終值495」



【結論】當K≧5時，須處理〝換序差〞之次數n ＝K－ 4 ，才可得「終值495」

當K＜5時，須處理〝換序差〞之次數n＝7－K

（例）1.有序三位數741，K＝7－1＝6 ⇒ 須 2 次〝換序差〞

2.有序三位數765，K＝7－5＝2 ⇒ 須 5 次〝換序差〞

［問題丙］在不是10爲底的進位體系中是否仍有類似的特性：

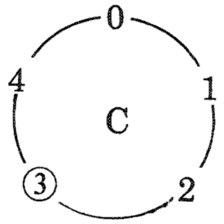
㈠以 6 爲底的有序三位數abc（a≧b≧c，a≒c）

k(即a－c)	範例					n（次數）
5	550		$\begin{array}{r}550\\-055\\\hline 451\end{array}$	$\begin{array}{r}541\\-145\\\hline 352\end{array}$	$\begin{array}{r}532\\-235\\\hline 253\end{array}$	3
4	551			$\begin{array}{r}551\\-155\\\hline 352\end{array}$	$\begin{array}{r}532\\-235\\\hline 253\end{array}$	2
3	552				$\begin{array}{r}552\\-255\\\hline 253\end{array}$	1
2	553		$\begin{array}{r}553\\-355\\\hline 154\end{array}$	$\begin{array}{r}541\\-145\\\hline 352\end{array}$	$\begin{array}{r}532\\-235\\\hline 253\end{array}$	3
1	554	$\begin{array}{r}554\\-455\\\hline 055\end{array}$	$\begin{array}{r}550\\-055\\\hline 451\end{array}$	$\begin{array}{r}541\\-145\\\hline 352\end{array}$	$\begin{array}{r}532\\-235\\\hline 253\end{array}$	4

〔結論〕1.以 6 爲底其〝終值〞爲253

2.以 6 爲底時，根據［甲］之㈠、㈡可知只須檢驗55C，根據［甲］之㈢

$$\begin{array}{r} 55C \\ -C55 \\ \hline xyz \end{array} \rightarrow \begin{cases} x=4-C \\ y=4 \\ z=c+1 \end{cases} \rightarrow$$



3.當$K \geqq 3$時，$n=k-2$

當$K<3$時，$n=5-K$

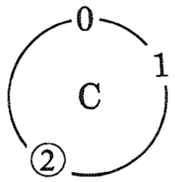
(二)以 4 爲底之有序三位數abc（$a \geqq b \geqq c$，$a \neq c$）

k(即a−c)	範例				n（次數）
3	330		330 −033 231	321 −123 132	2
2	331			331 −133 132	1
1	332	332 −233 033	330 −033 231	321 −123 132	3

〔結論〕1.以 4 爲底〝終值〞爲132

2.以 4 爲底時根據［甲］之(一)、(二)可知只須檢驗33C，根據［甲］之(三)

$$\begin{array}{r} 33C \\ -C33 \\ \hline xyz \end{array} \rightarrow \begin{cases} x=2-C \\ y=3 \\ z=c+1 \end{cases} \rightarrow$$



3.當$K \geqq 2$時，$n=K-1$

當$K<2$時，$n=4-K$

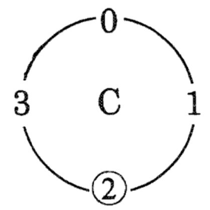
(三)以 5 爲底之有序三位數abc（$a \geqq b \geqq c$，$a \neq c$）

k(即a − c)	範例				n(次數)
4	440		$\begin{array}{r}440\\-044\\\hline 341\end{array}$	$\begin{array}{r}431\\-134\\\hline 242\end{array}$	2
3	441			$\begin{array}{r}441\\-144\\\hline 242\end{array}$	1
2	442		$\begin{array}{r}442\\-244\\\hline 143\end{array}$	$\begin{array}{r}431\\-134\\\hline 242\end{array}$	2
1	443	$\begin{array}{r}443\\-344\\\hline 044\end{array}$	$\begin{array}{r}440\\-044\\\hline 341\end{array}$	$\begin{array}{r}431\\-134\\\hline 242\end{array}$	3

【結論】1.以 5 爲底時其〝終值〞爲242 $\xleftrightarrow{\text{互相產生}}$ 143

2.以 5 爲底時，根據［甲］之(一)、(二)可知只須檢驗44C，根據［甲］之(三)

$$\begin{array}{r}44C\\-C44\\\hline xyz\end{array} \rightarrow \begin{cases}x=3-C\\y=4\\z=c+1\end{cases} \rightarrow$$



3.當$K \geqq 3$時，$n=K-2$

當$K<3$時，$n=4-K$

【綜合結論】

1.在以r爲底的進位體系之三位數中，經〝換序差〞所得三位數

⇒ ①數字和$=2(r-1)$

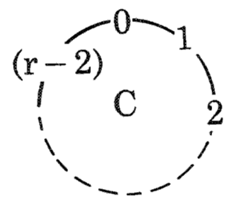
②中間位數字$=(r-1)$，其他兩位數之和$=r-1$

③必爲(r^2-1)之倍數

2.當r爲偶數時

終值＝

r^2	r^1	個位r^0
$\frac{r}{2}-1$	$(r-1)$	$\frac{r}{2}$



⇒ 可以就（r－1）（r－1）c作討論，其中C＝0,1,2,⋯⋯（C－2）利用「循環移位」的方式，可判定出所給的三位數須經若干次〝換序差〞才可求得「終值」。

當 $K \geqq \frac{r}{2}$ 時，$n = K - \left(\frac{r}{2} - 1\right)$

當 $K < \frac{r}{2}$ 時，$n = \left(\frac{r}{2} + 2\right) - K$

3.當r爲奇數時

終值＝

r^2	r^1	個位r^0
$\frac{r-1}{2}$	$r-1$	$\frac{r-1}{2}$

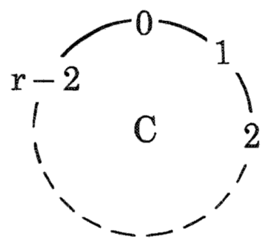
$\xleftrightarrow{\text{互相產生}}$

r^2	r^1	個位r^0
$\frac{r-1}{2}-1$	$r-1$	$\frac{r-1}{2}+1$

⇒ 可以就（r－1）（r－1）C作討論，其中C＝0、1、2、⋯⋯（C－2）利用「循環移位」的方式，可判定出所給的三位數須經若干次〝換序差〞才可求得「終值」。

當 $K \geqq \frac{r+1}{2}$ 時，$n = K - \frac{r-1}{2}$

當 $K < \frac{r+1}{2}$ 時，$n = \left(\frac{r-1}{2} + 2\right) - K$



評　語

討論三位數字的換序差藉循環移位的想法以決定一三位數字須經幾次換序差才能得到495這個終值，並將結果推廣到不以10爲底的數字系統中，雖這類問題已有不少人討論，但本作品仍獨具一格，頗有巧思是件極吸引人的作品。