棋盤上數學原理的研究

國中組數學科第一名

國立臺灣師範大學附屬高級中學國民中學部　　作　　者：陳明揚
指導教師：嚴宗增、鄭再添

一、研究動機

象棋、跳棋和圍棋都是我們常見到的遊戲，根據玩象棋的規則，將、士、象、卒都不能走遍棋盤上的每個位置，而車、馬、包則威力十足，尤其是車、包在棋盤上可以橫衝直撞，走遍每個位置，至於馬的走法，雖然只能走日步而無法隨意移動，但是仍然頗有威力而且可以走遍棋盤上每個位置，其中必然有些道理，尤其探討其中相關的數學道理，應該是既好玩又有意義。另外，從報章雜誌的報導，得知我國參加1993年第34屆國際數學奧林匹亞競試成績輝煌，並且在科教月刊163期第48頁至61頁中，看到有關這次競賽試題的解答與評析，發現在六道試題當中，有一道試題與玩棋有關，而且竟是六道試題當中最難的一題，我想解決這個玩棋問題的數學知識及方法，勢必不太容易，值得我們去探討研究。

二、研究內容及目的

本研究先嘗試解決第34屆國際數學奧林匹亞競試第3道試題（正方形棋陣問題），再思考研究其他相關內容的玩棋問題，例如：長方形的棋陣問題，正三角形格狀的棋陣問題，進而探討象棋盤上，與馬步移動方式相關的問題，再推廣到無限棋盤上跳m×n格的玩棋問題。我們所要研究的問題，分成下面六個主題來探討：

問題Ⅰ、正方形棋陣問題，（科教月刊第163期，第49頁）：

在一個無界限的棋盤上，採用如下的規則玩棋：開始時，n^2個棋子排在相連的n×n個小方格所形成的方塊上，每一棋子一個小方格，在這個遊戲中，每一次移動跨越一小格，將一個棋子橫向或直向跨越相鄰且放有棋子的小方格，而進入下一個小方格，但這個方格必須是沒有棋子；否則不被允許。而跨越的棋子將隨即被拿掉。求出所有的n值，依這樣的規則玩棋，致最後會僅剩下一個棋子在棋盤上。

問題Ⅱ、長方形的棋陣問題：

針對問題Ⅰ中，一開始長方形m×n個棋子，其餘條件及玩棋規則與正

方形棋陣一樣都不改變。求出所有的正整數m、n值，依這樣的規則玩棋，到最後會僅剩下一個棋子在棋盤上。

問題Ⅲ、正三角形的棋陣問題：

針對問題Ⅰ中，無界限的正三角形格狀棋盤，開始時，棋子排在相連的正三角形頂點的圓格上，最外圍排成每邊n個子的正三角形棋陣。玩棋規則除了移動方式爲沿著正三角形邊外（共有6個方向），其餘不變。求出所有的n值，依這樣的規則玩棋，到最後會僅剩下一個棋子在棋盤上。

問題Ⅳ、正六邊形棋陣問題：

針對問題Ⅲ中，一開始時，棋子排成最外圍每邊n個子，n層相連的正六邊形棋陣，其餘條件與玩棋規則不變。求出所有的n值，依這樣的規則玩棋，到最後會僅剩下一個棋子在棋盤上。

問題Ⅴ、象棋盤上馬步問題的推廣：

在象棋盤上，如果有一個棋子叫〝奇馬〞，每次跳m×n格到相鄰的m×n矩形對角的頂點，求所有的m、n值，依這樣的規則玩棋，此〝奇馬〞可以從象棋盤上的任何一個位置走遍到其他每一個位置。

問題Ⅵ、無限棋盤上跳m×n格的玩棋問題：

在一個無限的棋盤上，棋子每次跳m×n格，從原先放置的頂點走到相鄰的m×n矩形的對角頂點上，求出所有的正整數m、n值，依這樣的規則玩棋，可以從棋盤上的任何一個位置走遍到其他每一個位置。

本研究的主要目的就是尋找解決上面所列各問題的數學方法，並且討論一般棋陣的問題，特別是棋陣包含缺子的情形。

三、研究工具

1. 色筆、方格紙、直尺、棋盤及棋子（含象棋、跳棋、雙色棋），紙、筆、手腦並用。
2. 在研究過程中，所需參考資料及書籍的相關基本知識及數學方法：

(1)整數的奇偶性；　(2)模3的同餘式；
(3)輾轉相除法原理；　(4)數學歸納法；
(5)平面坐標及平面向量；　(6)染色技術；
(7)矛盾證法；　(8)整係數線性方程組的整數解。

四、研究過程

在本節中，將第二節六道問題，歸類成Ⅰ及Ⅱ，Ⅲ及Ⅳ，Ⅴ及Ⅵ三組主題，主要探討內容分爲實際操作過程、初步歸納及研究心得三部份，下面謹詳細敘述問題Ⅰ及Ⅱ主要研究過程，其他兩組僅簡述要點，詳見參考資料3：

㈠問題Ⅰ及Ⅱ：正方形與長方形的棋陣問題。

甲、實際操作過程：

利用棋盤、圍棋、方格紙實際操作，幫助瞭解問題，進而獲得初步答案，如圖4－1所示（打√表示在棋盤上最後可以僅剩一個棋子，打×則表示不可以，打？表示不確定，而打？※表示不確定但經過實際操作以後猜測不可以）。

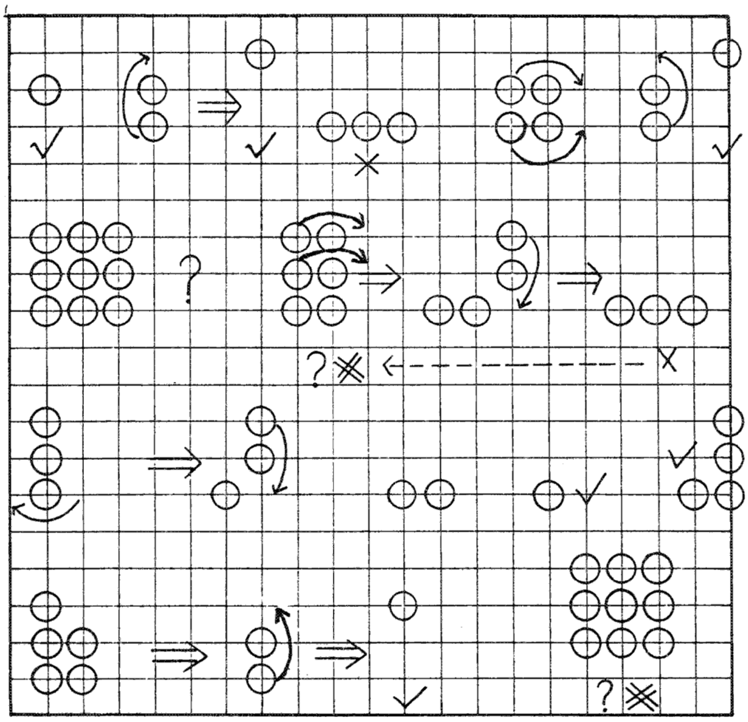

圖4－1　在方格紙上特殊棋陣操作方式

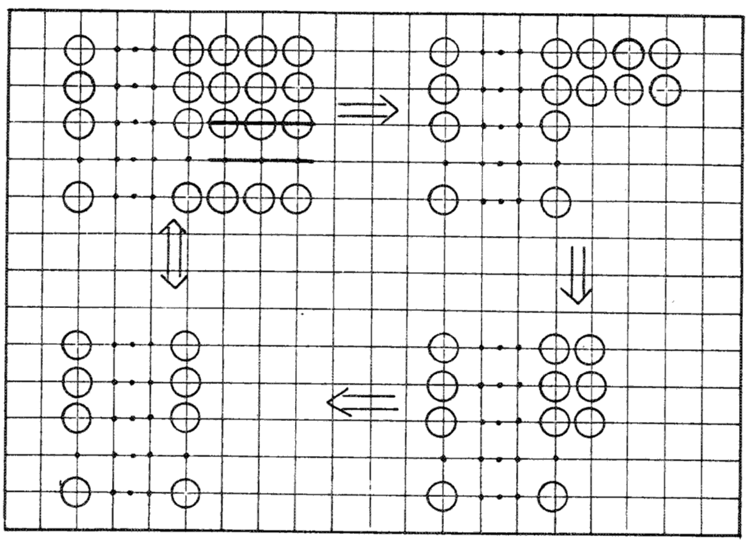

圖4－2　m×n的長方形棋陣減少3行或3列操作圖示

乙、初步歸納：

1.在1×1，1×2，及2×2形的棋陣中，依照玩棋規則，最後在棋盤上可以得到僅剩下一個棋子的結果。

2.在1×3，1×n（n≧4）形的棋陣中，依照玩棋規則，最後在棋盤上都無法得到僅剩下一個棋子。

3.在四個或五個棋子的L形棋陣中，依然玩棋規則，最後在棋盤上可以得到僅剩下一個棋子。

4.在2×3，3×3的棋陣中，經過實際操作可以變成1×3形的棋陣，在研究步驟中，猜測此棋陣無法最後僅剩下一個棋子；再經過實際操作所有可能想到的玩法，證實最後在棋盤上都無法僅剩下一個棋子。

丙、研究心得

1.在實際操作過程中，拆解四個或五個棋子L形棋陣的方法與科教月刊所刊載的袁新盛同學的解法相符合，在拆解2×3形棋陣的方法也跟吳宏五同學的解法一致。

2.可以利用拆解兩個2×3形棋陣的方法，將m×n形棋陣拆解成爲（m－3）×n或m×（n－3）或（m－3）×（n－3）形的棋陣，如圖4－2所示。

3.綜合初步歸納的內容及拆解m×n形棋陣到拆解3行或3列棋陣的心得，得到下面的結論：

當m，n都是大於1的整數，$3\nmid m$且$3\nmid n$時，在拆解m×n的長方形棋陣，依照玩棋規則，經過適當的拆解，最後在棋盤上可以僅剩下一個棋子。特別是當$3\nmid n$時，在拆解n×n正方形棋陣時，最後棋盤上可以僅剩下一個棋子。

4.由初步歸納得到的結論乙(4)及如圖4－2的拆解方式，在猜測拆解$3|m$或$3|n$時的長方形棋陣或正方形棋陣，依照玩棋規則，在棋盤上，將無法僅剩下1個棋子。

5.研究科教月刊中的刊載單中杰同學處理（3k）×（3k）棋陣而無法僅剩下一個棋子的〝矛盾證法〞，改進單同學的解題方式：

將棋盤視爲平面直角坐標，棋子放在m×n個相連的矩形棋盤的任何一個格點上，並且在這個平面

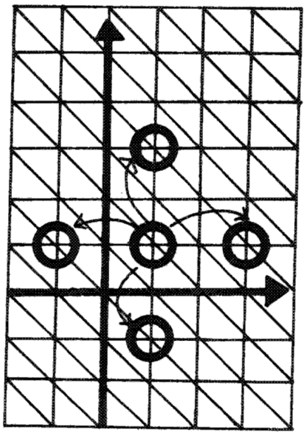

圖4－3　方格上玩棋操作規則圖示

上畫出一組顏色依序爲綠、紅、藍的平行線，綠、紅、藍分別爲格子點的坐標和可被3整除，被3除餘1，被3除餘2所連成的線，如圖4－3所示。先走一步棋子，觀察各色線上棋子數變化的狀況，得知每跳一子，兩種顏色中的棋子會各少一子，而另一種顏色的棋子會多了一子。

6.令G表示棋盤上所有綠色線上綠色棋的總數。
R表示棋盤上所有紅色線上紅色棋的總數。
B表示棋盤上所有藍色線上藍色棋的總數。
由於G±1、R±1、B±1的奇偶性恰好分別與G、R、B的奇偶性相反，依照玩棋規則，每移動一子，G、R、B的奇偶性都恰好改變，而棋盤上只有1子的三種顏色G、R、B的總數，必定呈現一奇數二偶數的狀況。利用矛盾證法，可以知道G、R、B爲全部奇數或全部偶數的棋陣時，無法得到最後僅剩下一子的狀況。

7.在（3k）×（3k）棋陣拆解到最後無法僅剩一子，可用如同上例的染色技術來說明：
(1)計算棋陣中，G、R、B的數目，得到結果如表4－1：

	G	R	B	奇偶個數	結論
1×3	1	1	1	3奇	×
2×3	2	2	2	3偶	×
3×3	3	3	3	3奇	×

表4－1

(2)在拆解m×n棋陣成爲（m－3）×n或m×（n－3）或（m－3）×（n－3）的棋陣步驟中，可以用每次同時拆掉三種顏色各一個棋子的方式，獲得在棋盤上三種顏色棋G、R、B的總數，各個奇偶數恰好相反，因此應用到（3k）×（3k）的正方形棋陣逐次拆解成3×3的正方形棋陣時，原先在棋盤上棋數的G、R、B的奇偶性和最後3×3的奇偶性或者分別完全一樣，或者分別完全相反，因此由表4

－1得知，在拆解（3k）×（3k）形的棋陣時，在棋盤上最初G、R、B的棋子數爲全奇數或全偶數時，可利用這樣的規律性來判斷，依照玩棋規則，在棋盤上無法得到最後僅剩下一子的結果。得知在拆解（3k）×（3k）的棋陣原先的G、R、B的棋數爲全奇數或全偶數時，都無法得到最後僅剩下一子的結果。

8.仿6，7的方法用染色技術同樣證得：

當$3|m$或$3|n$時，在拆解$m\times n$長方形棋陣時，依照玩棋規則，在棋盤上無法得到最後僅剩下一個棋子的結果。

㈡問題Ⅲ及Ⅵ：正三角形與正六邊形的棋陣問題。

甲、實際操作過程：和㈠甲類似，但玩棋操作有六個方向，如圖4－4所示。

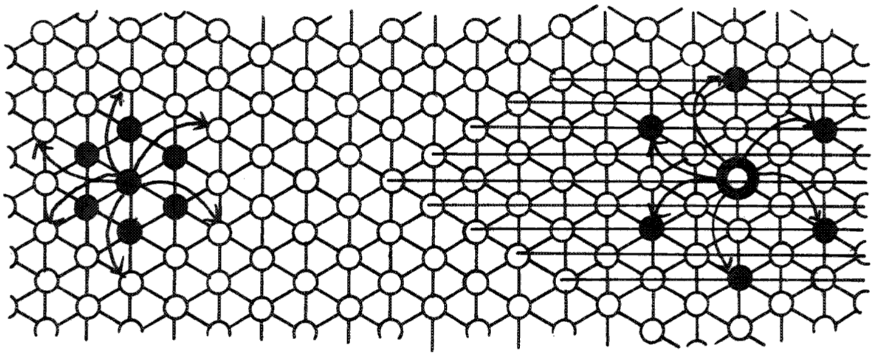

圖4－4：正三角格狀棋盤上玩棋操作圖示

乙、初步歸納：

猜測問題Ⅲ正三角形棋陣最後可僅剩下一個子的n值

$\Leftrightarrow \quad n=1, 4, 7, \cdots 3k+1, \cdots\cdots$，

即$n=1 \pmod 3$。

丙、研究心得：

1.證明$n=3k+1$的正三角形棋陣猜測結果的正確性：在正三角形格狀棋盤上操作，雖然移動方向多了，但仍然跟上面㈠之研究心得丙1、2一樣，得到類似的結果：

①在四個或五個子的斜L形的棋陣中，依照玩棋規則，都可以得到在棋盤上最後僅剩下一個棋子的結果。

②當$n=1 \pmod 3$，設$n=3k+1$時，可依序從最外圍每次拿到3種顏色各1個棋子，共拿3k次，總共拿掉9k個棋子，而剩下裡層爲每邊$3(k-1)+1=3k-2$的正三角形棋陣，依照此種玩棋規則經過實際操作最後得到$n=1$的情形。

2.利用數學歸納法進一步說明在$n\equiv 0$或$2 \pmod 3$的正三角形棋陣中，依

照玩棋規則，都無法在棋盤上得到最後僅剩下一個棋子的結果：

以$n=3k-1$爲例：

①當$k=1$時，$n=2$，$G=R=B=1$，確定在棋盤上最後不可能僅剩下一個棋子，即$k=1$時正確。

②設$k=m$時正確，此時$G=R=B=m(3m-1)\div 2$，則當$k=m+1$時，跟$k=m$時比較，共增加了

$$3m+(3m+1)+(3m+2)=9m+3$$
$$=3(3m+1)\text{個棋子}$$

而每種顏色都增加了$3m+1$個棋子。所以當

$n=3m+2$時的

$$G=R=B=m(3m-1)\div 2+(3m+1)$$
$$=(3m+2)(m+1)\div 2$$

因此G、R、B的棋數爲全奇數或全偶數，因此無法最後在棋盤上僅剩下一個棋子。

3.當$n\geqq 4$時，可以將外圍三層，依每次拆除 3 個子（三種顏色各一個），拆解到棋盤上正六邊形的棋陣最外層每邊（$n-3$）個棋子爲止，就得到如同問題Ⅳ中當正六邊形的棋陣最外圍爲 n 個棋數時，依照玩棋規則，最後得到可以僅剩下一個棋子的 n 值 $\Leftrightarrow$ $n=0$或$1\ (\mathrm{mod}\ 3)$的結果。

㈢問題Ⅴ及Ⅳ：象棋盤上馬步移動的推廣及無限棋盤上走$m\times n$格的玩棋問題：

甲、實際操作過程：在 8 × 9 的象棋盤上實際操作每一個棋子走到左下角所需的步數，如圖4－5所示。

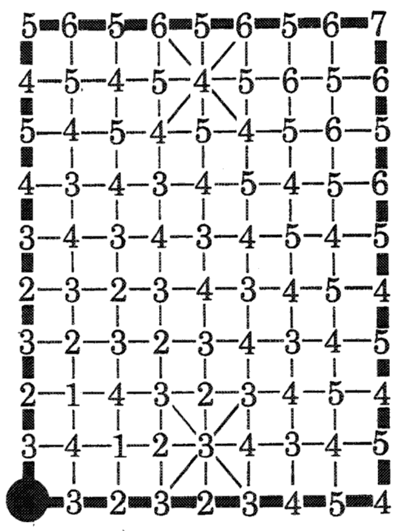

圖4－5　每一個棋子走到左下角所需的步數

乙、初步歸納：由實際操作得到答案的數學規律，詳見參考資料 3.。

丙、研究心得：用坐標向量方法，證明所歸納的規律，詳見參考資料 3.。

五、研究成果

本研究的主要成果解決了研究內容中的一連串問題；我們可以將以上各問題的答案，用下列簡表5－1來描述：

問題	主　題	符合問題的解答
Ⅰ	正方形棋陣	n為所有不能被3整除的正整數
Ⅱ	長方形棋陣	（m、n）為〝（1、2）或（2、1）〞或m、n都大於1且都不能被3整除的正整數
Ⅲ	正三角形棋陣	n為所有被3除餘1的正整數
Ⅳ	正六邊形棋陣	n為所有可被3整除或除後餘1的正整數
Ⅴ	象棋盤上馬步推廣	m×n為2×1，2×3，2×5，3×4，4×5共5對
Ⅵ	無限棋盤上走m×n格的問題	m，n互質且m＋n為奇數

表5－1

六、心得與討論

㈠心得

1.本作品大部分透過直接觀察及實際操作，由特例出發，找出數學的規律性，再猜測及歸納答案，進而用適當的方法找出解題線索，並且用數學原理說明問題答案的完整理由。

2.用染色技術配合直接觀察及實際操作，容易得到解題思考的方向，問題Ⅰ～Ⅳ的一連串解題過程及方法，相當具有創意性，而且答案的數學模型也是很有趣。

3.在象棋盤上思考特例走法，獲得正確答案的線索，進而引用簡易向量或坐標的方法求得完整的說明，屬於很有成就感的發現。

(二)討論

還有許多數學上的問題，可以利用本作品中所研究的方法及成果，加以更進一步的探討，尤其是用染色技術的原理，依照本研究的玩棋規則，棋陣各色棋G、R、B的總數三者全是偶數或全是奇數時，就可以判定無論是那一種棋陣，最後都無法僅剩下一個棋子。

七、參考資料

1.陳昭地（民82年），一九九三年第三十四屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析，科學教育月刊，第163期（82年10月），48～72。

2.趙文敏（民70年），寓數學於遊戲（第一輯），九章出版社，第15頁。

3.陳明揚（民83年），寓數學於遊戲……棋盤上玩棋的數學模型之探究，（台北市八十二學年度中等學校學生科學研究計畫報告）。

評　語

作者從競試、科展、參考書籍中尋找研究問題，並能將原問題加以推廣。對於將數學歸納法運用在有限數學領域的技巧非常純熟，這些證據顯示作者在研究的功力約有高一學生的能力，雖然作者現在僅爲國一生。