

# 改良滑車實驗驗證 $F = m \cdot a$ 與不同加速度 下鋼球擺動週期改變情形研究

## 國中組物理科第三名

台北縣立福和國民中學

作者：歐婉菁、歐陽卓英、黃屏倫  
指導教師：張振芳、郭家山

### 一、研究動機

理化課中曾提到在小角度擺動下，單擺週期僅與擺長有關，經我們請教老師後得知，原來這個結果是根據  $T = 2\pi\sqrt{L/g}$  公式而來的。仔細研究一下，在地球表面  $g$  為定值，所以課本中就給了我們“單擺週期僅與擺長有關”的結論。如果能使單擺沿著重力的方向作加速度運動，則單擺公式將修正為  $T = 2\pi\sqrt{L/(g \pm a)}$ 。於是我們修正傳統滑車實驗，可研究不同垂直加速度環境下鋼球擺動週期改變的情形並驗證牛頓第二運動定律。在此實驗中利用電腦處理數據更結合電腦內部時鐘，以最普遍的現代科技輔助測量時間。

### 二、研究目的

- (一) 充分利用在學校所學的電腦學理，應用在課程上。
- (二) 利用電腦，改善滑車實驗中因人體目視及碼錶計時所造成的誤差。
- (三) 利用本實驗提供的加速環境下研究在垂直加速度改變時，鋼球擺動週期實驗值與理論值比較。

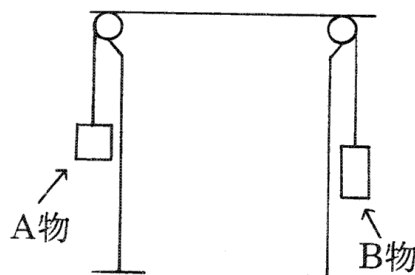
### 三、實驗理論探討

第一部分：改良滑車實驗驗證  $F = m \cdot a$

- (1) 修正如右圖(一)
- (2) 若A物重  $m_a$ ，B物重  $m_b$ 
  - (a) 當  $m_a = m_b$  時為靜止
  - (b)  $m_a > m_b$  時  $m_a$  與  $m_b$  共受力

$$F = (m_a - m_b) \cdot g$$

$$(g \text{ 為重力加速度}) \Rightarrow a = \frac{(m_a - m_b)g}{m_a + m_b} \quad (a \text{ 為 } m_a \text{ 及 } m_b \text{ 加速度})$$



(圖一)

若將 $m_b$ 中移出部份質量 $m_c$ 至 $m_a$ 中則全部質量共受力為

$$F = (m_a - m_b + 2m_c) \cdot g \Rightarrow a = \frac{F}{m_a + m_b} = \frac{(m_a - m_b + 2m_c) \cdot g}{m_a + m_b}$$

則可驗證  $a \propto F$  (總質量 $m_a + m_b$ 為定值)

(3)當 $m_a > m_b$ 時,  $a = \frac{(m_a - m_b) \cdot g}{m_a + m_b}$  若同時在A及B物中分別加入質量W

$$\text{則 } a = \frac{(m_a - m_b) \cdot g}{(m_a + m_b + 2w)} \rightarrow \text{可證明 } a \propto \frac{1}{m} \text{ (外力 } F = (m_a - m_b) \cdot g \text{ 爲}$$

定值)

第二部份：由改良的滑車實驗驗證擺動中鋼球在作加速度為 $a$ 的上升運動或下降運動時週期的變化情形

(1)單擺是指一個理想質點懸掛在沒有質量的弦或桿上，此時單擺週期

$$T = (2\pi\sqrt{L/g}) \cdot (1 + \frac{1}{2^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2^2} \frac{3^2}{4^2} \sin^4 \frac{\theta}{2} + \dots)$$

$L$ 為弦綜長度， $g$ 為重力加速度， $\theta$ 為振幅

當振幅 $\theta$ 很小時 $\sin(\theta/2) \div 0$ ，所以 $\theta < 10^\circ$ 時單擺週期可改寫為

$$T = 2\pi\sqrt{L/g}。$$

(2)任何物體 $m$ 以加速度 $a$ 上升時，因慣性力與重力同時作用，物體感受向下力量 $F = m \cdot (g + a)$ ， $g$ 為重力加速度。同理，當物體 $m$ 以加速度 $a$ 下降且 $g > a$ 時，則物體感受到向下力量 $F = m \cdot (g - a)$ 。所以，當擺長為 $L$ 的單擺，在作(1)振幅擺動並以加速度 $a$ 上升時則週期應修正為 $T =$

$$2\pi\sqrt{L/(g+a)}。 \text{承上所述，若單擺以加速度 } a \text{ 下降且 } g > a \text{ 時，則週期應修正為 } T = 2\pi\sqrt{L/(g-a)}。$$

(3)任何能在鉛直面上，因重力作用而自由擺動的鋼體都叫複擺，而單擺只是複擺的理想情形。當半徑為 $R$ 的圓球，以極輕弦線長度為 $L$ 懸吊，作小振幅擺動時需將單擺週期更正為

$$T = (2\pi\sqrt{L'/g}) \cdot (1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{L'^2})^{\frac{1}{2}}$$

$$L = R + L \text{ (當 } R \ll L \text{ 時 } L' \div L)$$

若將此擺動的圓球以加速度 $a$ 上升則週期更正為

$$T = (2\pi\sqrt{L'/(g+a)}) \cdot (1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{L'^2})^{\frac{1}{2}} \text{ (參考第(2)項)}$$

若將此擺動的圓球以加速度 $a$ 下降則週期更正為

$$T = \left( 2\pi\sqrt{L' / g - a} \right) \cdot \left( 1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{L'^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{參考第(2)項})$$

#### 四、研究設備器材

- (一)滑車設備 改良滑車設備二套、滑輪二組、砝碼數個。
- (二)電路系統 接觸器三套、焊接三個相對按鍵電路之滑鼠一個，連接線數條。
- (三)電腦設備 電腦一部、系統磁片。
- (四)單擺設備 鋼球擺一組。

#### 五、研究過程

##### (1)改良滑車實驗驗證 $F = m \cdot a$

實驗 1 總質量固定，測量受力大小與加速度的關係

勺：在二組左右直立軌道中，右側軌道上取O、A、B三點， $\overline{OA}$ 距離為  $S_1$ ， $\overline{AB}$ 距離為  $S_2$ 。

夕：分別將“起始計時接觸線”黏在A處，“將終止計時接觸線”黏在B處（如圖二）。

冂：將迴路線二條分別固定於右側軌道滑車底部左右，當迴線碰觸A處接觸線時電腦開始計時，另一迴線碰觸B處時電腦停止計時。

匚：進入電腦檔案中，依電腦指示動作。

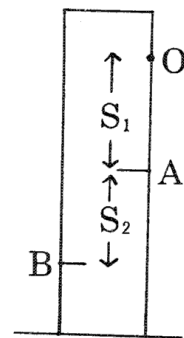
勿：在右側軌道滑車中放入1000g砝碼並以棉線經滑輪連接二滑車（如圖三）。

去：將左側軌道滑車下拉使右側軌道滑車上升至O點，以O點為起點釋放滑車，使滑車通過A、B二點，記錄滑車通過時間及加速度，重複數次。

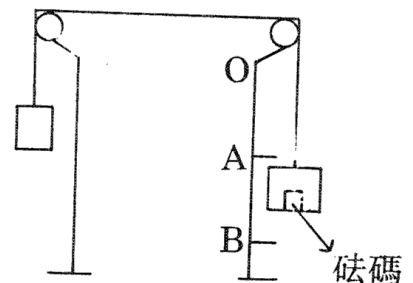
3：將右側滑車上砝碼減少100g，在左側滑車上加100g，重複步驟去，直到左側滑車為600g為止。

實驗 2 在固定拉力下，總質量與加速度的關係

勺：進入電腦檔案，依指示操作。



(圖二) 右側軌道示意圖



(圖三) 實驗裝置示意圖

ㄨ：右側軌道滑車中放入300g砝碼，以棉線經滑輪連接二滑車。

ㄐ：重複實驗 1 中步驟ㄨ。

ㄒ：將右側滑車及左側滑車同時增加100g，重複實驗 1 中步驟ㄨ，直到右側滑車內砝碼增為800g為止。

## (2)不同垂直加速度下鋼球擺動週期的改變情形

實驗 1 探討鋼球在加速前的週期及上升加速度運動中週期變化。

ㄅ：將右側軌道裝置如第一部分實驗。

ㄨ：鋼球懸吊於左側軌道滑車中

ㄐ：在右側軌道滑車中加入300g砝碼（左側軌道滑車中鋼球重110g）。

ㄒ：進入電腦檔案依指示操作。

ㄨ：將左側軌道滑車下拉，使右側軌道滑車上升至O點並啟動鋼球。

ㄨ：在電腦測得加速前鋼球週期數次後釋放滑車使滑車通過A、B二點，記錄滑車加速度、鋼球在加速前平均週期及加速後平均週期，並重複數次。

ㄨ：將右側軌道滑車中砝碼增加100g以改變加速度，重複步驟ㄨ、ㄨ直到右側軌道滑車內砝碼增為500g為止。

ㄨ：改變擺長重複步驟ㄒ、ㄨ、ㄨ、ㄨ。

實驗 2 測量鋼球在加速前的週期及下降加速度運動中週期變化。

ㄅ：將第一部份實驗中A、B位置互換，並將O點移至A點下方，起始計時接觸線黏於A處，終止計時接觸線黏於B處。

ㄨ：實驗裝置同前。

ㄐ：在右側軌道滑車中加入10g砝碼（左側滑車中鋼球重110g）。

ㄒ：進入電腦檔案，依指示操作。

ㄨ：將左側軌道的滑車上升，使右側軌道滑車下降至O點並啟動鋼球擺動。

ㄨ：在電腦測得未加速鋼球擺動週期數次後釋放滑車，使滑車通過A、B二點，記錄滑車加速度、鋼球在加速前平均週期及加速後平均週期，並重複數次。

ㄨ：將右側軌道滑車中砝碼增加20g以改變加速度，重複步驟ㄨ、ㄨ直到右側滑車內砝碼增為50g為止。

ㄨ：改變擺長重複步驟ㄒ、ㄨ、ㄨ、ㄨ。

## 六、數據

(1)改良滑車實驗驗證  $F = m \cdot a$

實驗 1 總質量固定，測量受力大小與加速度a的關係 總質量 = 1550g						
S <sub>1</sub> (cm)	S <sub>2</sub> (cm)	滑車與砝碼總重(g)		測量值 a (cm/S <sup>2</sup> )	平均值 a (cm/S <sup>2</sup> )	理論值 a (cm/S <sup>2</sup> )
		左	右			
5	30	290	1260	585.94	587.77	613.29
				585.94		
				591.43		
5	30	390	1160	385.69	370.93	486.84
				355.56		
				371.54		
	40			374.08	374.08	
				374.08		
				374.08		
5	30	490	1060	355.56	321.47	360.38
				355.56		
				253.30		
	40			278.47	274.21	
				278.47		
				265.70		
5	30	590	960	188.56	199.83	233.94
				222.37		
				188.56		
	40			212.36	208.53	
				206.61		
				206.61		
5	30	690	860	74.24	81.18	107.48
				77.02		
				89.21		
	40			77.59	71.08	
				67.82		
				67.82		

說明：由實驗(1)結果可以看出——當總質量固定時，拉力越大則加速度越大

實驗 2 在固定拉力下，總質量與加速度a的關係  
拉力F固定為270克重

S <sub>1</sub> (cm)	S <sub>2</sub> (cm)	滑車與砝碼總重(g)		測量值 a (cm/S <sup>2</sup> )	平均值 a (cm/S <sup>2</sup> )	理論值 a (cm/S <sup>2</sup> )
		左	右			
10	40	290	560	285.77	285.77	311.29
				285.77		
				285.77		
10	40	390	660	213.86	215.43	252.00
				212.73		
				219.63		
10	40	490	760	201.94	189.97	211.86
				201.94		
				166.04		
10	40	590	860	158.56	158.56	182.48
				158.56		
				158.56		
10	40	690	960	127.27	127.10	160.36
				127.27		
				126.75		
10	40	790	1060	126.75	119.05	143.03
				103.64		
				126.75		

說明：由實驗(2)結果可以看出——總力固定下，總質量愈大則加速度愈小

(2)不同垂直加速度下鋼球擺動週期的改變情形

實驗 1 測量未加速時鋼球擺動的週期 T			
擺長L (cm)	實驗值 (秒)	平均值 (秒)	理論值 (秒)
4.5	0.511	0.500	0.496
	0.491		
	0.497		
8	0.626	0.626	0.620
	0.621		
	0.631		
9.5	0.668	0.666	0.667
	0.668		
	0.663		
14	0.790	0.791	0.791
	0.794		
	0.790		
16	0.840	0.845	0.840
	0.842		
	0.852		

說明：(1)起始擺角維持定值

(2)由實驗(1)結果可知，以此裝置測未加速時鋼球擺動週期的實驗值與理論值非常接近，因此可以支持我們在鋼球作等加速度運動時，所得到鋼球擺動週期的可靠性。

實驗 2 測量鋼球在上升等加速度運動中的週期變化 $T_1 =$ 加速前週期 $T_2 =$ 加速中週期			
$T_1$ 實驗值 (秒)	加速度 $a$ ( $\text{cm}/\text{S}^2$ )	$T_2$ 實驗值 (秒)	$T_2$ 理論值 (秒)
0.491	193.67	0.444	0.447
0.511	124.61	0.492	0.481
0.497	111.14	0.471	0.466
0.655	124.61	0.605	0.617
0.655	61.31	0.635	0.635
0.668	53.71	0.655	0.650
0.782	108.07	0.755	0.751
0.798	80.56	0.773	0.767
0.781	73.07	0.758	0.753
0.852	77.70	0.818	0.820
0.842	56.98	0.819	0.819
0.840	43.52	0.799	0.821

說明：(1)起始擺角維持定值

(2)由實驗(2)結果可知，當鋼球作向上等加速度運動時，加速中鋼球擺動的週期 $T_2$ 必小於加速前的週期 $T_1$

實驗 3 測量鋼球在下降等加速度運動中的週期變化 $T_1 =$ 加速前週期 $T_2 =$ 加速中週期			
$T_1$ 實驗值 (秒)	加速度 $a$ ( $\text{cm}/\text{S}^2$ )	$T_2$ 實驗值 (秒)	$T_2$ 理論值 (秒)
0.663	137.63	0.706	0.715
0.656	120.31	0.718	0.700
0.668	73.74	0.690	0.695
0.789	102.55	0.820	0.834
0.790	63.97	0.819	0.817
0.784	63.81	0.799	0.811
0.820	94.36	0.871	0.863
0.826	63.23	0.874	0.853
0.829	63.23	0.874	0.853

說明：(1)起始擺角維持定值

(2)由實驗(3)結果可知，當鋼球作向下等加速度運動時，加速中鋼球擺動的週期 $T_2$ 必大於加速前的週期 $T_1$



## 七、討論

1. 實驗中測得鋼球未加速前週期的實驗值為 $T$ ，此時若鋼球以加速度 $a$ 上升或下降，則加速運動中週期理論值 $T_1 = T \cdot \sqrt{g / (g \pm a)}$ ，因為影響未加速週期 $T$ 的變因也持續影響加速運動中的週期，當以 $T$ 作為 $T_1$ 換算標準時，唯一改變週期的變因就只有加速度了。
2. 測量鋼球擺動週期方式的探討：
  - ㄅ：鋼球底部正下方有一接觸計時的銅片連接電腦，而鋼球底部中央黏一根極細銅絲作為迴路，當銅絲碰觸銅片二次之間的時間即為半週期，再由電腦換算成一週期。
  - ㄆ：當鋼球擺動時，鋼球底部銅絲接觸到計時銅片會產生阻力，但由未加速時鋼球擺動週期的實驗數據顯示，此阻力對週期影響不大。
  - ㄇ：當滑車靜止時，啟動鋼球擺動，電腦即判定目前所測出的週期皆為鋼球未加速時的週期。當電腦測得數次，未加速的週期後立即操作滑車，使其作等加速度運動。當滑車接觸“起始計時接觸線”瞬間，電腦開始測量滑車通過 $\overline{AB}$ 的時間，並判定現在鋼球的週期為等加速運動中的週期，在滑車碰觸“終止計時接觸線”瞬間即全部計時完畢。電腦將顯示出鋼球未加速時的平均週期，加速中的平均週期及加速度大小。
  - ㄏ：在加速過程中開始計時的一瞬間，如果鋼球位置不在最低點，則加速後得到第一個週期時間不準確。所以在計算加速運動中的平均週期時，都將開始加速後測得的第一個週期捨棄。
  - ㄏ：在滑車加速過程中開始計時前，滑車已經過 $\overline{OA}$ 距離，而滑車須至 $A$ 處時電腦才將得到的週期判定為加速後鋼球擺動週期，所以在經過 $\overline{OA}$ 得到的週期仍判別為加速前鋼球擺動週期，為避免此一誤差，故在計算加速前週期的平均值時都將加速前測到的最後一個週期捨棄。
  - ㄏ：在啟動鋼球擺動時，最初擺動週期會因擺動不穩定造成訊號無法輸入或週期產生誤差，因此實驗過程中，需要在啟動鋼球並擺動數次後，才由電腦讀取數次未加速時週期，然後再操作滑車讀取加速中週期。

## 八、結論

本實驗最大特點在於改良理化課本中滑車實驗裝置，且將“改良後滑車實驗裝置”，“測量單擺週期實驗”與“電腦計時方法”三者相結合；同步測量出單擺擺動在等加速度運動中單擺的加速度及週期。在研究“單擺在等加速度運動中

週期變化的情形”時，我們充份將理化課本的實驗推廣應用，並且突破以手動計時無法測量運動中單擺週期的困境。

## 九、參考資料

- |                       |       |
|-----------------------|-------|
| (一)大學物理學              | 李怡嚴著  |
| (二)國中理化課本第二冊          | 國立編譯館 |
| (三)最新物理手冊             | 盧喜瑞譯  |
| (四)PC / XT / AT系統BIOS | 石南 譯  |

## 評 語

研製類似Atwood's Machine的裝置並加應用，以量測單擺在加速坐標系中之擺動頻率。本作品實驗過程充分利用電腦，就國中生水準而言，頗為嚴謹，所得結果，亦稱正確。