

向上爬！—探討無動力之錐體在坡道上如何爬坡

國中組物理科第三名

新竹市立光華國民中學

作者：林耀中、陳冠文

指導教師：鄭清鏡、郭素妙

一、研究動機

在理化課程第十三章的簡單機械這一單元中，學習到斜面省力的原理，並探討功—能定理。在課堂上，老師就此提出學長曾經研究的主題——「登坡的車子」——引發起我對這個實驗的研究動機與興趣，於是在資優班的專題研究報告中，針對「登坡的車子」再行探討——為何能爬坡？爬坡的條件如何？爬坡的過程中重心偏移及動量變化情形又如何？針對系統而言是否遵循功—能定理？於是在老師的指導下，並查閱各相關書籍，做下列之理論及實驗的探討。

二、研究目的

(一)理論探討——錐體爬坡的條件。

- (A) 錐體錐角與軌道斜角及坡度斜角變化的相關性。
- (B) 質量均勻之錐體其爬坡時重心變化之探討。
- (C) 質量均勻之錐體其爬坡時能量變化之探討。

(二)實驗探討—設定特殊角之錐體與坡度之測試。

- (A) 就不同之特殊角，錐體移動之加速度與重心偏移之相關性。
- (B) 測定轉動頻率變化量，並探討系統位能之變化。
- (C) 驗證是否符合功—能定理。

三、研究過程

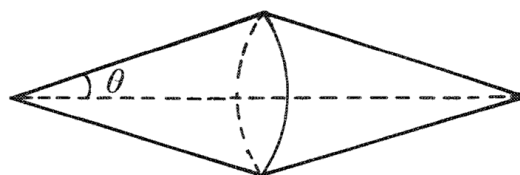
(一)理論探討—錐體爬坡的條件。

1.圖(一)是錐體其錐角 θ

圖(二)是軌道，軌道夾角 ψ 〔(二)—a〕

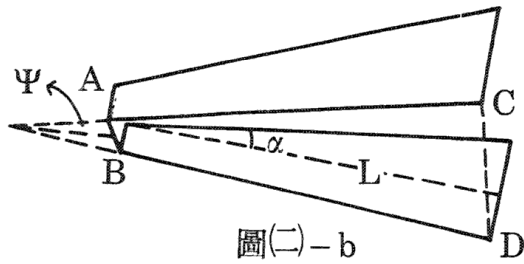
坡度斜角 α 〔(二)—b〕

- (1)錐體在爬坡時，若在軌道上塗上墨汁則在錐體上即可留下滾動時之軌跡（如圖三）

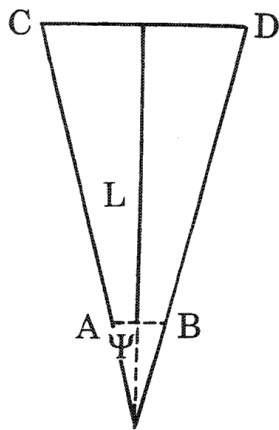


圖(一)

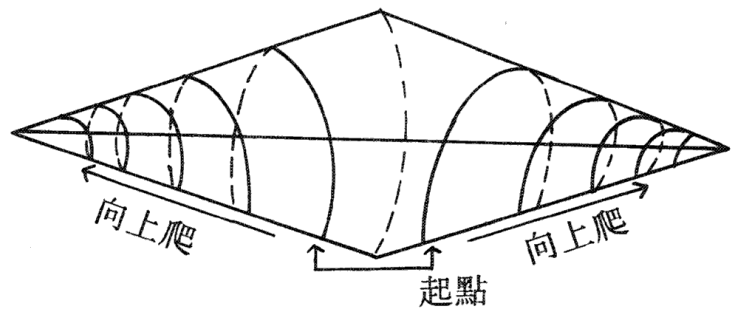
註：滾動時以軌道 \overline{AB} 為起點 \overline{CD} 為終點。



圖(二)-b



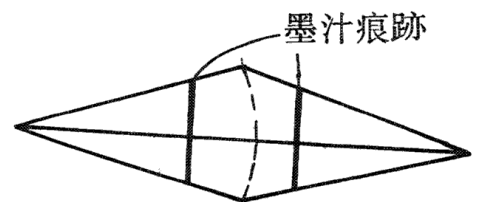
圖(二)-a



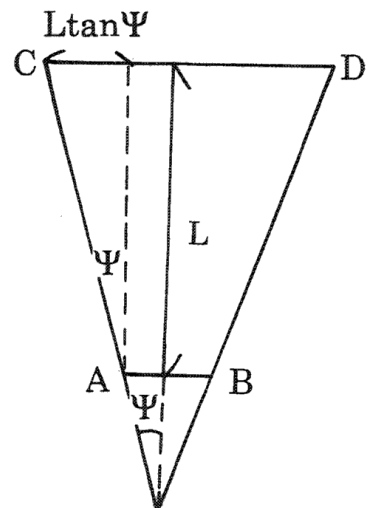
圖(三)

由此可見，錐體在爬坡的過程中，是由錐體之斜面的高處往低處移動，且軌跡呈螺旋狀。如此，在不同錐角和軌道夾角及坡度斜角下，在錐體表面留下的軌跡是不相同的。以下針對墨汁痕跡的探討。

(a) 因為滾動的起點是由軌道的 \overline{AB} 至 \overline{CD} ，因為 $\overline{AB} < \overline{CD}$ 則在軌道和錐體的接觸點也是由窄變寬。



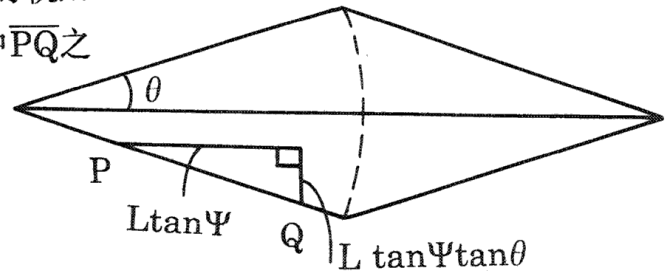
(b) 若軌道夾角 $\psi = 0^\circ$ 即 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，則軌跡只在同一接觸點上，如此，錐體是無法上坡的，若借助推力只能在錐體表面形成單環之變化。(如圖)



圖(四)

(c) 若 $\overline{AB} > \overline{CD}$ 則錐體在此狀況下是不能爬坡的。此因軌跡是無法向錐體表面上的斜坡上移的。

(2) 錐體若由 \overline{AB} 水平移動至 \overline{CD} 時，如圖(四)，其水平位移 L ，而在錐體上的軌跡與其軌道接觸點的位移 \overline{PQ} ，其中 \overline{PQ} 之水平分量為 $L \tan \psi$ ，垂直分量為 $L \tan \psi \tan \theta$ 如圖(五)。



圖(五)

(3) 錐體若由 \overline{AB} 以斜角 α 之坡度上升至 \overline{CD} 時則錐體在移動 L 距離後，相對向上垂直位移為 $L \tan \alpha$ ，故對錐體而言其軌跡垂直相對位移為向下移動了 $L \tan \psi \tan \theta - L \tan \alpha$ 的距離。

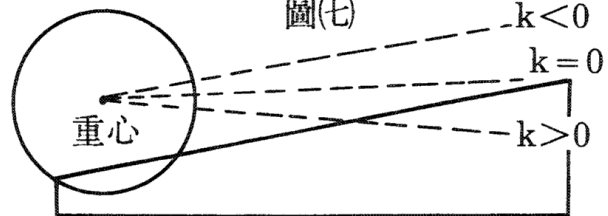
$$\text{令 } L(\tan \psi \tan \theta - \tan \alpha) = K.$$

2. 探討重心變化與能量變化，就質量均勻的錐體而言，其重心位於幾何中心的位置，而就整個錐體而言， K 值即為其重心的相對位移。

如此錐體在爬坡時有三種預見的情況。

如圖(4)

(1) $K > 0$ ，即 $\tan \psi \tan \theta - \tan \alpha > 0$
 $\tan \psi \tan \theta > \tan \alpha$



圖(七)

在此條件下，錐體在滾動過程中重心位置下降，位能減少動能增加，故錐體將獲得一個加速度 a ，而滾動的頻率亦將增加。

- (a) 令 $\tan \alpha = 0$ 即在坡度斜角為 θ 的情況下，所獲得之 a 值，針對同一錐角 θ 及軌道 θ 及軌道夾角 ψ 而言應是最大的，即滾動最快的情形。
- (b) 在固定 ψ 及 α 值下 θ 值愈大也愈容易滾動，滾動後 a 值也相對加大。
- (c) 在固定的 θ 值和 α 值中， ψ 值愈大，錐體愈易爬坡。

(2) $K = 0$ ，即 $\tan \psi \tan \theta - \tan \alpha = 0$

在此條件下，重心垂直變化量為 0，系統的能量變化一位能不變，故在此種狀況下

- (a) 若錐體以 V_0 初速爬坡，則可能以等速移動且等速滾動，即在位能不變的情況下，動能不變。
- (b) 若錐體在爬坡的過程中，由於滾動的錐體半徑漸小，而滾動的頻率

增加，對滾動動能而言是增加的，而錐體的移動動能減少，因此錐體有可能減速移動。

(c)若 $V_0=0$ ，則錐體是不可能爬上坡的。

(3) $K < 0$ 即 $\tan\psi \tan\theta < \tan\alpha$

在此條件下，給予錐體 V_0 的初速，在上坡的過程中錐體到達終點可能性很小，錐體的位能只在提升的狀況，故錐體不能爬坡。

(二)實驗探討一設定特殊角度之錐體與坡度之測試。

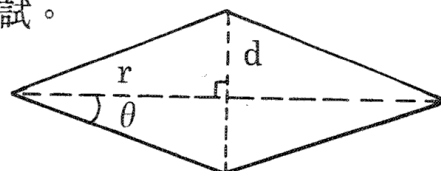
①測定錐體移動之時間和位移的相關性。

1. 實驗器材

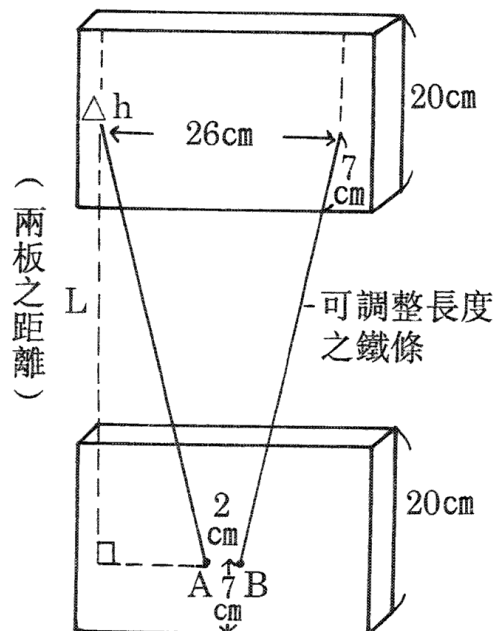
(1)錐體：均質木頭做成的錐體五個。

規格：

編號	①	②	③	④	⑤
Y	12	12	12	12	12
d	2	3	4	5	6



壓克力板



(2)可變式軌道，如圖示

(3)馬錶一個。

(4)長尺一支、方格紙一張。

2. 實驗步驟：

(1)在軌道上取定路徑 $L=72\text{cm}$ 取 $x=60\text{cm}$ 設定 $\tan\psi=1/6$ 時 Δh 分別是0、1、2、3、4、5 (cm)使 $\tan\alpha$ 之變化量為 0 、 $1/72$ 、 $2/72$ 、 $3/72$ 、 $4/72$ 、 $5/72$ 。

[註]：①可變式軌道可調整 L ，固定 $\overline{CD}=26\text{cm}$ 的條件下， $\tan\psi$ 值變化如下

L(cm)	36	48	60	72
$\tan \Psi$	1/3	1/4	1/5	1/6

②調整 Δh 對應 L 的大小可決定 $\tan\alpha$

$L \backslash \begin{matrix} \Delta h \\ \tan\alpha \end{matrix}$	0cm	1cm	2cm	3cm	4cm	5cm
36(cm)	0	1/36	1/18	1/12	1/9	5/36
48(cm)	0	1/48	1/24	1/16	1/12	5/48
60(cm)	0	1/60	1/30	1/20	1/15	1/12
72(cm)	0	1/72	1/36	1/24	1/18	5/72

③錐體五個長度皆為24cm其 $\tan\theta$ 值如下：

編號	①	②	③	④	⑤
$\tan\theta$	1/6	1/4	1/3	5/12	1/2

(2)將編號① $\tan\theta=1/6$ 之錐體置於軌道上，調整 x 選擇適當的 $\tan\psi$ ，令 Δh 值為0 cm及1 cm，測定 L 及錐體在軌道上移動的時間。

(3)同上述之步驟將編號②、③、④、⑤之錐體，測定 L 選定恰當的 $\tan\psi$ 及 $\tan\alpha$ 值，測定在軌道上移動的時間。

Ⓑ測定錐體轉動頻率之變化，並且探究重心位移變化量。

1.實驗器材：

(1)同Ⓐ實驗之錐體及軌道。(2)廣告顏料(黃綠色)1瓶。

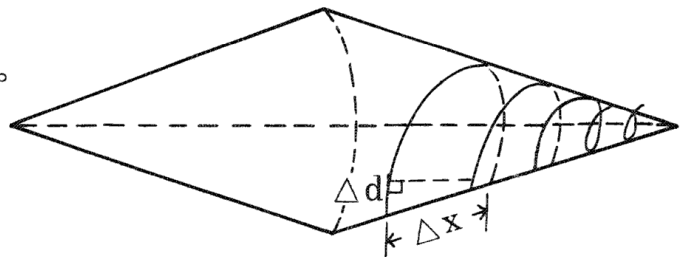
(3)毛筆2支。

2.實驗步驟：

(1)重覆實驗Ⓐ之步驟，在軌道上塗上黃綠色之顏料，並讓錐體分別由軌道釋放取 $\tan\psi=1/6$ ， $L=72\text{cm}$ ， $x=60\text{cm}$ 及 Δh 分別為0及1cm，並且在錐體上取得滾過的軌跡。

(2)計算圈數，並測量軌跡之間距 Δx 。

(3)由 Δx 推算重心垂直變化位移 Δd 。



四、實驗結果

實驗Ⓐ：〔數據〕

錐體 ① $\tan\theta=1/6$

Δh	$\tan\psi$				
	t(sec)	1/6	1/5	1/4	1/3
0		3.58	2.63	2.41	1.31
1		4.95	2.53	2.89	1.78

錐體 ② $\tan\theta=1/4$

Δh	$\tan\psi$				
	t(sec)	1/6	1/5	1/4	1/3
0		2.96	2.32	2.08	1.14
1		3.29	2.72	2.26	1.27
2		4.55	3.81	2.82	1.73

錐體 ③ $\tan\theta=1/3$

Δh	$\tan\psi$				
	t(sec)	1/6	1/5	1/4	1/3
0		2.84	2.09	1.77	0.97
1		2.94	2.26	1.98	1.11
2		3.78	3.26	2.35	1.44
3		4.75	4.16	2.95	1.77

錐體 ④ $\tan\theta=\frac{5}{12}$

Δh	$\tan\psi$				
	t(sec)	1/6	1/5	1/4	1/3
0		2.47	1.95	1.42	0.89
1		2.73	2.21	1.59	0.98
2		3.03	2.50	2.00	1.14
3		3.68	3.07	2.43	1.42
4		5.36	4.50	3.23	2.07

錐體 ⑤ $\tan\theta=\frac{1}{2}$

Δh	$\tan\psi$				
	t(sec)	1/6	1/5	1/4	1/3
0		2.64	2.23	1.49	0.68
1		3.04	2.33	1.65	0.84
2		3.43	2.60	2.04	0.94
3		3.69	3.22	2.17	1.16
4		4.33	3.87	2.03	1.35
5		4.68	4.28	3.22	1.88

〔分析〕

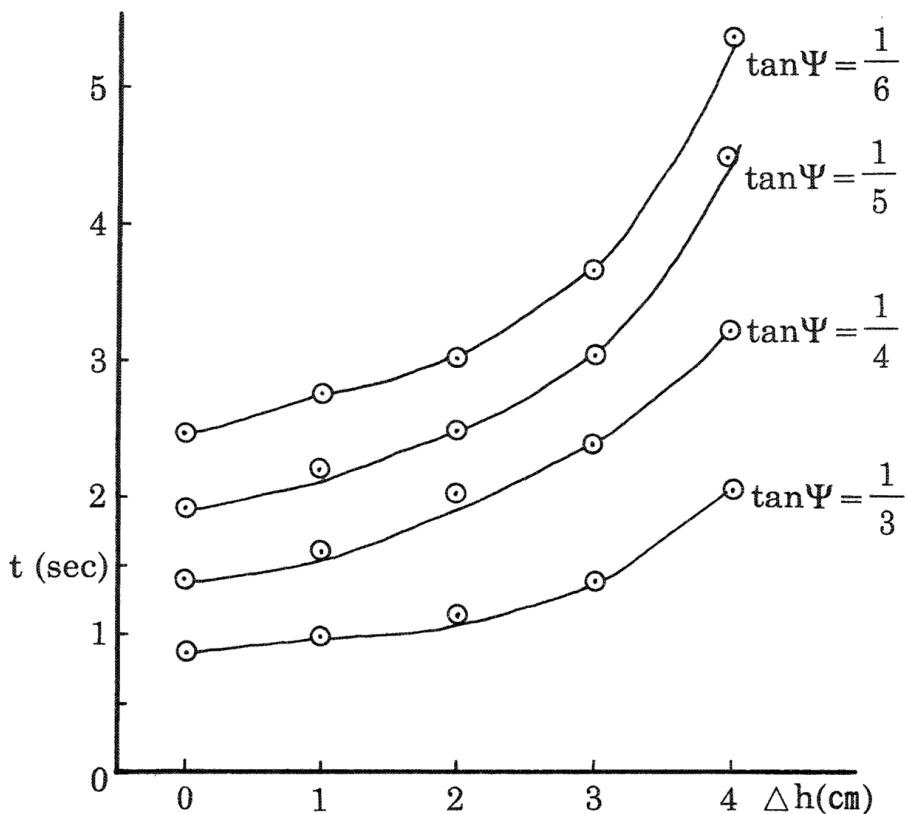
(一)就相同 $\tan\psi$ 值及 $\tan\alpha$ 值而言

①當 $\Delta h=0$ 即 $\tan\alpha=0$ 時，由表得知，錐角 $\tan\theta$ 值愈大，在坡道中爬坡的速度愈快，即錐體④>③>②>①，而⑤號錐體在坡道愈長時，爬坡的速度較④慢，乃是因為⑤號錐體較重，在滾動時，壓迫軌道致使速度減緩所致，而在 $L=24\text{cm}$ 之坡道上爬坡，錐體⑤的速度較④快。

②當 $\Delta h>0$ ，即 $\tan\alpha$ 值不為0時，錐角 θ 和時間的關係，同上述分析。

(二)就同一錐體 $\tan\theta$ 為定值，相同 ψ 值比較下，不同 Δh 會影響爬坡的時間 Δh 愈大則時間愈長，速度愈慢。又 Δh 和時間非線性關係，如圖。

以④錐體 $\tan\theta = \frac{5}{12}$ 作圖：



(三)同一錐體在不同 ψ 值下爬坡以 $\tan\psi = 1/6$ 時的爬坡時間較長，其因是所取的坡度，及長度不同所致。 $\tan\psi = 1/2$ 時由於取的軌道較短，時間測量上有較大的誤差。

(四)由上述實驗過程中發現錐體向上爬之過程，做非等加速運動，於是做以下之探討一取不同之位移 x 針對同一個 $\tan\psi$ 及 $\tan\alpha$ 和 $\tan\theta$ 值測定滾動的時間(t)，並作 $x-t$ 圖。

(1)由作圖(一)可知以 $\Delta h = 0$ 時在50~40cm之間速度最快。

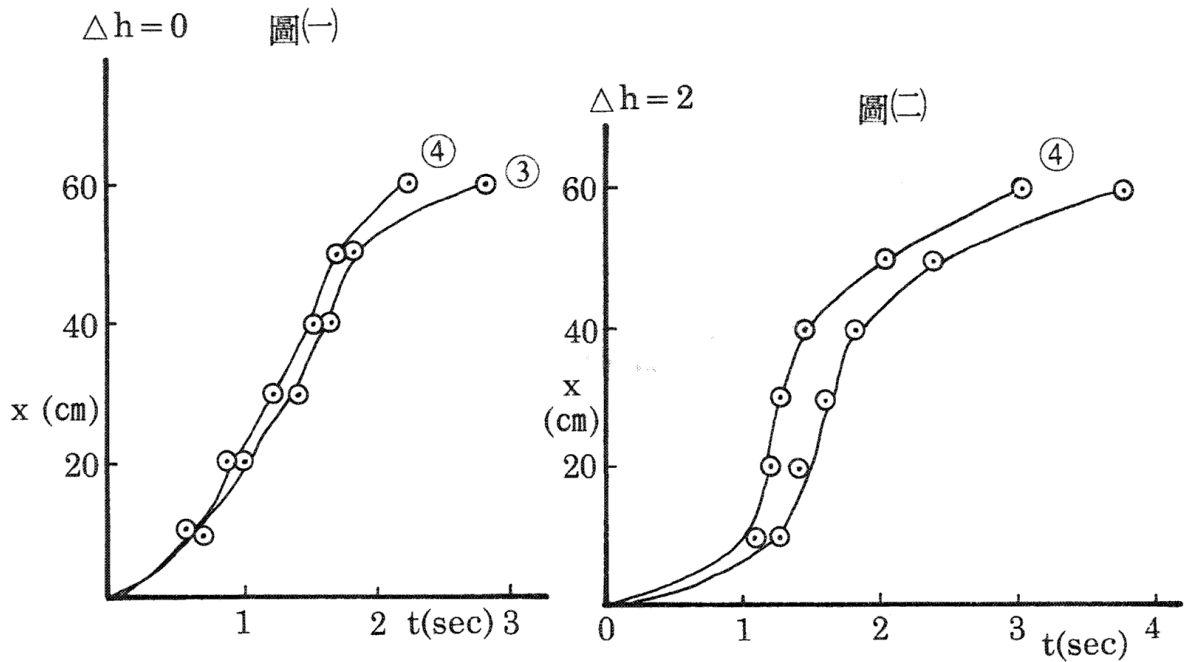
(2)由作圖(二)可知以 $\Delta h = 2$ 時在20~30cm之間速度最快。

表(i) $\Delta h = 0$ ($\tan\alpha = 0$)
 $\tan\psi = 1/6$

x(cm) \ 錐體	錐體	
	③	④
t(sec)		
10	0.68	0.66
20	1.01	0.96
30	1.38	1.23
40	1.64	1.55
50	1.82	1.69
60	2.84	2.47

表(ii) $\Delta h = 2$ ($\tan\alpha = 1/36$)
 $\tan\psi = 1/6$

x(cm) \ 錐體	錐體	
	③	④
t(sec)		
10	1.25	1.09
20	1.39	1.17
30	1.58	1.23
40	1.81	1.44
50	2.37	2.03
60	3.78	3.03



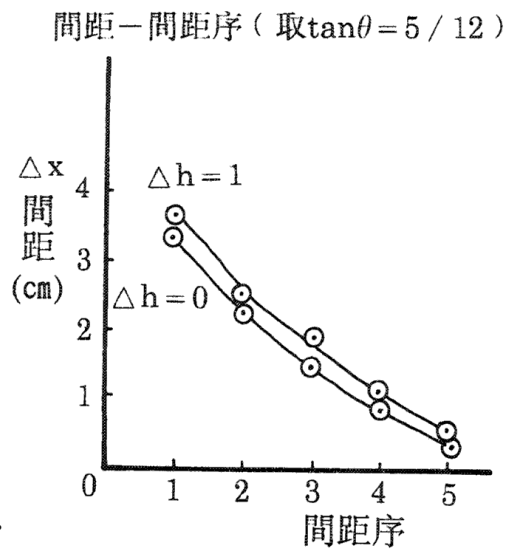
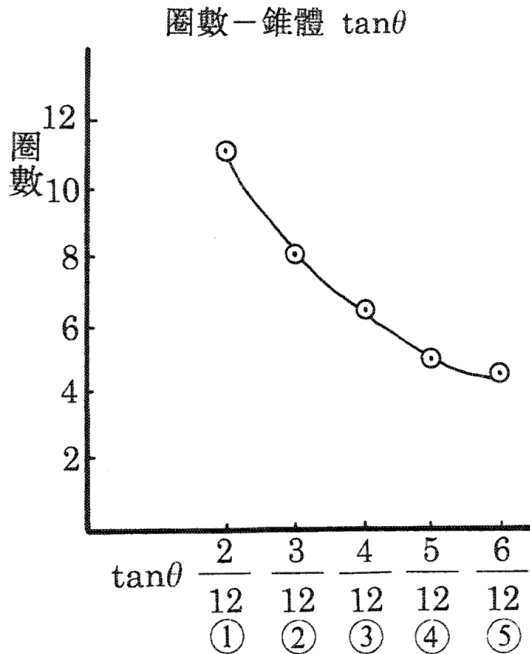
〔探討〕

- ① 斜面原理得：下滑力 $F = mg \sin \alpha \tan^{-1}(\tan \theta / \tan \theta - \tan \alpha)$ ，當坡度 Δh 愈大時 $\tan \alpha$ 愈大，而下滑力愈小。
- ② 當錐角 θ 愈大，則下滑力愈大。
- ③ 下滑力提供錐體移動
增加動能，且轉動增加動能，故錐體在同時移動和轉動時，錐體和軌道的接觸點相對產生一個向下的力偶。在接觸點改變時，力偶之方向反而成爲抗力矩而使錐體加速度減少。

實驗B：〔數據〕

〔分析〕：

- (一) 由下頁表中得錐體有定距離滾動圈數以錐體①最多而錐體⑤最少，乃因錐體① $\tan \theta$ 值較小，故滾動一圈移動距離小，而 $\tan \theta$ 愈大滾動一圈之位移大。
- (二) 對第一圈而言 $\tan \theta$ 小者 Δx 小，顯示出位能變化量以 $\tan \theta$ 大者愈大。
- (三) 不同 Δh 下之滾動圈數以同一錐體而言相差不大，此乃因移動距離 x 相差不大所致。
- (四) 間距變化量以錐體①差異較小，但仍有隨位移減少之趨勢。



甲：測定錐體滾動的圈數，令 $\tan\psi = 1/6$ 取 $L = 72\text{cm}$ ， $X = 60\text{cm}$

Δh \ 錐體	錐體				
	圈數 ①	②	③	④	⑤
0	11.0	8.0	6.5	5.0	4.75
1	11.0	8.0	6.25	5.0	4.5

乙：測定錐體滾動後之軌跡間距 ΔX ：錐體①

Δh \ 間距序	間距序									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	2.0	1.5	1.0	0.7	0.65	0.6	0.5	0.3	0.25	0.2
1	1.9	1.7	1.1	1.0	0.7	0.7	0.6	0.4	0.3	0.2

錐體②

Δh \ 間距序	間距序						
	1	2	3	4	5	6	7
0	3.0	1.5	1.0	0.8	0.6	0.4	0.3
1	2.7	1.6	1.5	1.2	1.0	0.6	0.5

錐體③

Δh \ 間距序	間距序					
	1	2	3	4	5	6
0	3.0	2.0	1.7	1.0	0.7	0.5
1	3.5	2.0	1.3	1.0	0.7	0.5

錐體④

間距序 Δh	1	2	3	4	5
0	3.7	2.4	1.9	1.0	0.5
1	3.4	2.5	1.5	0.9	0.4

錐體⑤

間距序 Δh	1	2	3	4
0	4.1	2.5	1.5	1.0
1	4.5	3.1	1.3	0.8

五、討論

- 對於各錐體而言，必須符合 $K > 0$ 即
($\tan\psi/\tan\theta - \tan\alpha$) 值大於 0 才能
使錐體爬坡，故由錐體的 $\tan\theta$ 值以

錐體 編號	①	②	③	④	⑤
$\tan\theta$	1/6	1/4	1/3	5/12	1/2
Δh 最大值	2	3	4	5	6

及軌道 $\tan\psi$ 之設計下，各錐體所能爬升的最大 Δh 值如上表所列。

$$\tan\theta \cdot \tan\psi > \tan\alpha$$

即 $(d/Y) \cdot (12/L) > (\Delta h/L)$ 每個錐體的長度皆為 24cm，則 $Y = 12\text{cm}$

故 $(d/L) > (\Delta h/L) \therefore d > \Delta h$ 的情況下始能爬坡。

- 為了使錐體在滾動時避免觸及桌面，則設計軌道時其離桌面的最小距離為 6 cm。為了改變路程 L 而設計活動式鐵條。
- 錐體 $\tan\theta$ 愈大，相對體積愈大，錐體也愈重，因此，對應不同軌道和錐體，雖符合相同 K 之爬坡條件，但其滾動時卻有不同，故取同以錐體對應不同軌道的比較較為恰當。
- 設定 $K = 0$ 的特殊情況下，則在軌道上必須施予一些動力以克服摩擦力，才能讓錐體向上爬。由於施力大小不易控制，故此狀況的實驗測定，不易進行，有待再進一步的研究及發展。

六、結論

- 在理論探討的研究中，得知錐體向上爬坡之條件是 K 值必須大於 0，由此，也能預測出不同錐體在設定軌道寬度下所能爬升的高度。
- 重心在爬升過程中其垂直變化量 $L(\tan\psi/\tan\theta - \tan\alpha)$ ，而在爬升時有 $mgL(\tan\psi/\tan\theta - \tan\alpha)$ 的位能轉換成動能。位能和動能的變化關係，應為

$$E_p = \frac{1}{2} mV^2 + \frac{1}{2} IW^2$$
 在轉動時， I 值逐漸減少，轉速加快。由實驗B的結果得知轉動頻率加快，間距變小。
- 錐體重心不在幾何中心時，重心在滾動時對錐體產生一個向前轉的力矩。使錐體向上爬升的條件更趨複雜。

- 4.以相同的錐角而言 $\tan\psi$ 愈大 Δh 愈小時，愈易滾動。以相同 $\tan\psi$ 而言對應相同 Δh 時，錐體 $\tan\theta$ 愈大，愈易滾動。
- 5.測定轉動頻率中，K值設定愈大，轉動頻率變化愈大。而錐體移動快且轉動亦加快，其間仍為一種變速度情況。
- 6.由以上理論探討與實驗探討的結果中，雖不盡是理想的推測狀況，但是，就整體現象而言，大多符合。在研究中仍有不少疑點正待鑽研，必須以充實專門知識為第一優先。未來在錐體研究上，相信會有更創新且更透徹的報告公諸於世。

七、參考資料

- 1.國中理化第二冊第十三章——功
- 2.高中數學——三角函數
- 3.大學物理學——轉動動力學
- 4.姜正一——登坡的車子——第四屆新竹市科展第三名（民國75年3月）

評 語

本研究利用錐體爬坡時，重心下降，因重力產生力矩，而有角加速度，故錐體爬坡時作變加速運動。題材生動有趣，分析詳細。