利用蒙氣差求空氣的折射率

高中組地球科學科第一名

嘉義縣私立協同高級中學　　作　　者：梅高綺、沈昭諭、簡仲徽、李景行
指導教師：翁啟訓　曾南榮

一、研究動機

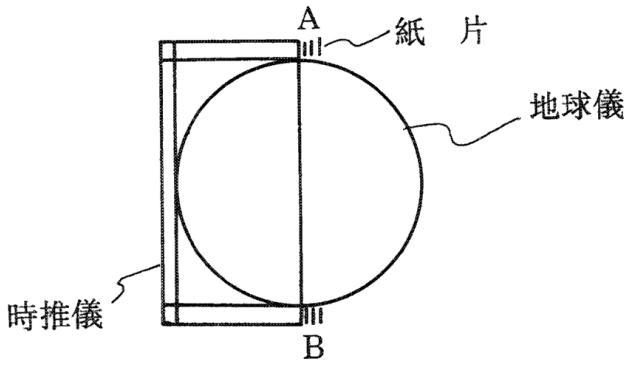
我們在過去的實驗中曾經自製了一個時推儀，藉以推算出任何地方，任何日期的日出日落時間，但在推測的過程中，所求緯度越高，推測值與實際值的誤差越大。經過進一步的思考，發現大氣使日光偏折的角度也應考慮在內，於是我們決定著手求出該角度的大小。並利用此角度求出光線自真空進入空氣的折射率。

二、研究目的N

求出日出日落時，日光進入大氣時偏折的角度（蒙氣差）。並利用此角度求出光線自真空進入空氣的折射率。

三、研究器材

自製時推儀（如右圖）



（圖一）

四、研究步驟

㈠以儀器驗證蒙氣差

1. 以時推儀求出N60°3月～12月間每月中任何一天的日出時間並對照資料求出與實際值的差記錄之。
2. 將相同的紙片分別等量疊在時推儀A、B兩處（如圖一），重覆步驟1，記錄A處紙片厚度，此厚度即爲影響日出或日落時間的因素。
3. 求出步驟2中十個數據之平均值，記錄之。
4. 改變紙片厚度，重覆步驟1、2、3，直到平均值最接近零。

㈡利用㈠之原理推導出A、B兩式子以計算白晝、黑夜之時數。已知：

θ_1：太陽光直射之緯度。

θ_2：欲知晝夜長之緯度。

θ_3：考慮所有因素使日照面積增加所張之角度。

參數：球S：單位球，球心O_1，直徑$\overline{AB}$，$\overline{NS}$，半徑$r_1=1$

方程式：$x^2+y^2+z^2=1$

圓K：緯度θ_2所在之圓，圓心O_2，直徑$\overline{CD}$，半徑r_2

方程式：$\begin{cases} z=\sin\theta_2 \\ x^2+y^2=\cos^2\theta_2 \end{cases}$

平面E_1：過O_1，與軸夾θ_1之切平面。

∵單位法何量爲（O，$\cos\theta_1$，$\sin\theta_1$）

∴方程式：$\cos\theta_1 y+\sin\theta_2 z=0$

平面E_2：平行E_1，實際晝夜分割之切平面。

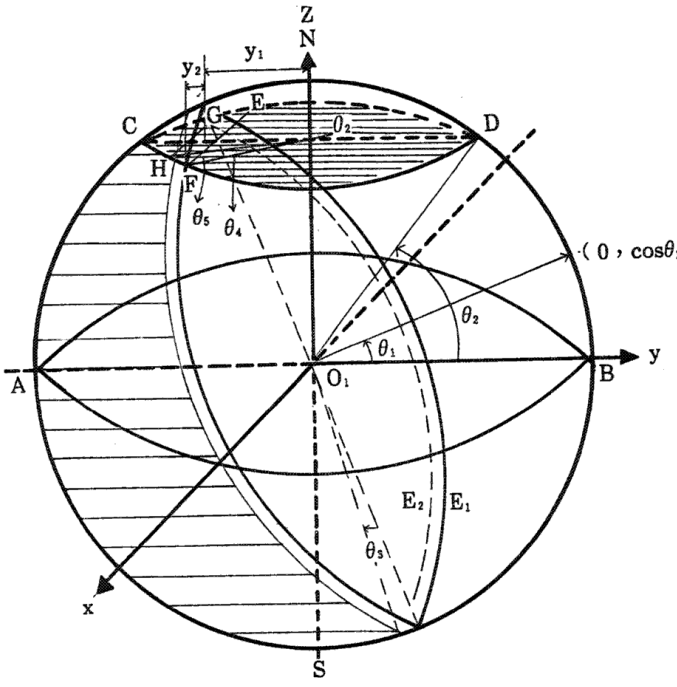
E，F：E_1與圓K之交點。　G，H：E_2與圓K之交點。

Y_1：O_2至$\overline{EF}$之距離。　y_2：EF與$\overline{GH}$之距離。

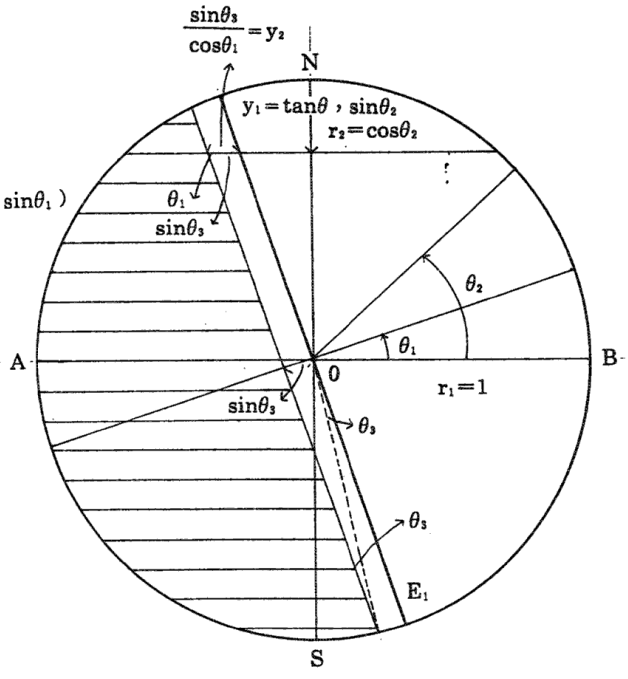
θ_4：$\overset{\frown}{EF}$（劣弧）之度數的一半（弳度量）。

θ_5：$\overset{\frown}{GH}$（劣弧）之度數的一半（弳度量）。

請參照圖二、三



（圖二）



（圖三）

A式：（時推儀原理）

解圓K與平面E_1之交集，得兩點即

$E\left(-\sqrt{1-\sin^2\theta_2\sec^2\theta_1}-\tan\theta_1\sin\theta_2,\sin\theta_2\right)$

$$F\left(-\sqrt{1-\sin^2\theta_2\sec^2\theta_1}-\tan\theta_1\sin\theta_2,\sin\theta_2\right)$$

$$\Rightarrow \theta_4=\cos^{-1}\frac{\sin\theta_1\sin\theta_2}{\cos\theta_1\cos\theta_2}$$

$$\Rightarrow \text{黑夜（小時）}=24\times\frac{2\theta_4}{2\pi}=\frac{24\theta_4}{\pi}$$

$$\Rightarrow \text{白晝（小時）}=24\times\left(1-\frac{\theta_4}{\pi}\right)$$

B式：（考慮θ_3）

$$E_1\text{與}E_2\text{距離}=\sin\theta_3 \Rightarrow y_2=\frac{\sin\theta_3}{\cos\theta_1}$$

$$\Rightarrow G\left(-\frac{\sqrt{\cos^2\theta_1\ \cos^2\theta_2-(\sin\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_3)^2}}{\cos\theta_1},\frac{-(\sin\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_3)}{\cos\theta_1},\sin\theta_2\right)$$

$$H\left(-\frac{\sqrt{\cos^2\theta_1\ \cos^2\theta_2-(\sin\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_3)^2}}{\cos\theta_1},\frac{-(\sin\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_3)}{\cos\theta_1},\sin\theta_2\right)$$

$$\Rightarrow \theta_5=\cos^{-1}\frac{\sin\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_3}{\cos\theta_1\cos\theta_2}$$

$$\Rightarrow \text{黑夜（小時）}=24\times\frac{2\theta_5}{2\pi}=\frac{24\theta_5}{\pi}$$

$$\text{白晝（小時）}=24\times\left(1-\frac{\theta_5}{\pi}\right)$$

㈢以電腦驗證公式，步驟如下：

1. 以A式計算赤道上由3月23日至9月19日間每隔8日之白晝時數。
2. 輸入資料中實際的白晝時數。
3. 由步驟1，2求出推算值與實際值的差。
4. 求出步驟3中所有值的平均。
5. 尋找一值代入B式θ_3中，使4中之不均值爲零記錄該值。
6. 尋找一值代入B式θ_3中求出赤道上，N30°，N42°，N48°，N54°，N60°等緯度上由3月23日至9月19日每隔8日之白晝時數的推算值與實際差，直到所有誤差值之總平均爲0，記錄該值。

備註：

1. 公式之驗證採用Lotus V2.01套裝軟體進行驗證運算。

2. θ_1（直射角）：根據天文年鑑查表得知。

3. θ_2（所在緯度）：分別爲北緯30°，42°，48°，54°及60°。

4. 以修正後的公式B帶入儲存格中，求出晝長。

5. θ_3（修正值）：以逼近法逐一帶入修正角度至平均晝差爲0.000。

6. 以所得之修正值扣除太陽之平均視半徑即爲蒙氣差。

㈣設大氣厚度＝h，$\overline{O'D}$＝地球半徑＝R

由$\triangle O'DE$ $\cos\angle 1=\dfrac{O'D}{O'E}=\dfrac{R}{R+h}$

$$\angle 1=\cos^{-1}\frac{R}{R+h}$$

$$\angle 2=1-\alpha=\cos^{-1}\frac{R}{R+h}-\alpha$$

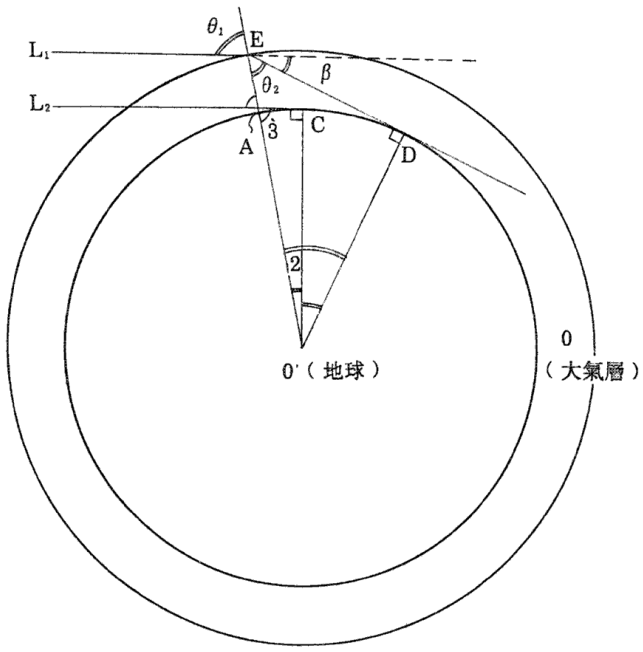
由$\triangle O'AC$ $\angle 3=90°-\angle 2$

$$=90°-\cos^{-1}\frac{R}{R+h}+\alpha$$

∵ $L_1 // L_2$

∴ $\angle 3=\angle 4=\theta_1=90°-\cos^{-1}\dfrac{R}{R+h}+\alpha\cdots①$

$$\theta_2=\theta_1-\beta\cdots\cdots②$$



（圖四）

利用P＝hd

大氣壓力 P＝1033.6 g / cm²＝1033.6 kg / m²

大氣平均密度 d＝1.293 g / ℓ ＝1.293 kg / m³

求得h＝7993.8128 m＝7.9938128 km

又R＝6372 km 代入①求得θ_1，並由②求出θ_2

利用 $n=\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$ 求出折射率n

五、研究結果

表㈠N60°3月～12月各月中任一天以各厚度紙片實驗，推測與實際值的差（＋

爲較實際值晚，－爲較實際值早）。

紙片厚度（度） 日出時間差（分） 日　期	無紙片	0.4	0.6	0.8	1
Mar 31	＋ 7	＋ 1	－ 5	－ 9	－11
Apr 20	＋ 7	＋ 5	＋ 1	－ 3	－ 5
May 10	＋10.5	＋ 6.5	＋ 2.5	－ 1.5	－ 3.5
Jun 15	0	－ 4	－ 8	－ 12	－14
Jul 17	＋ 9.6	＋ 5.5	＋ 1.5	－ 2.5	－ 4.5
Aug 18	＋13	＋ 9	＋ 5	＋ 1	－ 1
Sep 15	＋12.3	＋ 6.3	＋ 1.9	－ 1.5	－ 3.5
Oct 5	＋23	＋19	＋15	＋11	＋ 9
Nov 22	＋21.5	＋17.5	＋13.5	＋ 9.5	＋ 7.5
Dec 16	＋31	＋26.8	＋23	＋19	＋17
平　均　值	13.49	9.26	5.04	1.1	0.9

＊由此表得知：在0.8°～1.0°間有一角度可使誤差值之平均爲0，故在以θ_3修正白晝時數時，即可以0.8～1.0爲範圍。

㈡由研究步驟㈣

P＝hd

大氣壓力 P＝1033.6 g / cm²＝1033.6 kg / m²

大氣平均密度 d＝1.293 g / ℓ ＝1.293 kg / m³

大氣厚度 h＝7993.8128 m＝7.9938128 km

$\overline{O'D}$＝地球半徑＝R＝6372 km

$$由\triangle O'DE\ \cos\angle 1=\frac{\overline{O'D}}{\overline{O'E}}=\frac{R}{R+h}=\frac{6372}{6372+7.99}=0.99874705$$

$$\angle 1=\cos^{-1}\frac{R}{R+h}=2.868466911$$

$$\angle 2=\angle 1-\alpha$$

$$= \cos^{-1}\frac{R}{R+h} - \alpha = 2.3019$$

由 $\triangle O'AC$ $\angle 3 = 90° - \angle 2$

$$= 90° - \cos^{-1}\frac{R}{R+h} + \alpha = 87.69803309$$

$\because$ $L_1 // L_2$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4 = \theta_1 = 90° - \cos^{-1}\frac{R}{R+h} + \alpha = 87.69803309$$

$$\theta_2 = \theta_1 - \beta = 87.13153309$$

$$\text{折射率 } n = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = 1.000446$$

B式　均0
θ_3　修 正 值：0.8331
θ_2　所求緯度：　0

日期	<1：直射角	修正後晝長	實晝	晝差分	日出	日落
3.31	4.16833	12.11	12.10	0.7	6.02	18.12
4.04	5.70500	12.11	12.10	0.7	6.00	18.10
4.12	8.69500	12.11	12.12	−0.3	5.95	18.07
4.20	11.52833	12.11	12.12	−0.2	5.92	18.03
4.28	14.16167	12.11	12.12	−0.1	5.90	18.02
5.02	15.38667	12.12	12.12	−0.1	5.88	18.00
5.10	17.63000	12.12	12.12	0.0	5.88	18.00
5.18	19.55833	12.12	12.12	0.1	5.88	18.00
5.26	21.13167	12.12	12.13	−0.9	5.88	18.02
6.03	22.31667	12.12	12.12	0.2	5.92	18.03
6.11	23.08667	12.12	12.12	0.2	5.93	18.05
6.15	23.31000	12.12	12.12	0.3	5.95	18.07
6.19	23.42500	12.12	12.12	0.3	5.97	18.08
6.23	23.42833	12.12	12.12	0.3	5.98	18.10
6.27	23.32167	12.12	12.13	−0.7	5.98	18.12
7.01	23.10667	12.12	12.13	−0.8	6.00	18.13
7.09	22.35500	12.12	12.12	0.2	6.03	18.15
7.17	21.19167	12.12	12.12	0.1	6.05	18.17
7.25	19.64667	12.12	12.12	0.1	6.05	18.17
8.02	17.75500	12.12	12.12	0.0	6.05	18.17
8.10	15.55500	12.12	12.12	−0.1	6.03	18.15
8.18	13.08833	12.11	12.12	−0.2	6.00	18.12
8.26	10.40167	12.11	12.12	−0.2	5.97	18.08
9.03	7.54000	12.11	12.12	−0.3	5.93	18.05
9.11	4.54667	12.11	12.12	−0.3	5.88	18.00
9.19	1.47000	12.11	12.12	−0.3	5.83	17.95

(三)−1

B式　均0
θ_3　修 正 值：0.8331
θ_2　所求緯度：　30

日期	<1：直射角	修正後晝長	實晝	晝差分	日出	日落
3.31	4.16833	12.45	12.47	−1.0	5.83	18.30
4.04	5.70500	12.57	12.58	−0.8	5.77	18.35
4.12	8.69500	12.81	12.82	−0.7	5.60	18.42
4.20	11.52833	13.03	13.03	0.0	5.47	18.50
4.28	14.16167	13.25	13.27	−1.0	5.33	18.60
5.02	15.38667	13.35	13.37	−0.8	5.27	18.63
5.10	17.63000	13.55	13.55	−0.2	5.17	18.72
5.18	19.55833	13.72	13.72	0.0	5.08	18.80
5.26	21.13167	13.86	13.87	−0.4	5.02	18.88
6.03	22.31667	13.97	13.98	−0.7	4.98	18.97
6.11	23.08667	14.04	14.05	−0.4	4.97	19.02
6.15	23.31000	14.07	14.08	−1.1	4.97	19.05
6.19	23.42500	14.08	14.08	−0.4	4.98	19.07
6.23	23.42833	14.08	14.08	−0.4	5.00	19.08
6.27	23.32167	14.07	14.07	0.0	5.02	19.08
7.01	23.10667	14.05	14.05	−0.3	5.03	19.08
7.09	22.35500	13.97	13.97	0.5	5.10	19.07
7.17	21.19167	13.87	13.87	0.0	5.17	19.03
7.25	19.64667	13.73	13.72	0.5	5.25	18.97
8.02	17.75500	13.56	13.53	1.5	5.33	18.87
8.10	15.55500	13.37	13.37	0.1	5.40	18.77
8.18	13.08833	13.16	13.15	0.7	5.48	18.63
8.26	10.40167	12.94	12.92	1.5	5.57	18.48
9.03	7.54000	12.71	12.70	0.9	5.63	18.33
9.11	4.54667	12.48	12.47	0.8	5.70	18.17
9.19	1.47000	12.24	12.22	1.5	5.78	18.00

(三)−2

θ_3 修 正 值：0.8331
θ_2 所求緯度： 42

日期	<1：直射角	修正後晝長	實晝	晝差分	日出	日落
3.31	4.16833	12.65	12.68	−1.9	5.73	18.42
4.04	5.70500	12.84	12.87	−1.7	5.62	18.48
4.12	8.69500	13.21	13.23	−1.5	5.40	18.63
4.20	11.52833	13.57	13.58	−1.0	5.20	18.78
4.28	14.16167	13.91	13.93	−1.4	5.00	18.93
5.02	15.38667	14.07	14.08	−0.6	4.92	19.00
5.10	17.63000	14.38	14.40	−1.1	4.75	19.15
5.18	19.55833	14.66	14.67	−0.7	4.62	19.28
5.26	21.13167	14.89	14.90	−0.8	4.50	19.40
6.03	22.31667	15.07	15.08	−1.0	4.43	19.52
6.11	23.08667	15.19	15.20	−0.8	4.40	19.60
6.15	23.31000	15.22	15.22	0.3	4.40	19.62
6.19	23.42500	15.24	15.25	−0.6	4.40	19.65
6.23	23.42833	15.24	15.23	0.4	4.42	19.65
6.27	23.32167	15.22	15.23	−0.6	4.43	19.67
7.01	23.10667	15.19	15.18	0.4	4.47	19.65
7.09	22.35500	15.07	15.07	0.4	4.55	19.62
7.17	21.19167	14.90	14.88	0.8	4.65	19.53
7.25	19.64667	14.67	14.65	1.1	4.78	19.43
8.02	17.75500	14.40	14.38	0.9	4.90	19.28
8.10	15.55500	14.10	14.07	1.8	5.05	19.12
8.18	13.08833	13.77	13.75	1.1	5.18	18.93
8.26	10.40167	13.41	13.40	1.4	5.32	18.72
9.03	7.54000	13.06	13.03	1.9	5.47	18.50
9.11	4.54667	12.70	12.67	1.9	5.60	18.27
9.19	1.47000	12.33	12.30	1.6	5.73	18.03

(三)−3

θ_3 修 正 值：0.8331
θ_2 所求緯度： 48

日期	<1：直射角	修正後晝長	實晝	晝差分	日出	日落
3.31	4.16833	12.79	12.82	−1.8	5.67	18.48
4.04	5.70500	13.02	13.05	−2.0	5.53	18.58
4.12	8.69500	13.47	13.50	−1.5	5.27	18.77
4.20	11.52833	13.92	13.95	−1.8	5.02	18.97
4.28	14.16167	14.35	14.37	−1.1	4.78	19.15
5.02	15.38667	14.55	14.58	−1.7	4.67	19.25
5.10	17.63000	14.94	14.97	−1.4	4.47	19.43
5.18	19.55833	15.29	15.32	−1.5	4.28	19.60
5.26	21.13167	15.59	15.60	−0.7	4.15	19.75
6.03	22.31667	15.82	15.83	−0.9	4.05	19.88
6.11	23.08667	15.97	15.98	−0.6	4.00	19.98
6.15	23.31000	16.02	16.02	0.2	4.00	20.02
6.19	23.42500	16.04	16.05	−0.4	4.00	20.05
6.23	23.42833	16.04	16.05	−0.4	4.02	20.07
6.27	23.32167	16.02	16.03	−0.7	4.03	20.07
7.01	23.10667	15.98	15.97	0.7	4.08	20.05
7.09	22.35500	15.83	15.80	1.6	4.18	19.98
7.17	21.19167	15.60	15.58	1.0	4.30	19.88
7.25	19.64667	15.31	15.30	0.5	4.45	19.75
8.02	17.75500	14.96	14.93	1.9	4.63	19.57
8.10	15.55500	14.58	14.57	1.0	4.80	19.37
8.18	13.08833	14.17	14.15	1.3	4.98	19.13
8.26	10.40167	13.74	13.72	1.5	5.17	18.88
9.03	7.54000	13.30	13.27	1.8	5.35	18.62
9.11	4.54667	12.84	12.80	2.6	5.53	18.33
9.19	1.47000	12.38	12.35	2.0	5.72	18.07

(三)−4

θ_3 修 正 值：0.8331
θ_2 所求緯度： 54

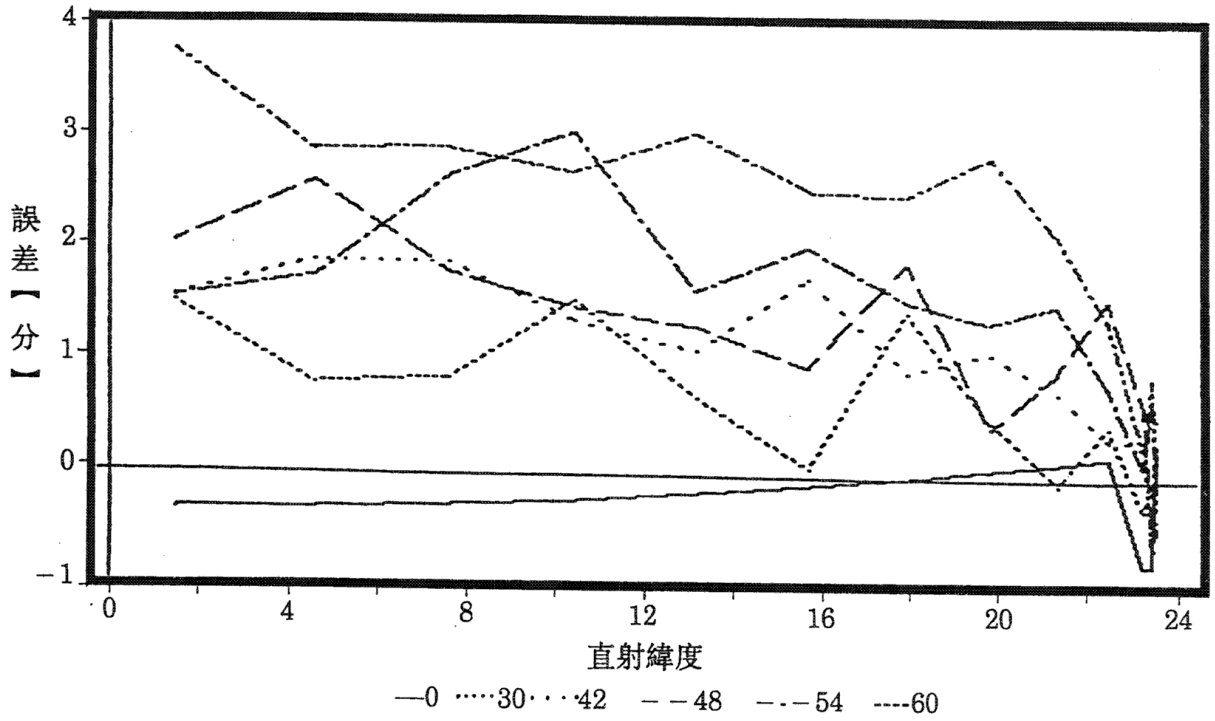
日期	<1：直射角	修正後晝長	實晝	晝差分	日出	日落
3.31	4.16833	12.96	12.98	−1.5	5.58	18.57
4.04	5.70500	13.25	13.28	−2.2	5.42	18.70
4.12	8.69500	13.82	13.85	−2.0	5.10	18.95
4.20	11.52833	14.38	14.42	−2.5	4.78	19.20
4.28	14.16167	14.92	14.95	−1.9	4.50	19.45
5.02	15.38667	15.18	15.22	−2.2	4.35	19.57
5.10	17.63000	15.68	15.70	−1.2	4.10	19.80
5.18	19.55833	16.14	16.17	−1.9	3.87	20.03
5.26	21.13167	16.53	16.55	−1.4	3.68	20.23
6.03	22.31667	16.84	16.85	−0.8	3.55	20.40
6.11	23.08667	17.05	17.07	−1.2	3.47	20.53
6.15	23.31000	17.11	17.12	−0.5	3.45	20.57
6.19	23.42500	17.14	17.15	−0.5	3.45	20.60
6.23	23.42833	17.14	17.13	0.5	3.47	20.60
6.27	23.32167	17.11	17.10	0.7	3.50	20.60
7.01	23.10667	17.05	17.05	0.1	3.53	20.58
7.09	22.35500	16.85	16.83	0.8	3.67	20.50
7.17	21.19167	16.54	16.52	1.5	3.83	20.35
7.25	19.64667	16.16	16.13	1.4	4.03	20.17
8.02	17.75500	15.71	15.68	1.6	4.25	19.93
8.10	15.55500	15.22	15.18	2.0	4.48	19.67
8.18	13.08833	14.69	14.67	3.0	4.72	19.38
8.26	10.40167	14.15	14.10	2.6	4.97	19.07
9.03	7.54000	13.59	13.55	1.7	5.20	18.75
9.11	4.54667	13.03	13.00	1.5	5.43	18.43
9.19	1.47000	12.46	12.43		5.67	18.10

(三)−5

θ_3 修 正 值：0.8331
θ_2 所求緯度： 60

日期	<1：直射角	修正後晝長	實晝	晝差分	日出	日落
3.31	4.16833	13.19	13.23	−2.5	5.47	18.70
4.04	5.70500	13.56	13.60	−2.6	5.27	18.87
4.12	8.69500	14.28	14.32	−2.1	4.87	19.18
4.20	11.52833	15.00	15.05	−2.9	4.47	19.52
4.28	14.16167	15.71	15.75	−2.3	4.10	19.85
5.02	15.38667	16.06	16.10	−2.4	3.92	20.02
5.10	17.63000	16.74	16.78	−2.9	3.57	20.35
5.18	19.55833	17.37	17.40	−2.0	3.25	20.65
5.26	21.13167	17.93	17.97	−2.2	2.98	20.95
6.03	22.31667	18.39	18.42	−1.5	2.77	21.18
6.11	23.08667	18.71	18.73	−1.2	2.63	21.37
6.15	23.31000	18.81	18.82	−0.4	2.60	21.42
6.19	23.42500	18.86	18.87	−0.4	2.58	21.45
6.23	23.42833	18.86	18.87	−0.3	2.60	21.47
6.27	23.32167	18.82	18.80	0.9	2.65	21.45
7.01	23.10667	18.72	18.72	0.3	2.70	21.42
7.09	22.35500	18.41	18.38	1.4	2.88	21.27
7.17	21.19167	17.95	17.92	2.52	3.13	21.05
7.25	19.64667	17.40	17.35	2.9	3.42	20.77
8.02	17.75500	16.77	16.73	2.5	3.72	20.45
8.10	15.55500	16.11	16.07	2.5	4.03	20.10
8.18	13.08833	15.42	15.37	3.0	4.37	19.73
8.26	10.40167	14.71	14.67	2.7	4.68	19.35
9.03	7.54000	14.00	13.95	2.9	5.00	18.95
9.11	4.54667	13.28	13.23	2.9	5.32	18.55
9.19	1.47000	12.56	12.50	3.7	5.63	18.13

(三)−6



表㈢之曲線圖

修正值： 0.8331度

49.99分

蒙氣差：33.99分

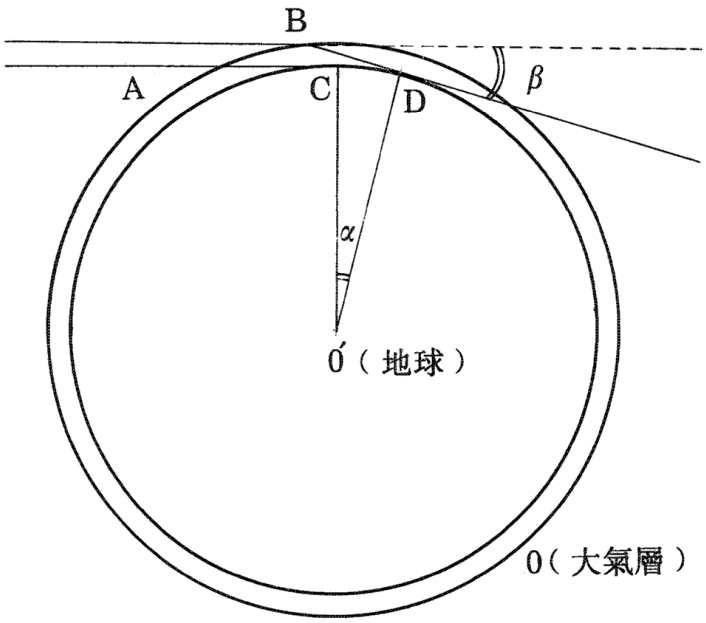
B式 均0 所求緯度	晝均差
0	−0.050
30	−0.003
42	−0.001
48	−0.022
54	−0.016
60	0.091
平均晝差：	0.000

六、研究討論

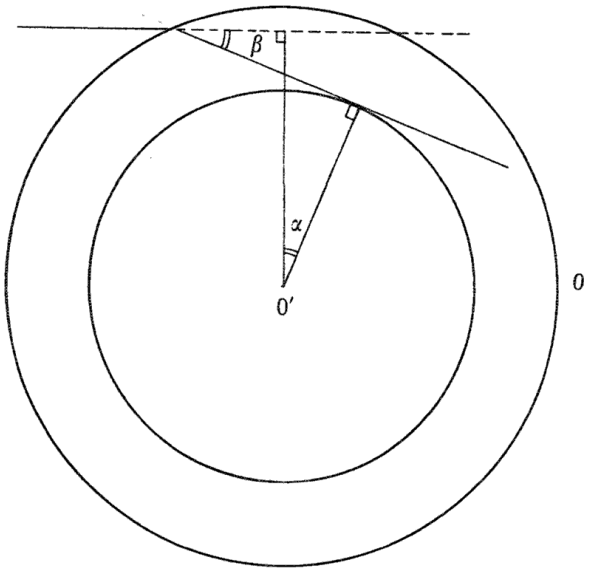
1. 由表㈠得知紙片厚度爲0.094公分～0.118公分，也就是0.8°～1.0°間之一角度可使平均值爲零，此角度即爲研究步驟㈢中的θ_3，並且0.8°～1.0°即爲θ_3之範圍。
2. 因研究步驟㈠過於繁複且不甚精確，故在研究步驟㈡中推導出計算公式，並

以電腦演算，增加精確度。

3. 在圖(五)中，圓0爲大氣層，圓0′爲地球。當日光過A及B時，依時推儀理論正是C之日出，但因大氣折射之影響，過B之光線會折射至D，故D已日出。

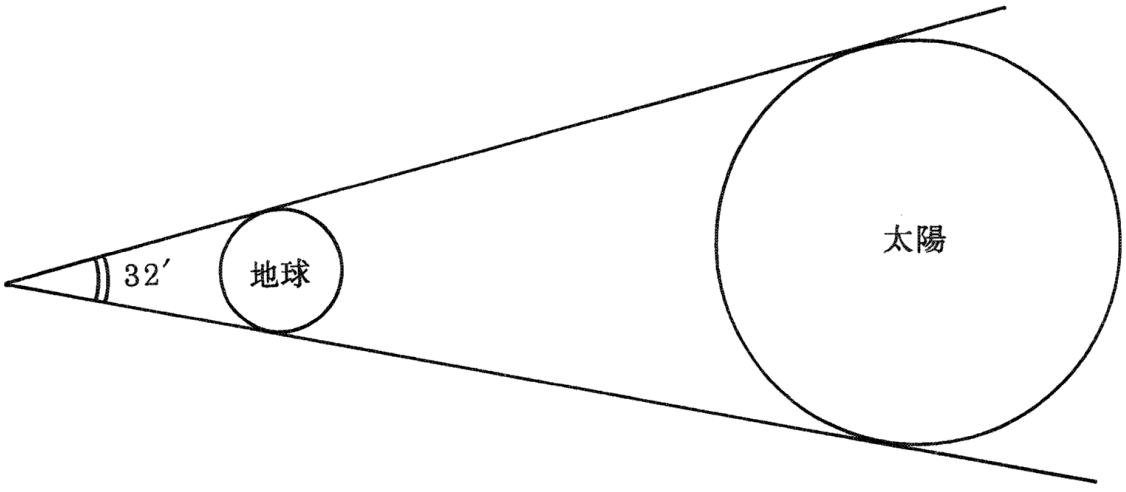


圖五



圖六

4. 在圖(五)中，α爲受太陽光折射的影響所增加的角度，β爲所求的折射角。將圖(五)中的大氣層比例加大成圖(六)，我們可以發現△BDE～△O′DB，所以β＝α。



圖七

5. 太陽之視半徑平均取16′，故對日出之影響爲提前16′，也就是在不考慮大氣折射的情況下，實際日出較時推儀理論上的日出提前了16′。（如圖七）（地球科學概論110頁）。
6. 影響晝夜長短的因素除了太陽光的直射緯度及觀測的緯度外，還有太陽視角、大氣折射、觀測點的高低。所以，若以水平面上討論，則$\theta_3=\beta+16'$故$\beta=\theta_3-16'=\alpha$。
7. 由資料得知真空對於大氣折射夜爲1.000286，研究所得結果與之比較，誤差約爲0.01833％甚小。

七、研究結論

1. 由研究步驟㈠可以簡便方法求得日出日落時日光進入大氣層偏折的角度，無須假借任何光學儀器。
2. 研究步驟㈡的公式以電腦計算，準確度高，求得偏折角β爲33.99分。
3. 由我們的研究得到光線自真空進入空氣的折射率爲1.000446。

八、參考資料

張惠民　地球科學概論
天文年鑑　1992
Sunrise and Sunset 1992
Universal Time For Meridian of Greenwich

評　語

1. 以不同緯度的太陽高度角及太陽之入射角，並透過簡單的三角函數及電腦程式計算，可求得準確度極高的日出日落時間。
2. 作者創造能力很強，思考程序也很優秀。