多面體的等表面積問題

高中組數學科第三名

省立新竹高級中學

作　　者：胡俊光

指導教師：許燦煌

一、研究動機

在平面上，具有相等周長的多邊形，以正多邊形的面積爲最大。在空間中，具有相等表面積的多面體，〝很直覺地〞以爲正多面體的體積最大，我們先從四面體、六面體、八面體、十二面體以及二十面體逐一探討，以確定這種直覺是否正確？另外，以處理正多面體的經驗，也涉獵到許多非正多面體等表面積問題。

二、研究內容

㈠四面體

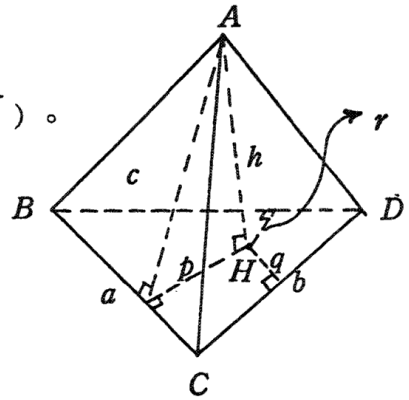
如圖㈠，在一四面體ABCD，底面積爲T，

表面積$S=T+\frac{1}{2}\left(a\sqrt{h^2+p^2}+b\sqrt{h^2+q^2}+c\sqrt{h^2+r^2}\right)$。

另一正三稜錐A′B′C′D′與ABCD有相等底面積，

其表面積$S_0=T+\frac{1}{2}\left(a_0+b_0+c_0\right)\sqrt{h_0^2+r_0^2}$

（r_0爲底內切圓半徑，a_0、b_0、c_0爲底三邊長）



圖一

$$\because \sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2} \geqq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^2}$$

$$\therefore a\sqrt{h^2+p^2}+b\sqrt{h^2+q^2}+c\sqrt{h^2+r^2} \geqq \sqrt{h^2(a+b+c)^2+4T^2}$$

而$\left(a_0+b_0+c_0\right)\sqrt{h_0^2+r_0^2}=\sqrt{h_0^2\left(a_0+b_0+c_0\right)^2+4T^2}$　令　$S=S_0$

$$\Rightarrow \sqrt{h_0^2\left(a_0+b_0+c_0\right)^2+4T^2} \geqq \sqrt{h^2(a+b+c)^2+4T^2} \quad \therefore h_0>h$$

故等表面積四面體中以正三稜錐體積較大。同理，各面皆爲正三角形時體積最大（即正四面體）。

㈡六面體

1. (1)如圖㈡，平面六面體和直稜柱有相同的底。垂足到底各邊之距離P_i（i=1

～4）。

平行六面體側表面積

$$S=\sum_{i=1}^{4} a_i\sqrt{h^2+p_i^2} \geqq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{4} a_i h\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{4} a_i p_i\right)^2},$$

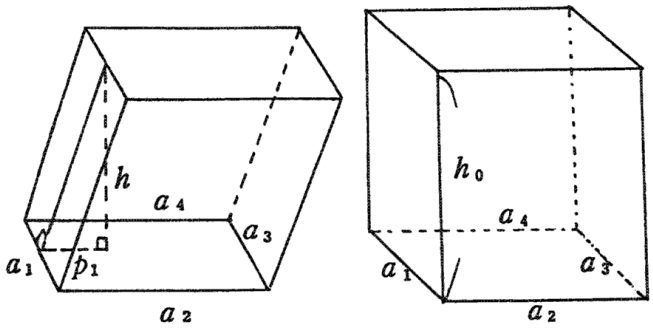
直稜柱側表面積

$$S_0=\sum_{i=1}^{4} a_i h_0=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{4} a_i h_0\right)^2}$$

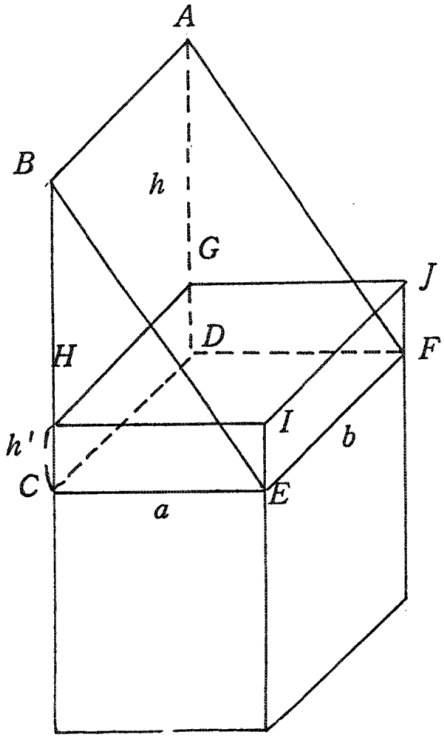
令 $S=S_0$，則$h_0 \geqq h$，故平行六面體中以直稜柱體積較大。

(2)等表面積及底面積的正稜柱與直稜柱，因正稜柱底周長不大於直稜柱，則其高大於等直稜柱，故直稜柱中以正稜柱體積較大。

(3)長方體高h，底一邊長a，表面積$S=2a^2+4ah$，體積$V=a^2h$，由算幾不等式得表面積一定時，a＝h時體積最大，總結以上三項，平行六面體中以正六面體體積最大。



圖二



圖三

2. 如圖(三)，上下底平行與不平行的角錐台有等表面積，則ABCDEF與GHIJDCEF有等表面積

$$\Rightarrow h'=\frac{b\sqrt{h^2+a^2}-ab}{2(a+b)}+\frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow \text{長方體減三角柱的體積}\ \frac{ab^2\left(\sqrt{h^2+a^2}-a\right)}{2(a+b)} \geqq 0$$

故角柱台上下底平行有較大體積，同理一般各平面不平行的角錐台體積小於平行六面體，即小於正六面體。

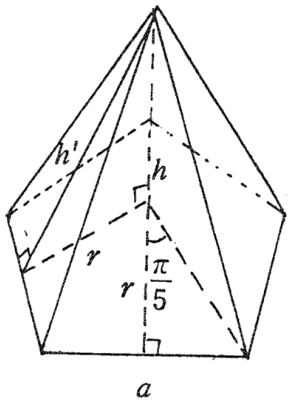
3. 斜五稜錐及正五稜錐等表面積及底面積時，仿四面體作法，可得正五稜錐體

積較大。高應該取多少可得最大體積？

設底一邊長a，高h，

表面積 $S=\frac{5}{4}a^2\cot\frac{\pi}{5}+\frac{5}{2}a\sqrt{h^2+(\frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{5})^2}$

體　積 $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}a^2\cot\frac{\pi}{5}\cdot h$



圖四

利用代入法消去a^2得 $V=\frac{S^2}{3}\cot\frac{\pi}{5}\cdot\frac{h}{5h^2+2S\cot\frac{\pi}{5}}$

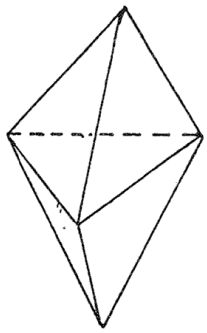
令 $f(h)=\frac{h}{5h^2+2S\cot\frac{\pi}{5}}\Rightarrow f'(h)=-(5h^2-2S\cot\frac{\pi}{5})/(5h^2+2S\cot\frac{\pi}{5})^2$

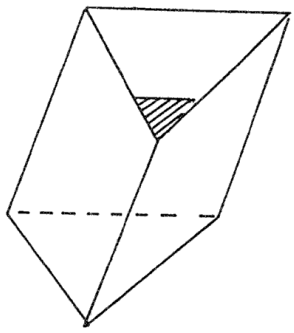
令 $f'(h)=0\Rightarrow h=\sqrt{\frac{2}{5}S\cot\frac{\pi}{5}}$，

此時正五稜錐體積最大。其實，一般的正n稜錐的高爲底一邊長的 $\sqrt{2}\cot\frac{\pi}{n}$ 倍的正稜錐體積最大。

4. 兩個四面體合併的六面體（圖五），以兩個四面體合併體積最大，與正六面體等表面積時，仍以正六面體體積較大。

最後，截角三角柱（圖六）在等表面積下，截角愈大，體積愈小，故以正三角柱與正六面體比較，由㈥其他面體可知，仍以正六面體體積較大。


圖五


圖六

㈢八面體

1. 正六面體與正八面體有等表面積時，經計算，正八面體體積較大，故截角六面體體積較正八面體小。
2. 兩個四稜錐合併之八面體，以兩個正四稜錐的併體體積較大，設底一邊長2b，高h，

側表面積$S_1=4b\sqrt{b^2+h^2}$，體積$V_1=\frac{4}{3}b^2h$

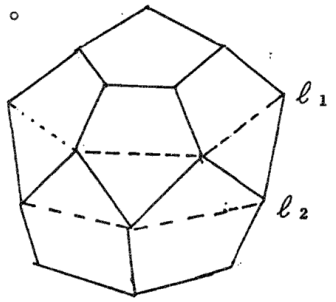
$$\Rightarrow S_1 = 2\sqrt{3V_1}\sqrt{\frac{3V_1+4h^3}{4h^2}}$$

仿六面體以微分的方法處理，當體積一定時，$h=\sqrt{2}b$時有最小表面積，即正八面體。

3. 另外，正六角柱高h，底一邊長d，表面積$S_2=3\sqrt{3}d^2+6dh$，體積$V_2=\frac{3}{2}\sqrt{3}d^2h$，令其與正八面體等表面積，計算後，二者體積相等，故等表面積八面體中，具有最大體積者不一定就是正八面體。

(四)十二面體

1. 對平行十二面體作頂面之平行平面，如圖(七)，截兩個五邊形ℓ_1及ℓ_2，仿四面體可得ℓ_1，ℓ_2所截之五角錐台上下皆爲正五邊形時，體積最大，同時，平行十二面體中，每一面皆爲正五邊形的正十二面體體積最大。



圖七

2. 諸如正十一角錐，正十角柱及截角多面體在表面積相等時，仿六面體之推導，體積皆小於正十二面體。
3. 現在考慮圓柱，高h，底圓半徑r，表面積$S=2\pi r^2+2\pi rh$，體積$V=\pi r^2h$，由算幾不等式得$h=2r$時有最大體積，而正十二面體表面積$S'=15x^2\cot\frac{\pi}{5}$，體積$V'\doteqdot 7.6618x^3$，

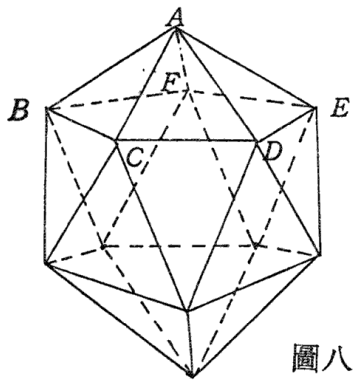
$$當S=S' \Rightarrow r=\sqrt{\frac{5\cot\frac{\pi}{2}}{2\pi}}\,x \Rightarrow V\doteqdot 7.20116x^3<V'$$

故正十二面體與圓柱與等表面積時，正十二面體體積較大。

(五)二十面體

1. 設正二十面體一稜長a，表面積$S=5\sqrt{3}a^2$，體積$V=\frac{5}{12}(3+\sqrt{5})a^3$，令其與正十二面體等表面積，正十二面體一稜長x $\Rightarrow a=\sqrt{\sqrt{3}\cot\frac{\pi}{5}}\,x$，而$V\doteqdot 8.02683x^3>v'$，故等表面積的正十二及正二十面體，以正二十面體體積較大，也就比正十八角柱還大。
2. 考慮圖(八)，將正二十面體頂一正五角錐ABCDEF，調整其高以得最大體積，設正五角錐高h，

底一邊長a，體積$V=\frac{5}{12}a^2\cot\frac{\pi}{5}\cdot h$，



圖八

側表面積$S=\frac{5}{2}a\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}\cot^2\frac{\pi}{5}}$，今固定體積V，$a^2=\frac{12V}{5h\ \cot\frac{\pi}{5}}$

$\Rightarrow S=\frac{5}{2}\sqrt{\frac{12V}{5\cot\frac{\pi}{5}}}\cdot\sqrt{\frac{5h^3+V\cot\frac{\pi}{5}}{5h^2}}$，利用微分，令

$f(h)=\frac{5h^3+3V\cot\frac{\pi}{5}}{5h^2}\Rightarrow f'(h)=\frac{75h^4-10h(5h^3+3V\cot\frac{\pi}{5})}{25h^4}$

，當$f'(h)=0$有最小表面積，此時$h=\sqrt[3]{\frac{6}{5}V\cot\frac{\pi}{5}}$，得新二十面體表面積

爲$\frac{5}{2}\sqrt{3}(1+\cot\frac{\pi}{5})a^2$，令其等於正二十面體表面積$5\sqrt{3}x^2$（x爲一稜長）

$\Rightarrow a=\sqrt{\frac{2}{1+\cot\frac{\pi}{5}}}x$，新體積$=2\cdot\frac{5}{12\sqrt{2}}\cot^2\frac{\pi}{5}\cdot a^3+[\frac{5}{12}(3+\sqrt{5})x^3$

$-2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}x^2\cot\frac{\pi}{5}\cdot\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2-(\frac{x}{2}\cot\frac{\pi}{5})^2}]\doteqdot 0.86175x^3+$

$\frac{5}{12}(3+\sqrt{5})x^3-0.60312x^3>\frac{5}{12}(3+\sqrt{5})x^3$（正二十面體體積）

故等表面積的二十面體中，正二十面體不具最大體積。

㈥其他形體

1. 正n角柱高應取多少可得最大體積？設底一邊長a，高h，表面積$S=\frac{h}{2}a^2\cot\frac{\pi}{n}+nah$，體積$V=\frac{n}{4}a^2h\ \cot\frac{\pi}{n}$，由算幾不等式得表面積一定時，$h=a\cot\frac{\pi}{n}$時有最大體積。

2. 正n角柱及正h＋1角柱各別最大體積何者爲大？
設前者底一邊長a，後者底一邊長x，令其表面積相等

$\Rightarrow a=\sqrt{\frac{(n+1)\cot\frac{\pi}{n+1}}{n\ \cot\frac{\pi}{n}}}x\Rightarrow\frac{V_n}{V_{n+1}}=\sqrt{\frac{\cot\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\Big/\frac{\cot\frac{\pi}{n+1}}{\frac{\pi}{n+1}}}$，利用

微分，令 $f(\theta)=\dfrac{\cot\theta}{\theta}$（$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$）$\Rightarrow f'(\theta)=\dfrac{(-\csc^2\theta)\cdot\theta-\cot\theta}{\theta^2}<0$

$\therefore$ $f(\theta)$在 $\theta\in$（0，$\dfrac{\pi}{2}$）內爲遞減函數，故 $\dfrac{\cot\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}<\dfrac{\cot\frac{\pi}{n+1}}{\frac{\pi}{n+1}}$，所以正n＋1角柱體積較正n角柱大。

3. 仿照以上做法，我們將各種的同面體找出體積最大者互相比較：

(1)五面體：正三角柱＞正四角錐與截角四面體。

(2)七面體：正五角柱＞截角六面體及三角錐、柱合併體。

(3)九面體：正七角柱＞正六角柱及四角錐柱合併體＞截角八面體。

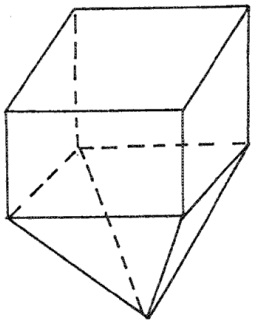
(4)十面體：正八角柱＞二個五角錐的合併體。

(5)十一面體：正九角柱＞五角錐柱合併體。

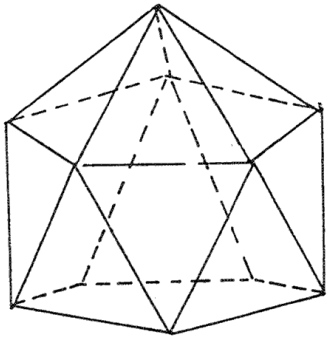
(6)十三至十九面體：截角十二面體＞圓柱＞正多角柱＞錐柱合併體。

(7)十六面體：截角十二面體＞正二十面削體（如圖十）

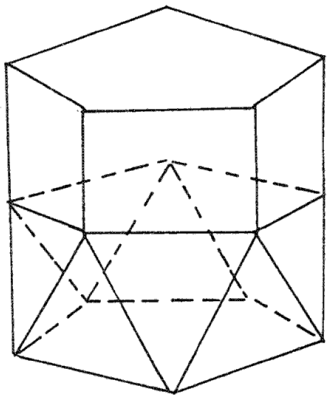
(8)十七面體：截角十二面體＞正十二面外立五角錐體與正二十面變體（如圖十一）。



圖九



圖十



圖十一

三、結論

(一)在空間中，具有相等表面積的多面體中，以正四面體、正六面體及正十二面體的體積較大，這與平面上，具有相等周長的多邊形以正多邊形的面積爲最大吻合；但在八面體中，具有最大體積者不一定就是正八面體，在二十面體中，正二十面體根本就不具最大體積。

(二)在正多面體等表面積的推導過程中，發現具有較大體積的形體普遍具有對稱、

規則等性質。對於其他非正多面體，試著就對稱規則等形體一一過濾、比較，尋求具有較大體積的形體，以下就是這些結果：

n 面體	迄今，我們所找到的表面積相等時具有最大體積的形體
4	正四面體
5	正三角柱（高爲底邊長的$\frac{\sqrt{3}}{3}$倍）
6	正六面體
7	正五角柱（高爲底邊長的$\cot\frac{\pi}{5}$倍）
8	正八面體或正六角柱（高爲底的$\sqrt{3}$倍）
9	正七角柱（高爲底邊長的$\cot\frac{\pi}{7}$倍）
10	正八角柱（高爲底邊長的$\cot\frac{\pi}{8}$倍）
11	正九角柱（高爲底邊長的$\cot\frac{\pi}{9}$倍）
12	正十二面體
13～19	將正十二面體削去一至七個小角而得的面體。
20	將正二十面體的頂與底的角錐之高拉長爲原稜長的$\frac{\sqrt{2}}{2}\cot\frac{\pi}{5}$倍

四、參考資料

數學與猜想——九章出版社（波利亞著）

評　語

n面體的表面積相同，面積以何形爲最大，作者對不同的n做了一些初步的討論。這是一個複雜的問題，但作者能夠逐步理清一些比較可以掌握的部分以及一些較爲混沌的部份。作者主要採用單變數求極值的方式加以決定，是高中生典型的解題方法。