

# 四面體全等條件之歸納

## 高中組數學科第三名

高雄市立高雄高級中學

作 者：余家光、陳俞宏

指導教師：張簡平正

### 一、研究動機

某日，回味以前的國中課本時，看到三角形全等的條件，又突然想到現在所學的空間幾何，並未證明全等，於是邀集了同學，一起研討空間四面體的全等條件。

### 二、研究目的

- (一)探討平面上多邊形全等的意義，並由此推展到空間裡多面體全等的意義。
- (二)由三角形全等條件之分析比較，推展到四面體全等條件。
- (三)驗證四面體全等的條件。

### 三、研究過程

- (一)探討平面上多邊形全等的意義，並由此推展到空間裡多面體全等的意義。

1. 首先探討全等情形：

全等意義為何？當圖形A上任一點，均有唯一對應點在圖形B上，則稱 $A \cong B$ （A和B全等）。

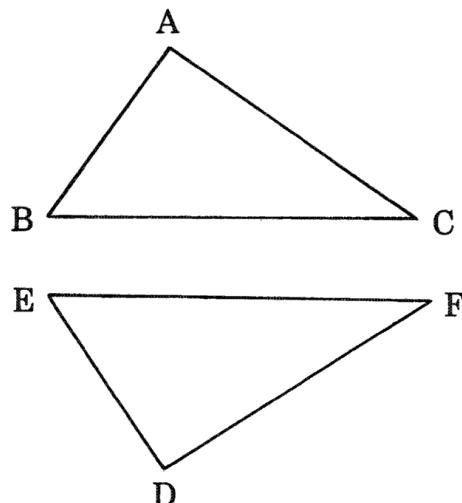
2. 再則談到平面上多邊形：

多邊形其各點均互相對應，所以對應邊相等，對應角相等。

如右上圖， $\triangle DEF$ 在轉了若干角度，移動若干距離後，若能和 $\triangle ABC$ 重合或和 $\triangle ABC$ 成線對稱圖形，則稱 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。

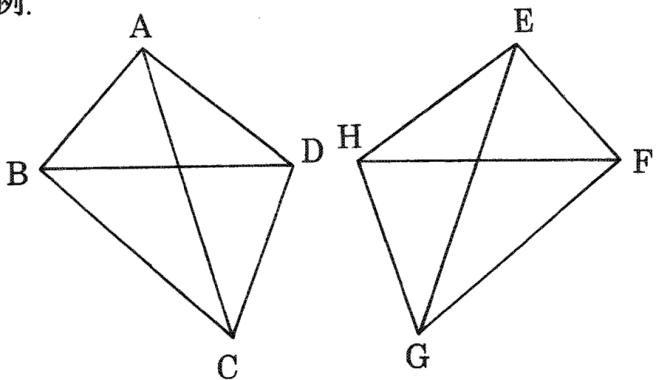
3. 現在看到空間上多面體，多面體因其各點均互相對應，所以對應面全等，對應二面角相等。

例：



如圖，四面體EFGH在轉了若干角度，移動若干距離後，若能和四面體ABCD重合或和四面體ABC成面對稱圖形，則稱四面體ABCD $\cong$ 四面體EFGH。

例：



(二)由三角形全等條件之分析比較，推展至四面體全等條件。

1. 首先三角形全等條件：

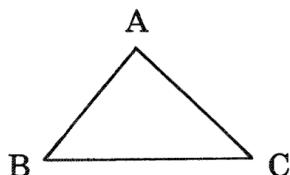
兩三角形全等 $\equiv$ 兩三角形對應邊相等，對應角相等， $\therefore$ 要判定三角形全等，原須SSSAAA六條件一起，但在一番省略後形成下列8形式：SSS，SSA，SAS，ASS，SAA，ASA，AAS，AAA，但在一番驗證之後，只留下下列四種：SSS，SAS，ASA，AAS（SAA和AAS同義），因此，三角形一番簡化後，定以三個條件來判斷之。

2. 四面體全等條件：

四面體全等 $\equiv$ 兩四面體對應面全等，對應二面角相等， $\therefore$ 要判定三角形全等，原須EEEEAAAA（E： $\triangle$ 全等，A：二面角相等）又因為其為四面體，所以我們決定濃縮為三個或四個。（因為二個條件不可能判斷）

3. 列出其三個條件的所有可能：

EEE	EAA
EEA	AEA
EAE	AAE
AEE	AAA



在此需先定義一下，因為平面上三角形 $S_1S_2A_1A_2\cdots\cdots$ 等， $S_1 \Rightarrow \overline{AC}$ ， $S_2 \Rightarrow \overline{AB}$ ， $A_1 \Rightarrow \angle ABC$ ， $A_2 \Rightarrow \angle BCA$ ，則兩S相交同一點，S為A上之邊，而另兩A又有其共同邊，因此我們定義 $E_1E_2A_1A_2$ 上， $E_1E_2$ 上有一共同邊， $A_1$ 二面角之其中一面必為 $E_2$ ，且 $A_1$ 其稜長等長，又 $A_1A_2$ 必一共同面，其條件不相鄰者可以相鄰論，也可以不相鄰論。

又三個條件的所有可能，可簡化為：

EEE    AEA

EEA AAE

EAE AAA

4. 列出四個條件的所有可能：

EEEE AEEE AEEA AEAA

EEEA EAAA AEAE AAEA

EEAE EAEC AAEE AAAE

EAEE EAAE EAAA AAAA

共 $2^4 = 16$  種，因其16種不甚多，故可一一驗證。

### (三) 驗證四面體全等條件：

1. 首先看三個條件者

#### (1) EEE

[已知] :  $\triangle ABD \cong \triangle EFH$

$\triangle ACD \cong \triangle EGH$

$\triangle BCD \cong \triangle FGH$

[求證] : 四面體ABCD  $\cong$  四面體EFGH

[證明] : ① 在 $\triangle ACD$ 上，作 $\overline{CD}$ 上高 $\overline{AI}$

在 $\triangle EGH$ 上，作 $\overline{GH}$ 上高 $\overline{EJ}$

②  $\because \triangle BCD \cong \triangle FGH$

$\therefore \overline{CD} = \overline{GH}$

$\therefore$  將 $\overline{GH}$ 疊合在 $\overline{CD}$ 上

以J為圓心， $\overline{GH}$ 為軸， $\overline{EJ}$ 為半徑畫圓 $O_1$ 。

③ 在 $\triangle ABD$ 上作 $\overline{BD}$ 上高 $\overline{AK}$

在 $\triangle EFH$ 上作 $\overline{FH}$ 上高 $\overline{EL}$

④  $\because \triangle ABD \cong \triangle EFH$

$\therefore \overline{BD} = \overline{FH}$

$\therefore$  將 $\overline{FH}$ 疊合在 $\overline{BD}$ 上

以L為圓心， $\overline{FH}$ 為軸 $\overline{EL}$ 為半徑畫圓 $O_2$ 。

⑤  $\because E$ 在圓 $O_1$ 上，又E在圓 $O_2$ 上

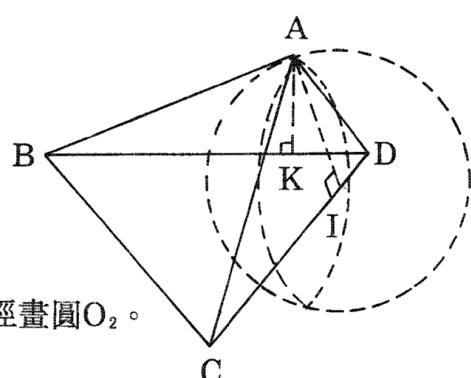
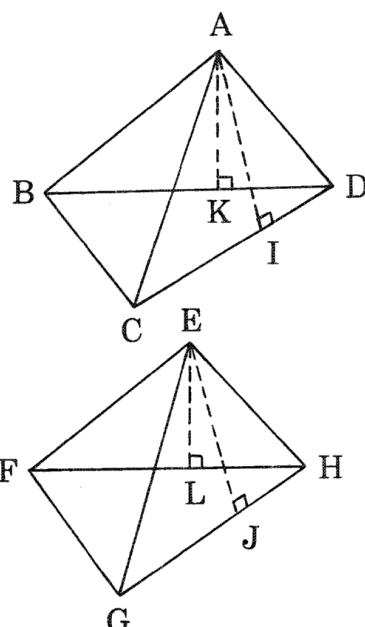
$\therefore E$ 為圓 $O_1$ 與圓 $O_2$ 之交點

⑥  $\because \triangle ACD \cong \triangle EGH$

$\therefore \overline{AI} = \overline{EJ}$ , I = J

$\therefore A$ 必在圓 $O_1$ 上

⑦ 同理A必在圓 $O_2$ 上



又 $\because$ 兩圓必在同軸同半徑下才有三個以上交點

$\therefore A = E$ 或 $A$ 為 $E$ 對平面 $BCD$ (或平面 $FGH$ )之面對點。

⑧又 $\because \triangle BCD \cong \triangle FGH$

$\therefore B = F, C = G, D = H$

$\therefore$ 四面體 $ABCD \cong$ 四面體 $EFGH$

在此，我們先提出一個我們另外發現的重要定理：

定理一：空間中一圓與平面 $E$ 僅有一交點，則此交點與圓心之連線和圓軸所構成之平面必和平面 $E$ 互相垂直。

[已知]：圓 $O$ 與平面 $E$ 。 $B, D$ 為圓 $O$ 和平面 $E$ 之兩交點， $C$ 為 $BD$ 中點， $A$ 為圓軸上任一點。

[求證]：平面 $ACO$ 垂直平面 $E$

[證明]： $\because \overline{AO} \perp \overline{CO}$

(一直線若垂直一平面，則此一直線必垂直平面上任一直線)

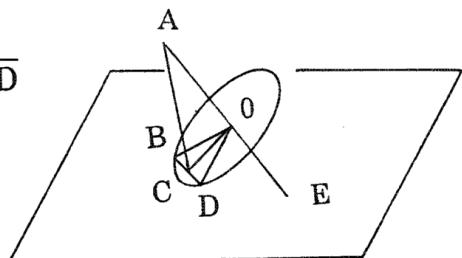
又 $\overline{CO} \perp \overline{BD}$

$\therefore$ 根據三垂線定理， $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

$\therefore \overline{AC} \perp \overline{BD}, \overline{CO} \perp \overline{BD}$

$\therefore$ 平面 $ACO$ 垂直 $\overline{BD}$

$\Rightarrow$ 平面 $ACO$ 垂直平面 $E$



(若甲平面與一直線垂直，則甲平面必垂直包含此直線之任一平面)

$\Rightarrow$ 若此交點為切點，則 $B, C, D$ 共點  $\Rightarrow$ 切點與圓軸所構成之平面必垂直平面 $E$ 。

## (2)EEA

[已知]： $\triangle BCD \cong \triangle FGH$

$\triangle ABC \cong \triangle EFG$

$\angle ABC - \angle ABD = \angle EFG - \angle EFH$

[求證]：四面體 $ABCD \cong$ 四面體 $EFGH$

[證明]：① $\because \triangle ABC \cong \triangle EFG$

$\therefore$ 將 $\triangle ABC$ 疊合在 $\triangle EFG$ 上

又 $\angle ABC - \angle ABD = \angle EFG - \angle EFH$

$\therefore$ 平面 $ABD$ ，平面 $EFH$ 重合

②在 $\triangle BCD$ 上作 $\overline{BC}$ 之高 $\overline{DI}$

在 $\triangle HFG$ 上作 $\overline{FG}$ 之高 $\overline{HJ}$

③以J為圓心， $\overline{FG}$ 為軸， $\overline{HJ}$ 為半徑畫圓

$\because H$ 在圓上，又 $H$ 在平面 $EFH$ 上

$\therefore$ 此圓與平面 $EFF$ 之交點至少有一個

又 $\because \overline{HJ}$ 不在平面 $EFH$ 上

$\therefore$ 交點不超過兩個  $\Rightarrow$  交點一個或二個

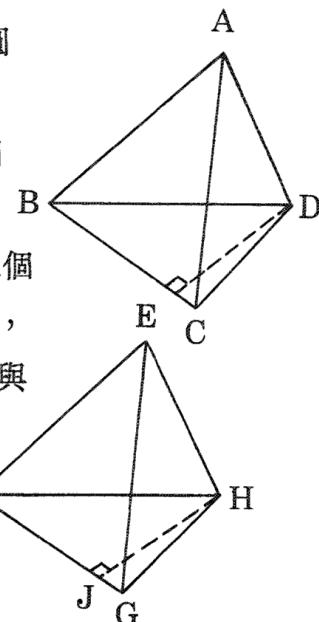
④以 $\overline{FG}$ 為軸， $\overline{HJ}$ 為半徑，根據定理一，

若與平面 $EFH$ 只有一交點，則 $\overline{FG}$ 與 $\overline{HJ}$ 構成之平面 $FGH$ 必垂直平面 $EFH$

$\circ$

$\Rightarrow$ 不能確定是否只有一交點

$\Rightarrow$ 矛盾， $\therefore$ 不合，無法證明。



(3) EAE

[已知] :  $\triangle ABC \cong \triangle EFG$

$\triangle ABD \cong \triangle EFH$

$\angle ABD - \angle ABC = \angle EFH - \angle EFG = \theta$

( $ABD$ 和 $ABC$ 之二面角等於 $EFH$ 和 $EFG$ 之二面角)

[求證] : 四面體 $ABCD \cong$ 四面體 $EFGH$

[證明] : ①  $\because \triangle ABC \cong \triangle EFG$

$\therefore \overline{AC} = \overline{EG}$

②  $\because \triangle ABD \cong \triangle EFH$

$\therefore \overline{AD} = \overline{EH}$

③ 又 $\because \triangle ABC \cong \triangle EFG$ ，

$\triangle ABD \cong \triangle EFH$ ，

$\angle ABD - \angle ABC = \angle EFH - \angle EFG$

$\therefore$ 兩三角形之二邊均固定

$\Rightarrow \angle DAC = \angle HEG$

根據三角形全等關係中SAS條件得 $\triangle ACD \cong \triangle EGH$

$\Rightarrow$ 三面全等，根據EEE得兩四面體全等

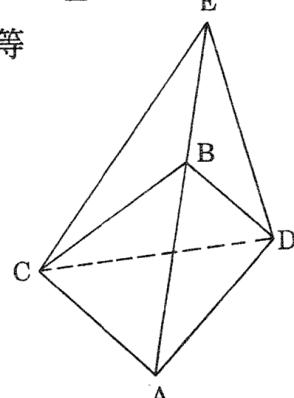
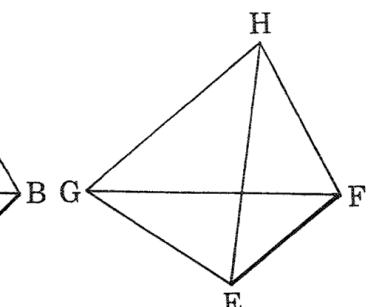
(4) AEA

在此，我們用反證法，如圖

$\triangle ACD \cong \triangle ACD$

$\angle AED - \angle ACD = \angle ABD - \angle ACD$

$\angle AEC - \angle ACD = \angle ABC - \angle ACD$



符合AEA

但 $AEC\bar{D}=ABCD+BCDE \neq ABCD$

$\therefore AEA$ 不符合

### (5)AAE

根據前面A與E關係排列之定義，有兩種情形：

- $\begin{cases} ① \text{第一個A二面角之一面為E，則AAE} \Rightarrow AEA \Rightarrow \text{不合} \\ ② \text{第一個A二面角沒有任一面為E。} \end{cases}$

在證此之前，在此先提出兩個我們另外發現的定理。

定理二：

[已知]：平面E上有兩直線 $L_1, L_2$ 。平面F過 $L_1$ ，且和E夾 $\theta_1$ 角，平面G過 $L_2$ 且和E夾 $\theta_2$ 角，F和G交角 $\theta_3$ 。

[求證]： $\theta_3$ 固定。

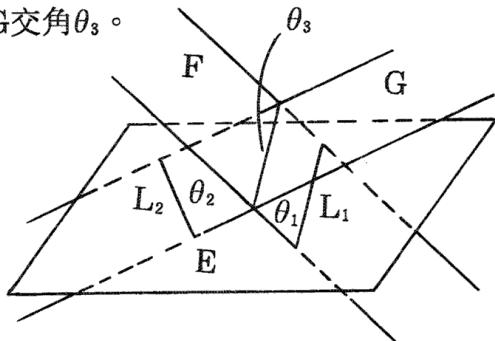
[證明]：①EF夾 $\theta_1$ 角，且F過 $L_1$ ，

$\therefore F$ 唯一

②EG夾 $\theta_2$ 角，且G過 $L_2$ ，

$\therefore G$ 唯一

③ $\because F, G$ 唯一， $\therefore$ 兩面夾角固定， $\therefore \theta_3$ 固定。



由定理二，我們可推知定理三。

定理三：

[已知]：平面E上有 $L_1L_2$ ，

平面F過 $L_1$ 與E交 $\theta_1$ ，

平面G過 $L_2$ 與F交 $\theta_3$ 。

[求證]：平面G和平面E交 $\theta_2$ 固定

[證明]：①證 $P \rightarrow q$ 為真

$\equiv$ 證 $\sim q \rightarrow \sim P$ 為真

②設 $\theta_2$ 不固定，又 $L_2$ 固定， $L_1$ 固定， $\theta_1$ 固定，則根據定理二， $\theta_3$ 不固定，但 $\theta_3$ 固定  $\Rightarrow$  矛盾， $\therefore$  當 $L_2$ 固定， $L_1$ 固定， $\theta_1$ 固定， $\theta_3$ 固定，則 $\theta_2$ 固定。如圖，

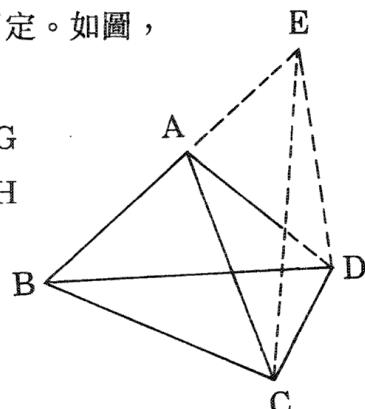
[已知]： $\triangle BCD \cong \triangle FGH$

$$\angle BCD - \angle ABC = \angle FGH - \angle EFG$$

$$\angle ABC - \angle ABD = \angle EFG - \angle EFH$$

由定理三，可得

$$\angle ABD - \angle BCD =$$



$\angle EFH - FGH$

又 $\because \triangle BCD \cong \triangle FGH$

$\therefore$ 將 $\triangle FGH$ 疊合在 $\triangle BCD$ 上

又 $\because \angle ABC - ACD = \angle EFG - FGH$

$\angle ABD - BCD = \angle EFH - FGH$

$\therefore B$ 固定，而A在 $\overleftrightarrow{EF}$ 上。

四面體ABCD + 四面體EACD = 四面體EFGH

$\therefore$ 不合

#### (6)AAA

如圖， $L_1, L_2, L_3$ 固定交於A點，則 $\angle L_3 L_1 L_2$ ，

$\angle L_1 L_2 L_3$ ， $\angle L_2 L_3 L_1$ 固定，符合AAA之條件，

但四面體AEFG = 四面體ABCD + 多面體BCDGFE

$\therefore$ 不合

由以上總結，可判斷

(○) EEE (×) AEA

(×) EEA (×) AAE

(○) EAE (×) AAA

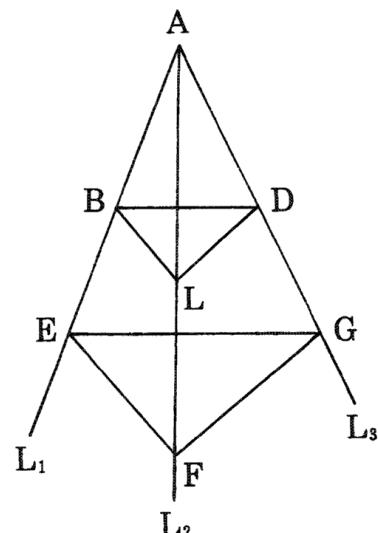
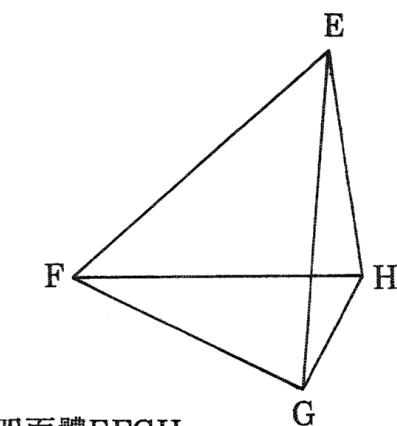
#### 2. 現在看四個條件

EEEE AEEE AEEA AEAA

EEEA EEAA AEAE AAEA

EEAE EAEA AAEE AAAE

EAEE EAAE EAAA AAAA



(1)由1. 之(1)的條件EEE可見EEEE, EEEA, EEAЕ, EAEE, AEEE

(○) EEEE (○) AEEE AEEA AEAA

(○) EEEA EEAA AEAE AAEA

(○) EEAЕ EAEA AAEE AAAE

(○) EAEE EAAE EAAA AAAA

(2)由1. 之(3)的條件EAЕ可見EEEA, AEAE成立

(○) EEEE (○) AEEE AEEA AEAA

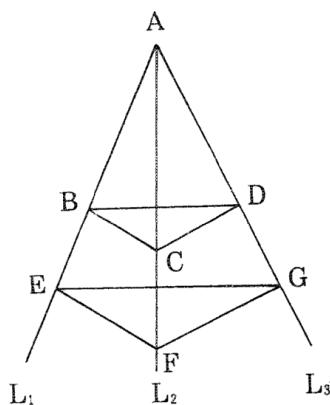
(○) EEEA EEAA (○) AEAE AAEA

(○) EEAЕ EAEA AAEE AAAE

(○) EAEE EAAE EAAA AAAA

(3)再者，討論AAAA

如圖，四面體ABCD  
和四面體AEFG有  
AAAA條件，但四  
面體AEFG等於四  
面體ABCD+多面  
體BCDGFE。  
 $\therefore$ 不合



(○) EEEE	(○) AEEE	AEEA	AEAA
(○) EEEA	EEAA	(○) AEAE	AAEA
(○) EEAE	(○) EAEA	AAEE	AAAE
(○) EAEE	EAAA	EAAA	(×) AAAA

(4)接下來，討論三個A的情形，可分類為

[ EAAA    [ AEAA    兩組  
      AAAE    AAEA

① [ EAAA 根據A與E排列關係之定義，可分為下列圖形

ⓐ  $\triangle BCD$ 有一對應三角形

$\angle BCD - ABC$ 有對應角

$\angle BCD - ACD$ 有對應角

$\angle BCD - ABD$ 有對應角

ⓑ  $\triangle BCD$ 有一對應三角形

$\angle BCD - ABC$ 有對應角

$\angle BCD - ACD$ 有對應角

$\angle ABC - ABD$ 有對應角

ⓒ  $\triangle BCD$ 有一對應三角形

$\angle BCD - ABC$ 有對應角

$\angle BCD - ACD$ 有對應角

$\angle ABC - ACD$ 有對應角

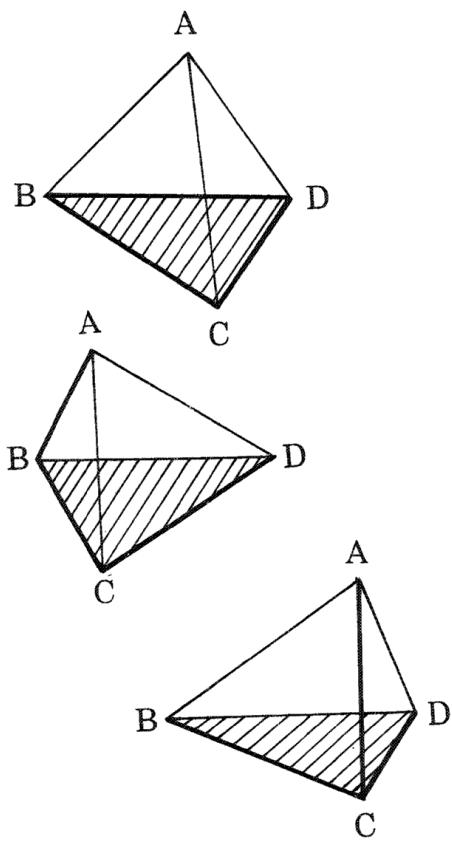
ⓓ  $\triangle BCD$ 有一對應三角形

$\angle BCD - ABC$ 有對應角

$\angle ABC - ABD$ 有對應角

$\angle ABC - ACD$ 有對應角

ⓔ  $\triangle BCD$ 有一對應三角形



$\angle BCD - \angle ACD$  有對應角

$\angle ACD - \angle ABD$  有對應角

$\angle ABD - \angle ABC$  有對應角

④ [已知] :  $\triangle BCD \cong \triangle FGH$

$$\angle BCD - \angle ABC = \angle FGH - \angle EGH$$

$$\angle BCD - \angle ABD = \angle FGH - \angle EFH$$

$$\angle BCD - \angle ACD = \angle FGH - \angle EGH$$

[求證] : 四面體ABCD  $\cong$  四面體EFGH

[證明] :  $\triangle BCD \cong \triangle FGH$

將 $\triangle FGH$ 疊合在 $\triangle BCD$ 上

$$\therefore \overline{CD} = \overline{GH} \rightarrow \text{固定}, \text{又 } \angle ACD - \angle BCD = \angle EGH - \angle FGH$$

$$\therefore \text{平面} ACD = \text{平面} EGH \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{同理平面} ABD = \text{平面} EFH \dots\dots \textcircled{2}$$

由①②兩相交平面決定一直線

$$\overleftrightarrow{AD} = \overleftrightarrow{EH} \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\text{同理} \overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{EF} \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\text{由} \textcircled{3} \textcircled{4} \text{兩直線決定一點 } \therefore A = E$$

又 $\because \triangle BCD \cong \triangle FGH$

$$\therefore B = F, C = G, D = H$$

$\therefore$ 四面體ABCD  $\cong$  四面體EFGH

⑤ [已知] :  $\triangle BCD \cong \triangle FGH$

$$\text{且 } \angle BCD - \angle ABC = \angle FGH - \angle EFG$$

$$\angle BCD - \angle ACD = \angle FGH - \angle EGH$$

$$\angle ABC - \angle ABD = \angle EFG - \angle EFH$$

[求證] : 四面體ABCD  $\cong$  四面體EFGH

[證明] :  $\because \triangle BCD \cong \triangle FGH \dots\dots \textcircled{1}$

$$\therefore \overline{BC} = \overline{FG} \quad \overline{BD} = \overline{FH}$$

$$\therefore \angle ABC - \angle ABD = \angle EFG - \angle EFH$$

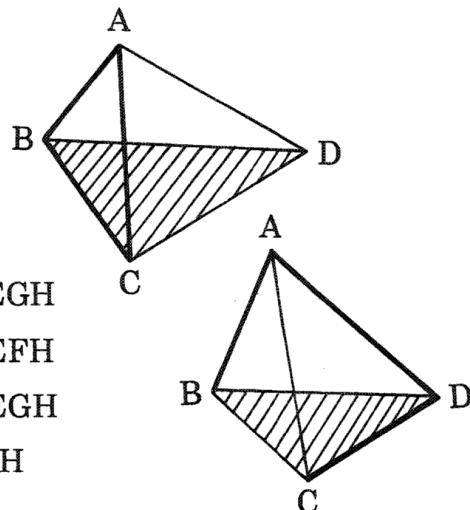
$$\angle ABC - \angle BCD = \angle FGH - \angle EFG \dots\dots \textcircled{2}$$

根據定理三

$$\angle ABD - \angle BCD = \angle EFH - \angle FGH \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\text{又 } \angle BCD - \angle ACD = \angle FGH - \angle EFH \dots\dots \textcircled{4}$$

由①②③④  $\Rightarrow$  情形與④相同, 得證



- ④ [ 已知 ] :  $\triangle BCD \cong \triangle FGH$
- $$\angle ABC - BCD = \angle EFG - FGH$$
- $$\angle ABC - ACD = \angle EFG - EGH$$
- $$\angle ACD - BCD = \angle EGH - FGH$$
- [ 求證 ] : 四面體ABCD  $\cong$  四面體EFGH
- [ 證明 ] :  $\because \triangle BCD \cong \triangle FGH$
- $$\angle ABC - BCD = \angle EFG - FGH$$
- $$\angle ACD - BCD = \angle EGH - FGH$$
- 可得  $\angle ABC - ACD = \angle EFG - EGH$  ( 定理二 )
- $\therefore$  條件和AEA同義  $\rightarrow$  不可
- ⑤ [ 已知 ] :  $\triangle BCD \cong \triangle FGH$
- $$\angle ABC - BCD = \angle EFG - FGH$$
- $$\angle ABC - ABD = \angle EFG - EFH$$
- $$\angle ABC - ACD = \angle EFG - EGH$$
- [ 求證 ] : 四面體ABCD  $\cong$  四面體EFGH
- [ 證明 ] :  $\because \triangle BCD \cong \triangle FGH$
- $$\angle ABC - BCD = \angle EFG - FGH$$
- $$\angle ABC - ACD = \angle EFG - EGH$$
- 根據定理三
- $$\angle ACD - BCD = \angle EGH - FGH$$
- $\Rightarrow$  情形與⑥相同，得證
- ⑥ [ 已知 ] :  $\triangle BCD \cong \triangle FGH$
- $$\angle ABC - ABD = \angle EFG - EFH$$
- $$\angle ABD - ACD = \angle EFH - EHG$$
- $$\angle ACD - BCD = \angle EGH - FGH$$
- [ 求證 ] : 四面體ABCD  $\cong$  四面體EFGH
- [ 證明 ] :  $\because \triangle BCD \cong \triangle FGH$
- $$\angle ABD - ACD = \angle EFH - EGH$$
- $$\angle ACD - BCD = \angle EGH - FGH$$
- 根據定理二
- $$\angle ABD - BCD = \angle EFH - FGH$$
- $\Rightarrow$  情形與⑥相同，得證
- ⑦ [ AEEA 根據A與E排列關係之定義，可分為下列圖形  
AAEA ]

- ⓐ  $\triangle BCD$  有對應三角形  
 $\angle ABC - BCD$  有對應角  
 $\angle ABC - ACD$  有對應角  
 $\angle ACD - BCD$  有對應角

- ⓑ  $\triangle BCD$  有對應三角形  
 $\angle ABC - BCD$  有對應角  
 $\angle ABD - ACD$  有對應角  
 $\angle ACD - BCD$  有對應角

- ⓐ 和 ① 的 ⓒ 相同，故不合  
 ⓑ 和 ① 的 ⓑ 相同，故合

由 ① ② 可知三個 A 的條件不能完全成立。

(○) EEEE	(○) AEEE	AEEA	(×) AEAA
(○) EEEA	EEAA	(○) AEAE	(×) AAEA
(○) EEAЕ	(○) EAЕA	AAЕE	(×) AAAE
(○) EAEE	EAAE	(×) EAAA	(×) AAAA

#### (5) 最後討論二A二E之情形

可分類為  $\begin{bmatrix} AAEE \\ EEAA \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} AEEA \\ EAAE \end{bmatrix}$  兩組

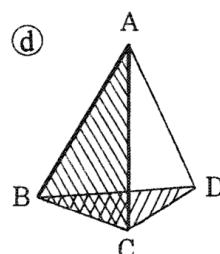
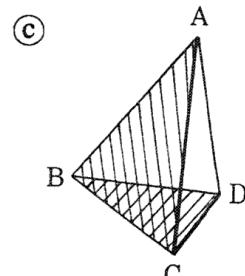
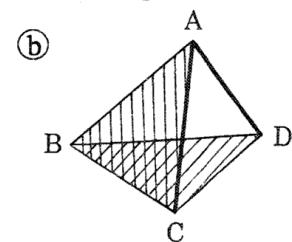
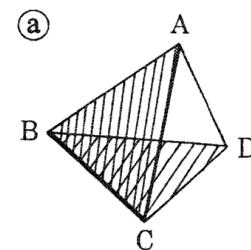
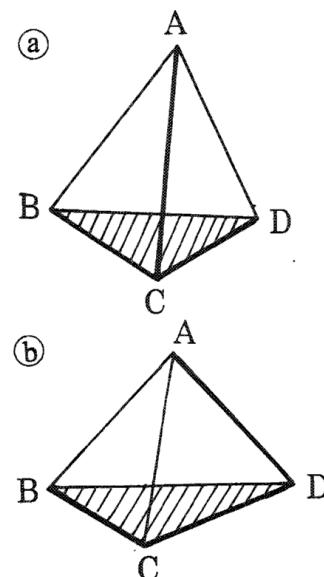
① 首先，看  $\begin{bmatrix} AAEE \\ EEAA \end{bmatrix}$  這組可分為下列情形

- ⓐ  $\triangle ABC$  有一對應三角形  
 $\triangle BCD$  有一對應三角形  
 $\angle ABC - ACD$  有一對應角  
 $\angle ABC - BCD$  有一對應角

- ⓑ  $\triangle ABC$  有一對應三角形  
 $\triangle BCD$  有一對應三角形  
 $\angle ABC - ACD$  有一對應角  
 $\angle ABD - ACD$  有一對應角

- ⓒ  $\triangle ABC$  有一對應三角形  
 $\triangle BCD$  有一對應三角形  
 $\angle ABC - ACD$  有一對應角  
 $\angle ACD - BCD$  有一對應角

- ⓓ  $\triangle ABC$  有一對應三角形  
 $\triangle BCD$  有一對應三角形



$\angle ABD - \angle ABC$ 有一對應角

$\angle ABC - \angle ACD$ 有一對應角

④〔已知〕： $\triangle ABC \cong \triangle EFG$

$\triangle BCD \cong \triangle FGH$

$\angle ABC - \angle ACD = \angle EFG - \angle EGH$

$\angle ABC - \angle BCD = \angle EFG - \angle FGH$

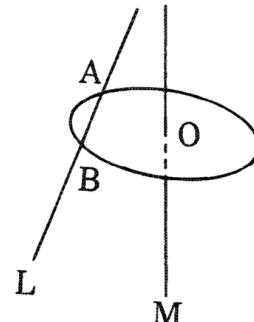
〔求證〕：四面體ABCD  $\cong$  四面體EFGH

〔證明〕： $\because \triangle ABC \cong \triangle EFG$

$\triangle BCD \cong \triangle FGH$

$\angle ABC - \angle BCD = \angle EFG - \angle FGH$

$\Rightarrow$  EAЕ故得證。



定理四：若空間中一圓與一直線有二交點，則此圓之軸必與此直線垂直

〔已知〕：空間中有一圓O，一直線L，A，B為L與圓之兩交點。

〔試證〕：圓軸M必垂直L

〔證明〕： $\because M$ 為圓O之軸

$\therefore M$ 必垂直包含圓O之平面

$\therefore A, B$ 均在圓O上

$\therefore L$ 必在包含圓O之平面上

$\because$ 一直線若垂直一平面，則此直線必垂直在平面上之任一直線。

$\therefore M$ 必垂直L

⑤〔已知〕： $\triangle ABC \cong \triangle EFG$

$\angle BCD \cong \angle FGH$

$\angle ABC - \angle ACD = \angle EFG - \angle EGH$

$\angle ABD - \angle ACD = \angle EFG - \angle EGH$

〔求證〕：四面體ABCD  $\cong$  四面體EFGH

〔證明〕：① $\because \triangle ABC \cong \triangle EFG$

$\angle ABC - \angle ACD = \angle EFG - \angle EGH$

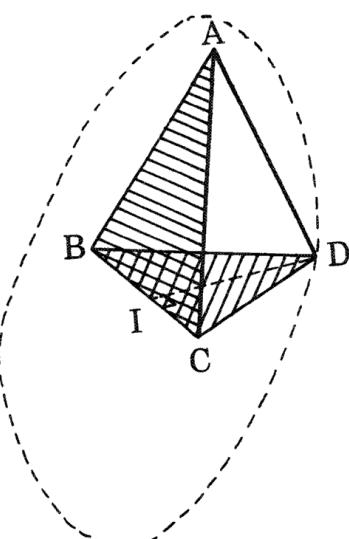
$\angle ACD - \angle ABD = \angle EGH - \angle EFG$

根據定理三

$\angle ABC - \angle ABD = \angle EFG - \angle EFG$

兩固定平面決定 $\overleftrightarrow{AD}$

$\therefore D$ 可為 $\overleftrightarrow{AD}$ 上任一點



(2)以 $\overline{BC}$ 為軸， $\overline{BC}$ 上高 $\overline{DI}$ 為半徑畫圓

(3)  $\because D$ 在圓上，又 $D$ 在 $\overleftrightarrow{AD}$ 上。

$\therefore$ 圓與 $\overleftrightarrow{AD}$ 必有一個以上交點

(4)根據第四定理，當 $\overline{BC}$ 垂直 $\overline{AD}$ 時，則圓與 $\overleftrightarrow{AD}$ 有兩交點。

(5)當圓有兩交點時，則仍然符合原來條件，因此不能證明全等。

©〔已知〕： $\triangle ABC \cong \triangle EFG$

$\triangle BCD \cong \triangle FGH$

$\angle ABC - ACD = \angle EFG - EGH$

$\angle ACD - BCD = \angle EFG - EGH$

〔求證〕：四面體 $ABCD \cong$ 四面體 $EFGH$

〔證明〕：又 $\triangle BCD = \triangle FGH \dots \textcircled{1}$

又 $\angle BAC - ACD = \angle FEG - EGH$

$\angle ACD - BCD = \angle EGH - FGH$

由定理三

$\angle ABC - BCD = \angle EFG - FGH \dots \textcircled{2}$

又 $\triangle ABC \cong \triangle EFG \dots \textcircled{3}$

由①②③  $\Rightarrow EAE$  故得證

④〔已知〕： $\triangle ABC \cong \triangle EFG$

$\triangle BCD \cong \triangle FGH$

$\angle ABC - ABD = \angle EFG - EFH$

$\angle ABC - ACD = \angle EFG - EGH$

〔求證〕：四面體 $ABCD \cong$ 四面體 $EFGH$

〔證明〕： $\because \triangle ABC \cong \triangle EFG$

$\angle ABC - ABD = \angle EFG - EFH$

$\angle ABD - ACD = \angle EFG - EGH$

根據第二定理

$\angle ABD - ACD = \angle EFH - EHG$

$\Rightarrow$ 情形和③相同，得證

②最後看  $\begin{cases} AEEA \\ EAAE \end{cases}$  兩組

④  $\triangle ABC$  有一對應三角形

$\triangle BCD$  有一對應三角形

$\angle ABC - BCD$  有一對應角

$\angle ACD - BCD$  有一對應角

⑤  $\triangle ABC$  有一對應三角形

$\triangle BCD$  有一對應三角形

$\angle ABC - ACD$  有一對應角

$\angle ACD - BCD$  有一對應角

⑥  $\triangle ABC$  有一對應三角形

$\triangle BCD$  有一對應三角形

$\angle ABC - ABD$  有一對應角

$\angle ACD - BCD$  有一對應角

⑦ [已知] :  $\triangle ABC \cong \triangle EFG$

$\triangle BCD \cong \triangle FGH$

$\angle ABC - BCD = \angle EFG - FGH$

$\angle ACD - BCD = \angle EGH - FGH$

[求證] : 四面體ABCD  $\cong$  四面體EFGH

[證明] :  $\because \triangle ABC \cong \triangle EFG$

$\triangle BCD \cong \triangle FGH$

$\angle ABC - BCD = \angle EFG - FGH$

$\Rightarrow EAE$

故得證。

⑧ [已知] :  $\triangle ABC \cong \triangle EFG$

$\triangle BCD \cong \triangle FGH$

$\angle ABC - ACD = \angle EFG - EGH$

$\angle ACD - BCD = \angle EGH - FGH$

[求證] : 四面體ABCD  $\cong$  四面體EFGH

[證明] :  $\because \triangle BCD \cong \triangle FGH \dots \dots ①$

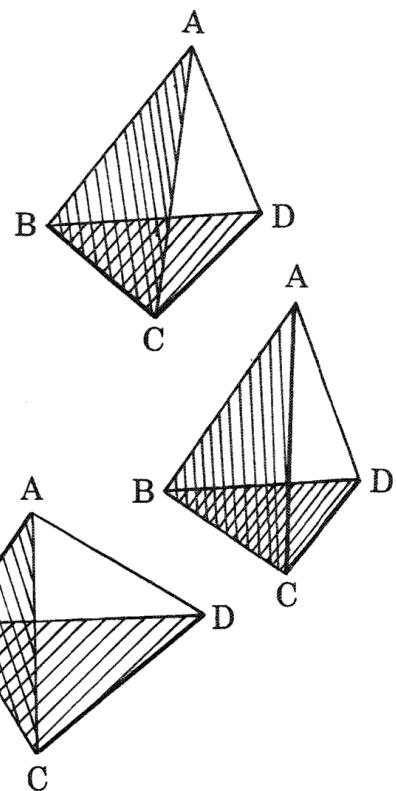
$\angle BAC - ACD = \angle EFG - EGH$

$\angle ACD - BCD = \angle EGH - FGH$

根據定理三

$\angle ABC - BCD = \angle EFG - FGH \dots \dots ②$

又  $\triangle ABC \cong \triangle EFG \dots \dots ③$



由①②③ $EAE \Rightarrow$  得證。

④〔已知〕： $\triangle ABC \cong \triangle EFG$

$\triangle BCD \cong \triangle FGH$

$$\angle ABC - ABD = \angle EFG - EFH$$

$$\angle ACD - BCD = \angle EGH - EFH$$

〔求證〕：四面體 $ABCD \cong$ 四面體 $EFHG$

〔證明〕： $\because \triangle ABC \cong \triangle EFG$

$\triangle BCD \cong \triangle FGH$

$$\text{又 } \angle BCD - ACD = \angle FGH - EGH$$

根據EEA狀況，以 $\overline{BC}$ 為軸旋轉 $\triangle ABC$ 時與平面 $ACD$ 必有兩交點，但此時又多了一個 $\angle ABC - ABD = \angle EFG - EFH$ 的條件，因此在另一交點時， $\angle ABC - ABD \neq \angle EFG - EFH$ （除非軸 $\overline{BC}$ 垂直平面 $ABD$ ）。

$\therefore$ 只有一個交點符合 $\angle ABC - ABD = \angle EFG - EFH$

$\therefore$ 四面體 $ABCD$ 必全等四面體 $EFHG$

因此，可決定

- |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|
| (○) EEEE | (○) AEEE | (○) AEEA | (×) AEAA |
| (○) EEEA | (×) EEAA | (○) AEAE | (×) AAEA |
| (○) EEAЕ | (○) EAЕA | (×) AAЕЕ | (×) AAAE |
| (○) EAEE | (○) EAAЕ | (×) EAAA | (×) AAAA |

## 四、結論

(一)空間中全等的最基本型為EEE。

(二)可以用判斷之條件為EEE，EAE，EAAE，其餘者皆必須再加有其它條件，但這樣加上去在判斷上來說並無任可經濟效益，因此我們不予討論。

(三)四面體原本可用S(邊)和A(二邊夾角)討論，但因所需條件甚多(有 $2^5 = 32$ 個之多)，探討起來相當麻煩，且因排列上甚為複雜，在判斷上也於事無補，因此不予討論。

(四)此次研究主題創新，而坊間並無此等書籍，所以在空間幾何的定義上只有靠自己定義。

(五)二度空間推至三度空間已有規則可循，以後在數學境界更高時，希望可將三度空間推展至四度空間。

## 五、參考書籍

國中選修數學上冊

高中數學第三冊

## 評 語

本作品探討平面上多邊形全等的概念從而推展到空間中多面體全等的定義，分析比較三角形全等條件推展到四面體全等條件之歸納與證明；立體幾何的概念尚稱清晰，惟有關四面體全等的有用應用實例獨缺，有待繼續研究。