空間中任三直線上各取一點所連成三角形的最小周長

高中組數學科第一名

台灣省立新竹高級中學

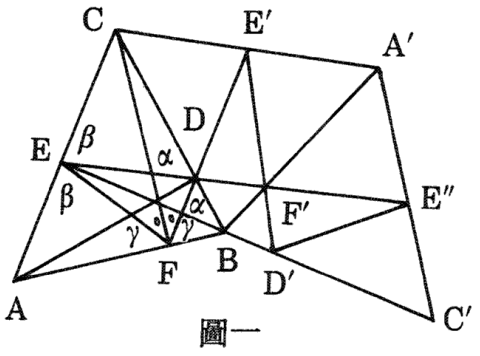
作　　者：連威翔、莊武諺

指導教師：許燦煌

一、研究動機

我們知道，平面上任意一個三角形若要找出具有最小周長的內接三角形，條件是此三角形爲一銳角三角形。說明如下：

設有一△ABC，利用光的反射定律——入射角等於反射角，將△ABC的內接△DEF之周長$\overline{ED}+\overline{EF}+\overline{DF}$改爲$\overline{ED}+\overline{DF'}+\overline{F'E'}=\overline{EE''}$，因$\overline{ED}+\overline{EF}+\overline{DF}=\overline{EE''}$成一線段，故確爲最小周長（因在△ABC內作另一內接△，其周長張成一折線）。



圖一

圖中$\alpha+\beta+\gamma=$△DEF外角和之半二π，$\alpha=\pi-(\beta+\gamma)=\angle A$，若$\angle A\geqq 90°$，則$\angle BDF+\angle CDE=2\angle A\geqq 180°$，故只有在銳角三角形中才具有最小周長△DEF。而此時過F作$\overline{AB}$之垂線因$\angle EFA=\angle BFD$，故平分$\angle EFD$而與$\overline{AC}$、$\overline{BC}$交於C即△DEF之旁心，所以$\overline{CF}$爲△ABC在$\overline{AB}$上的高，同理$\overline{AD}$、$\overline{BE}$亦是。故我們知道最小周長△即爲垂足三角形。（以上出自參考資料）

然而，爲了將在三直線上各取一點連成最小周長三角形的情形推廣到空間中，上述平面的性質無法繼續沿用，所以有必要發展另一套方法來處理這個尋找最小周長三角形的問題。

二、研究內容

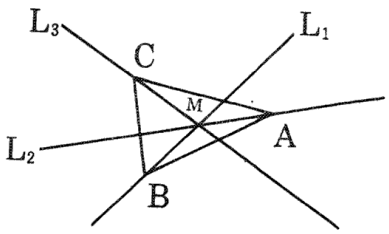
(一)平面中三直線的其他情形：

當平面中三直線無法形成最小周長三角形時，共有三種情況：

1.兩直線平行時，我們用圖一說明。$\alpha=\angle A$，當$\angle A$極接近零，$\overleftrightarrow{AC}\,//\,\overleftrightarrow{AB}$，$\angle$

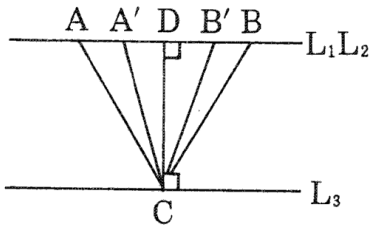
BDF＋∠CDE＝2∠A＝0，則$\overline{DE}$與$\overline{EF}$位於一直線上，無法形成三角形，退化成一線段。

2.三直線交於一點時，如圖二，當A、B、C無限接近交點M時周長最短，故此情形最小周長△退化成一點。



圖二

3.兩直線重合時，若另一直線與重合直線相交，則最小周長△因三頂點無限接近交點而退化爲一點；若另一直線與重合直線平行，如圖三，周長＝$\overline{CA}$＋$\overline{BC}$＋$\overline{AB}$＝$\overline{CA}$＋$\overline{BC}$＋$\overline{AA'}$＋$\overline{A'D}$＋$\overline{BB'}$＋$\overline{B'D}$＞$\overline{A'C}$＋$\overline{A'D}$＋$\overline{B'D}$＋$\overline{B'C}$＞2$\overline{CD}$，故最小周長△退化爲公垂線段。

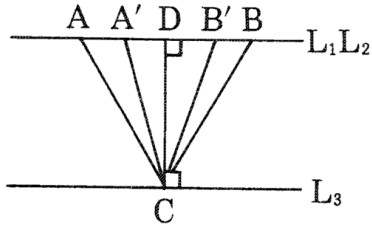


圖三

(二)空間中三直線的交錯情形：

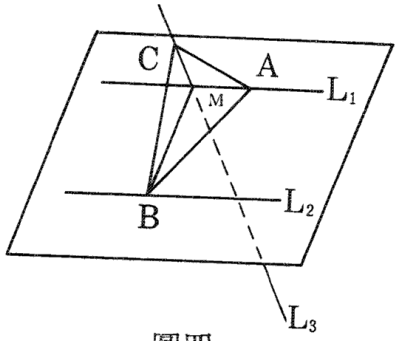
不再重複三直線共平面時的種種情形，則空間中無法形成最小周長△的情形共有五種：

1.當兩直線重合而與另一直線成歪斜時，可視同圖三的情形，最小周長△退成爲公垂線段。



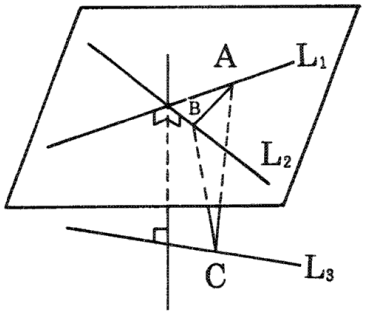
圖三

2.當兩直線平行，另一直線交其中之一時，如圖四，周長$\overline{AB}$＋$\overline{BC}$＋$\overline{CA}$在A、C無限接近M時等於2$\overline{BM}$，又$\overline{BM}$爲公垂線段時最小，故最小周長△退化爲公垂線段。



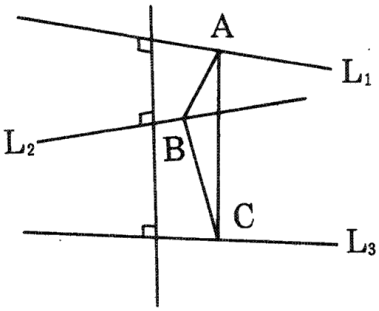
圖四

3.當兩直線相交而與另一直線有公垂線時，如圖五，周長$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$在三頂點無限接近兩垂足而使$\overline{AB}$爲零且$\overline{AC}$、$\overline{BC}$同時爲公垂線段時成爲最小，故最小周長△退化爲一公垂線段。



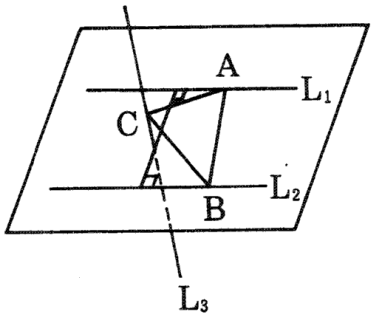
圖五

4.當三直線歪斜而有公垂線時，如圖六，當三頂點無限接近三垂足時，$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$皆成爲最短距，故最小周長三角形退化爲一公垂線段。



圖六

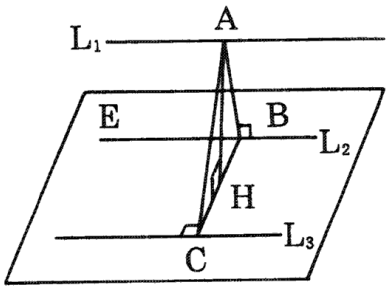
5.當兩直線平行，另一直線由兩直線間穿過，如圖七，周長$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}>2\overline{AB}$，又當$\overline{AB}$爲$L_1$和$L_2$經過$L_3$之公垂線段，C爲$L_3$與$L_1$、$L_2$構成的平面$\pi$的交點時，周長最短。故最小周長三角形退化成一公垂線段。



圖七

※有一能形成最小周長的情形較簡單，在此先提出。

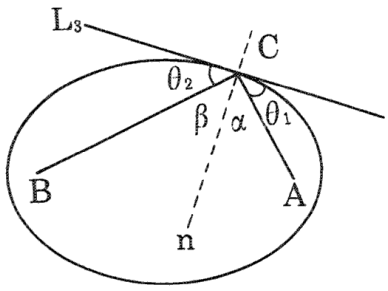
如圖八，當L_1、L_2、L_3平行但L_1不在L_2、L_3所決定的平面E上時，過L_1上一點A作E的垂線設垂足爲H，再自H作L_2、L_3之公垂線設垂足爲B、C，由三垂線定理知$\overline{AB}\perp L_2$且$\overline{AC}\perp L_3$，此時△ABC具有最小周長。



圖八

㈢橢圓的反射定理：

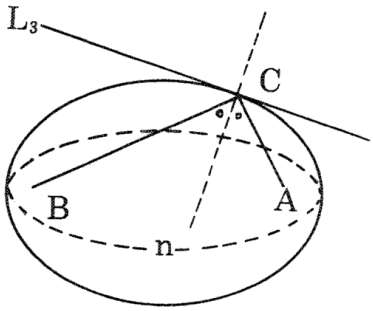
橢圓的特性之一爲橢圓上每一點至兩焦點的距離和爲定長。設平面上有三直線L_1、L_2、L_3，先於L_1、L_2上各取A、B固定，欲於L_3上取C使$\overline{AC}+\overline{BC}$爲最短，若以A、B爲焦點，$\overline{AC}+\overline{BC}$之最小值爲定值之C點構成一橢圓，因C點唯一，在$L_3$上使$\overline{AC}+\overline{BC}$最小，故$L_3$與此橢圓相切。而依橢圓的反射定理——



圖九

橢圓的任意切線與過切點的兩焦半徑所夾的兩銳角相等，如圖五、作橢圓於C點之法線n，入射角$\alpha=\frac{\pi}{2}-\theta_1$，反射角$\beta=\frac{\pi}{2}-\theta_2$，又$\theta_1=\theta_2$所以$\alpha=\beta$，n爲∠ACB之平分線。同理可說明A與B的情形，故知當△ABC達到最小周長時，過三個橢圓切點A、B、C的法線因平分各角而交於△ABC之內心。

再就空間中來說，$\overline{AC}+\overline{BC}$最小值爲定值構成一橢球，同理，$L_3$切此橢球於C且位於橢球過C之切平面上，法線n亦平分∠ACB。當△ABC達到最小周長，過三個橢球切點A、B、C的法線也交於△ABC之內心。與平面不同的是三切線並不一定與其入射線、反射線、法線共平面。

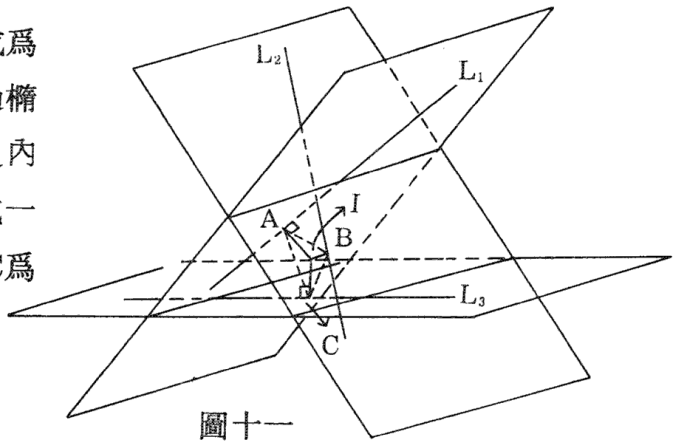


圖十

㈣空間中最小周長三角形的探討：

如圖十三，當空間中三直線取出最小周長△ABC，L_1、L_2、L_3皆成爲橢球之切線，位在過切點的三個切平面上，此三切平面之狀態爲兩兩交一直線，然而L_1、L_2、L_3若不爲平面中兩兩相交的情形，A、B、C三點將不會同時與三直線位於同一平面（即ABC平面）。

三直線在ABC平面上投影的直線成爲ABC平面在橢球中所截橢圓之切線，過橢圓切點作法線平分各角而交於△ABC之內心I。而三投影直線在ABC平面上交成一三角形，由研究動機，我們知道△ABC爲此三角形之最小周長內接△。



圖十一

㈤空間中三直線上各取一點所連成三角形之最小周長求法：

在平面中最小周長△之求法爲將三直線所交出的△之三高垂足連接起來即得，

但在空間中三直線不一定共平面，我們應該如何求呢？我們以前面的一些性質作爲必要條件做三個例子。

1.例一：如圖十二，我們取三條直線L_1：（t，0，0）、L_2：（2，2，s）、L_3（0，r，2），A、B、C分別在L_1、L_2、L_3上，設△ABC爲最小周長△，其內心I座標設爲（x，y，z）。

$\overline{IA}\perp L_1 \Rightarrow x-t=0,\ \overline{IB}\perp L_2 \Rightarrow Z-S=0,\ \overline{IC}\perp L_3 \Rightarrow y-r=0$

$a=\overline{BC}=\sqrt{4+(r-2)^2+(s-2)^2}\quad b=\overline{CA}=\sqrt{t^2+r^2+4}$ 、

$c=\overline{AB}=\sqrt{(t-2)^2+4+s^2}$

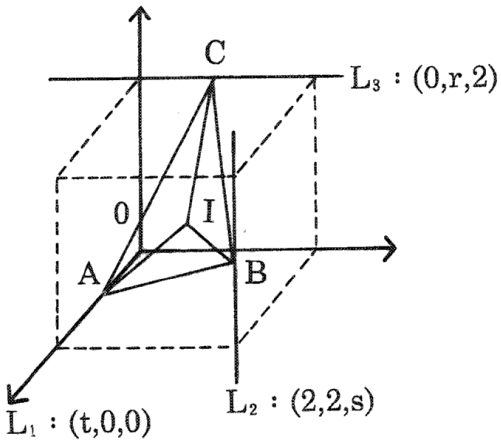
$$\overrightarrow{OI}=\frac{1}{a+b+c}(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC})=\frac{1}{a+b+c}[a(t,0,0)+b(2,2,s)+c(0,r,2)]$$

$$=(x,y,z)$$

$$\therefore\ x=\frac{at+2b}{a+b+c}=t \Rightarrow (2-t)b=ct,$$

$$y=\frac{2b+cr}{a+b+c} \Rightarrow (2-r)b=ar,$$

$$z=\frac{bs+2c}{a+b+c} \Rightarrow (2-s)c=as$$



圖十二

將 a,b,c 用 r,s,t 表示代入，兩邊平方後得：

$$\begin{cases}(2-t)^2(t^2+r^2+4)=t^2[(t-2)^2+4+s^2]\\(2-r)^2(t^2+r^2+4)=r^2[4+(r-2)^2+(s-2)^2]\\(2-s)^2[(t-2)^2+4+s^2]=s^2[4+(r-2)^2+(s-2)^2]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(t-2)^2(r^2+4)=t^2(s^2+4)\cdots\cdots①\\(r-2)^2(t^2+4)=r^2[4+(s-2)^2]\cdots\cdots②\\(s-2)^2[4+(t-2)^2]=s^2[4+(r-2)^2]\cdots\cdots③\end{cases}$$

又$\overrightarrow{AB}=(2-t,2,s)$，$\overrightarrow{AC}=(-t,r,2)$，利用向量外積，

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(4-rs,-st+2t-4\ ,\ 2r-rt+2t)$

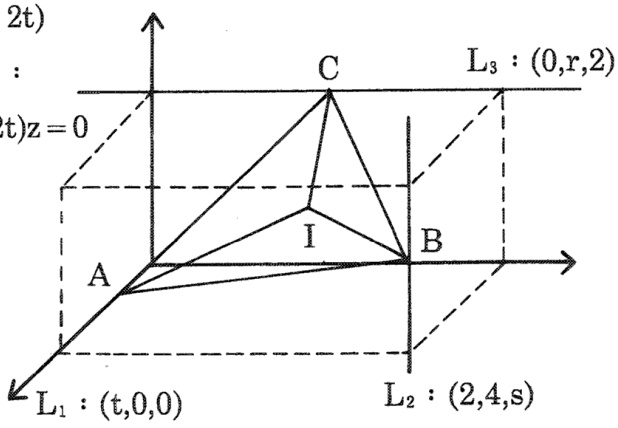
A(t,0,0)由點向式得ABC平面的方程式爲：

$(4-rs)(x-t)+(2t-st-4)y+(2r-rt+2t)z=0$

$\because$ I(x,y,z)=(t,r,s) 在ABC平面上

$\therefore\ r(2t-st-4)+s(2r-rt+2t)=0$

$\Rightarrow\ rt-rst-2r+sr+st=0$



圖十三

$t=\dfrac{(2-s)r}{r+s-rs}$ 而 $t-2=\dfrac{(2-s)r-2(r+s-rs)}{r+s-rs}=\dfrac{s(r-2)}{r+s-rs}$ 代入①

$$\left[\frac{s(2-r)}{r+s-rs}\right]^2(r^2+4)=\left[\frac{r(2-s)}{r+s-rs}\right]^2(4+s^2) \Rightarrow s^2(2-r)^2(r^2+4)=r^2(2-s)^2(s^2+4)$$

因式分解得 $(r-s)(rs-4)[s(r^2+4)+r(s^2+4)-4rs]=0$

而r、s、t的範圍經我們移動頂點得知$0<r<2$、$0<s<2$、$0<t<2$，即三頂點在正方體三稜上兩頂點之間，而後面我們所做的三直線構成長方體的情形亦有此特性。

由上式， $s(r^2+4)+r(s^2+4)-4rs=(r+s)(rs+4)-4rs$ $\because r,s>0$

$\therefore (r+s)(rs+4)-4rs\geqq 2\sqrt{rs}(rs+4)-4rs$（設$\sqrt{rs}=x$）$=2x(x^2-2x+4)$

若$2x(x^2-2x+4)=0$，則$x=0$或$x^2-2x+4=0$，但$x=0$則$r=0$或$s=0$故不合，x^2-2x+4之判別式$D<0$，$\therefore x^2-2x+4>0$。

若$rs-4=0$，但$0<r\times s<4$，故亦不合。

$\therefore (r-s)(rs-4)[s(r^2+4)+r(s^2+4)-4rs]=0$則$r-s=0 \Rightarrow r=s$代入①

$(2-t)^2=t^2 \Rightarrow t=1$ 代入②得 $r=s=1$ $\therefore r=s=t=1$

故最小周長△三頂點座標爲A（1，0，0）、B（2，2，1）、C（0，1，2），內心I（1，1，1），△ABC周長$=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\sqrt{6}\times 3=3\sqrt{6}$，△ABC爲正△。

2.例二：我們將圖十二中之L_2（2，2，s）改爲新的一條直線（2，4，s），如圖十六。設內心I座標（x，y，z）。

$\overline{IA}\perp L_1 \Rightarrow x-t=0$，$\overline{IB}\perp L_2 \Rightarrow z-s=0$，$\overline{IC}\perp L_3 \Rightarrow y-r=0$

同例一之法，我們找出方程組 $\begin{cases}(t-2)^2(r^2+4)=t^2(16+s^2)\cdots\cdots① \\ (r-4)^2(t^2+4)=r^2[4+(s-2)^2]\cdots\cdots② \\ (s-2)^2[(t-2)^2+16]=s^2[4+(r-4)^2]\cdots③\end{cases}$

和方程式 $rt-rst+rs-2r+2st=0$。

$rt-rst+rs-2r+2st=0$

$\Rightarrow r=\dfrac{2st}{st+2-t-s}$，$4-r=\dfrac{2(2-t)(2-s)}{st+2-t-s}$ 代入②

$$[\frac{2(2-t)(2-s)}{st+2-t-s}]^2(t^2+4)=(\frac{2st}{st+2-t-s})^2[4+(s-2)^2]$$

$\Rightarrow (t-2)^2(s-2)^2(t^2+4)=s^2t^2[4+(s-2)^2]$因式分解得

$\Rightarrow (s+t-2)[4(t^2+4)(s+t-2-st)-s^2t^2(s-t-2)]=0$

若$s+t-2=0$，$r=\dfrac{2st}{st+2-t-s}=\dfrac{2st}{st}=2(st\neq 0)$

將 $r=2,\ s=2-t$　代入③

$(s-2)^2(s^2+16)=8s^2 \Rightarrow s^4-4s^3+12s^2-64s+64=0$，令$f(s)=s^4-4s^3+12s^2-64s+64$，$f(1)=9>0$，$f(2)=-32<0$，由函數之中間值定理，我們用二分逼近法求得一S之近似值1.19214327596，$t=2-s=0.80785672404$。美中不足的是，我們無法說明另一個因式$[4(t^2+4)(s+t-2-st)-s^2t^2(s-t-2)]$不爲0，再由$s+t-2=0$求出答案。但我們將所得之s與t代入①之中得知成立，也就確定了此答案之正確性。我們在求周長時得知$\overline{BC}=\overline{CA}$，故此最小周長△爲一等腰△。

3.例三：我們想知道由構成長寬高有兩者相等的長方體三歪斜稜的三條直線是否有和例二相同的性質，於是我們又將L_2改爲新的一條直線L_2：(2，8，s)，依照例二的求法，我們亦得到S的方程式$s^4-4s^3+48s^2-256s+256=0$，令$f(s)=s^4-4s^3+48s^2-256s+256$，f(0)＝256＞0、f(1)＝45＞0、f(2)＝－80＜0，∴1＜s＜2，又將前解1.19214327596代入得知爲正，故1.19214327596＜s＜2，我們用二分逼近法求得一S之近似值爲1.2887414185，t＝2－s＝0.711258515，且r＝4。經計算周長我們得知$\overline{BC}=\overline{CA}$，故此三角形亦爲等腰△。

我們又再作幾個L_2右移的例子，發現有三個規則可循。一是$s+t=2$，L_2愈往右移，s愈大，t愈小。二是C皆位於所在一稜之中點。三是△ABC皆爲等腰△。

我們又以移動L_2、L_3的方式將圖十二之正方體與圖十三之長方體邊長增倍，經計算後發現正方體放大後A、B、C仍位於各稜之中點，而長方體放大後r、s、t皆增倍，$s+t=4$，而C仍位於所在一稜之中點。於是，我們歸納出形成正方體的三歪斜直線上所取各點位於三稜中點，連成之△爲一正△。形成長寬高中有兩者相同的長方體時，最小周長△三頂點之中位於長稜之一點在長稜之中點，其餘兩點同時靠近與長稜距離較近的兩頂點（如例二之$z-s=t$），三點形成一等腰△。

我們也用過同樣的方法處理過三歪斜直線形成長寬高不等的長方體的最小周長問題，但因解方程式的過程中較無規則可循而停滯，雖然如此，我們仍將繼續努力以期能使內容更完備。

回頭看前面例一及例二，我們利用切線以切點與內心之連線爲軸使切線在切平

面上旋轉而最小周長內接三角形不改變的特性，我們改變三直線交錯的情形，並將這些情形納入結論之中。

三、結論

(一)空間中任意三直線L_1、L_2、L_3於其上各取一點，除了下列情形之外，均不具有最小周長△，其原因爲退化爲一點或一直線。

1.L_1、L_2相交，而L_3交於L_1、L_2所決定平面於一點，此點不爲L_1、L_2之交點。且L_3交於L_1時，L_2、L_3不可用時垂直L_1，L_3亦不可垂直L_1、L_2所決定之平面。

2.L_1、L_2平行，而L_3交於L_1、L_2所決定平面上一點，此點不在L_1、L_2上，也不在L_1、L_2之間，且L_3不垂直L_1、L_2決定之平面。

3.L_1、L_2、L_3平行，L_3不在L_1、L_2所決定的平面上。

4.L_1、L_2、L_3兩兩相交，三直線在一平面上交成一銳角三角形。

5.L_1、L_2、L_3兩兩歪斜且無公垂線。

(二)三直線在空間中，若其上三點可連成最小周長△，由於入射角等於反射角且法線垂直橢球之切線，故此三法線即爲三內角之平分線，其交點即爲該三角形之內心，利用此特性可求出最小周長△。

四、參考資料

第廿九屆科展優勝作品—— n 邊形具有最小周長的內接 n 邊形。

高中理科數學上册—— 第二章。

評　語

本作品從探究銳角三角形的最小周長之內接三角形出發，研究平面上三條直線各取一點所決定的最小周長三角形，進而處理空間三直線上的情形，方法直觀並著重解析幾何技巧，在空間中有其一定的難度，結論尚稱完整，惟部分書寫內容方式尚值得研究改善，參考資料待查閱補充。