

不均匀介質中弦波形成駐波的研究

高中組物理科第二名

台灣省立嘉義高級中學

作 者：蔡金吾、洪瑞聰、黃奎綱、蕭 錚
指導教師：李文堂

一、研究動機

高中物理課本提到波動時，只討論到簡單的均勻繩中弦波傳遞的情形。我們想進一步研究不均勻介質中弦波形成駐波的現象。

二、研究目的

- (一) 實驗證明弦波相速度 $V = \sqrt{T_0 / \mu}$ 正確。

(二) 研究輕繩、重繩相接時，是否可產生駐波？其條件為何？

(三) 線密度由小而大或由大而小（已知弦半徑與距離成線性關係）是否可產生駐波？若可，其節點位置距端點多遠？

(四) 鉛直懸掛的均勻繩（張力因重力而改變）是否可產生駐波？若可產生駐波，所得節點位置在何處？

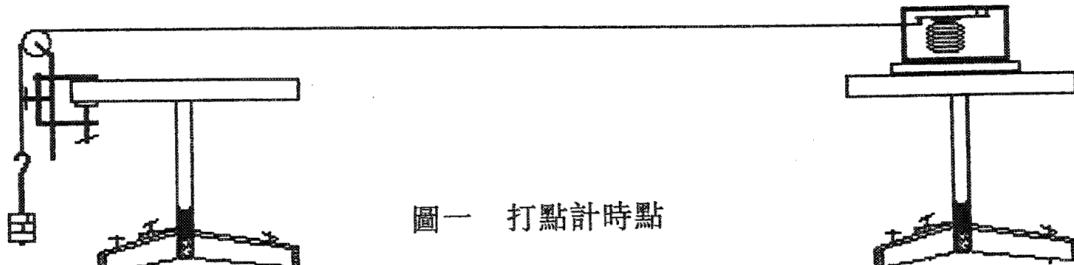
(五) 鉛直懸掛之軟彈簧（張力、密度均因重力而改變）是否可產生駐波？若可，其節點位置應在何處？並由實驗驗證所導出的公式正確。

三、原理

四、實驗方法與步驟

- (→) 實驗證明 $V = \sqrt{T_0 / \mu}$

 1. 量取一段均勻釣魚線(二號)的線密度 μ 。
 2. 將此均勻細線的一端綁在打點計時器改裝之振盪器上，另一端綁一掛盤並跨過力桌上的滑輪(裝置如圖一)。

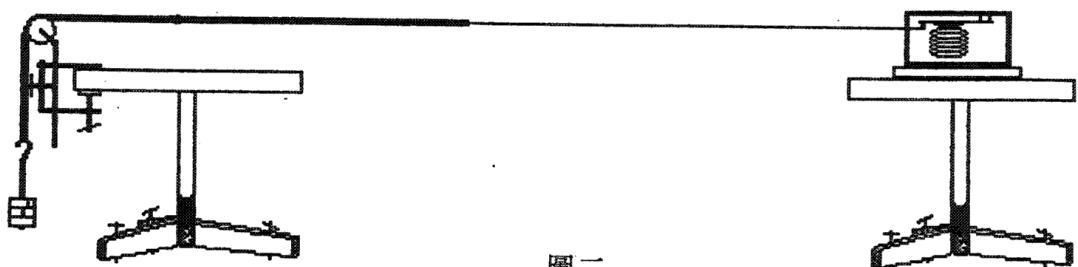


圖一 打點計時點

3. 將細線調整至水平，在掛盤上放置砝碼，並打開計時器令其振動。
4. 量出並記錄節點間的距離，求出平均值。
5. 將掛盤上砝碼取下，用天平測出其重量，可得張力 T_0 。
6. 將所得數據代入 $V = \sqrt{T_0 / \mu}$ 並與 $V = f\lambda$ 比較。
7. 改變掛重，重覆步驟1.~6.。
8. 改用8號釣魚線（線密度為2號線之4倍），重覆步驟1.~7.

(二) 細線、粗線相接：

1. 將2號與8號釣魚線以繩結相接。
2. 將2號線接打點計時器，8號線接接盤，打開打點計時器。



圖二

3. 調整滑輪位置，改變粗繩節點與連接點的距離。
4. 量取粗、細線中節點間的距離（半波長）並量取連接點至粗細線中最接近連接點之節點的距離。
5. 將4量得之結果分別除以粗、細線波長之距離，求得連接點與兩波節之相位差 P_1 、 P_2 。
6. 將 $P_1 + P_2$ 與 $1/2$ 比較並記錄之。
7. 改變滑輪位置並重覆步驟1.~6.。 2號 逐漸變粗 14號
8. 將2號、8號釣魚線易位，並重覆步驟1.~7.。 圖三

(三) 不均勻線（半徑與距離成線性關係）：

1. 選取不均線上一點為基準，以螺旋測微器測量其直徑 $2r$ ，並由已知線密度之均勻線，求得此點線密度 ($\mu \propto r^2$)。
2. 自基準點每100cm為單位測其直徑，求得其平均半徑增加率 k 。
3. 將較細之一端（基準點）接掛盤，較重之一端接打點計時器振動。
4. 測量各節點至基準點之距離並記錄之。
5. 將粗細端易位，並重覆步驟1.。

(四) 鉛直均勻繩：

1. 將一均勻繩（或彈力常數很大之彈簧）鉛直懸掛，上端固定於一鐵架上，調

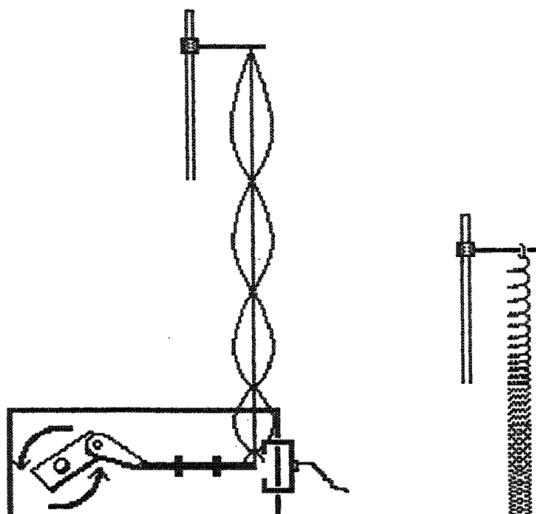
整鐵架高度，使彈簧底端恰可
固定於振盪器上。

2. 調整振盪器之頻率至一適當值，以光電計時器測其99次時距並換算成頻率 f 。
 3. 利用投影法，測量各節點至頂端固定端之距離，並記錄之。
 4. 改變振盪器的頻率並重覆步驟1。

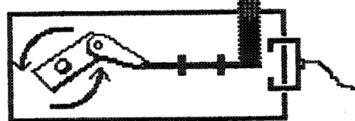
(五) 鉛直懸掛之軟彈簧：

- 1.同(四)之步驟，唯將彈簧換成彈力常數很小之軟彈簧。

- 2.彈簧由本市彈簧行製作，水平放置時，各匝間隔相等，鉛直懸掛則如圖五，愈往上間隔愈大。



圖四 振盪器 接光電計時器



接光電計時器

圖五

五、實驗結果（原始實驗數據，略）

六、討論

(一) 在水平線的實驗中：

- 1.不均匀繩所形成的駐波節點位置事實上可用理論來預測：

假設不均勻繩之半徑隨長度之

均加率：

$$k = \frac{\Delta r}{\Delta x} = \frac{r_x - r_0}{x}$$

圖六

$\Rightarrow r_x = r_0 + kx$ r_0 為固定端之弦線半徑

又線密度 $\mu = m / L = \rho A L / L = \rho A$ (ρ 為弦線之密度)

$$\Rightarrow \mu \propto A \propto r^2 \quad (\text{A為弦線截面積})$$

設 $x=0$ 處之線密度 $\mu_0 \Rightarrow x$ 處 $\mu_x = [(r_0 + kx) / r_0]^2 \mu_0$

由(2)式知： $V = \sqrt{F / \mu}$ (設張力 = F)

$$\Rightarrow \frac{r_0 + kx}{r_0} dx = \sqrt{\frac{F}{\mu_0}} dt$$

由於節點位置乃波由固定端經半週期的整數倍後傳播的距離，故

$$\int_0^{\frac{n\lambda}{2}} \frac{r_0 + kx}{r_0} dx = \int_0^{\frac{n}{2f}} \sqrt{\frac{F}{\mu_0}} dt \quad f \text{ 為振源振動頻率, } n \in N$$

$$\frac{k}{2r_0} \left(\frac{n\lambda}{2} \right)^2 + \left(\frac{n\lambda}{2} \right) - \sqrt{\frac{F}{\mu_0}} \cdot \frac{n}{2f} = 0$$

所以由固定端算起第N個波節的距離：

$$\frac{n\lambda}{2} = \frac{-r_0 + \sqrt{r_0^2 + nk r_0 / f \times (\sqrt{F/\mu})}}{k} \dots \dots \dots (4)$$

2. 實驗時，在受力一端之振幅，是由對它施力的外界系統（振盪器）所決定，不論其頻率為何，都可在弦上產生駐波，但如果頻率不等於此弦的自然頻率之一，在波腹的振幅就非常小；如果頻率等於其自然頻率的任一，此弦產生共振，其波腹最大。當長為L之弦產生駐波時，波腹最大條件為：

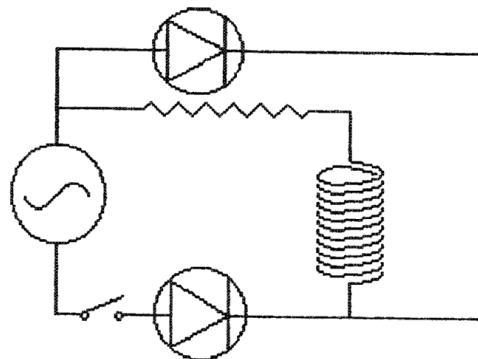
$$n\lambda/2 = L \quad \text{即} \quad \lambda = 2L/n \quad (n \in N)$$

$$\text{因 } \lambda = V/f \text{ 且 } V = \sqrt{T_0 / \mu}$$

$$\text{因此 } f = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

此為弦產生駐波之自然頻率。因此當我們發現產生最大波腹時，起波點必為節點。

3.打點計時器乃是利用半波整流的原理，使其頻率恆等於電力公司輸出之頻率，在台灣地區電力供應品質良好，故頻率60Hz之誤差極小（遠小於實驗中其他誤差）。其好處在於無論受到多大之抗阻，頻率均不改變，故為良好之波源。

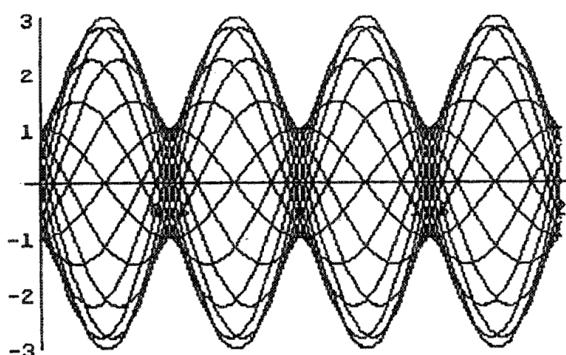


圖七 打點計時器之電路圖

4. 實驗時的線不可過長，大約4~5m即可，否則接近波源處之反射波會因能量損耗過多，使產生駐波不明顯。

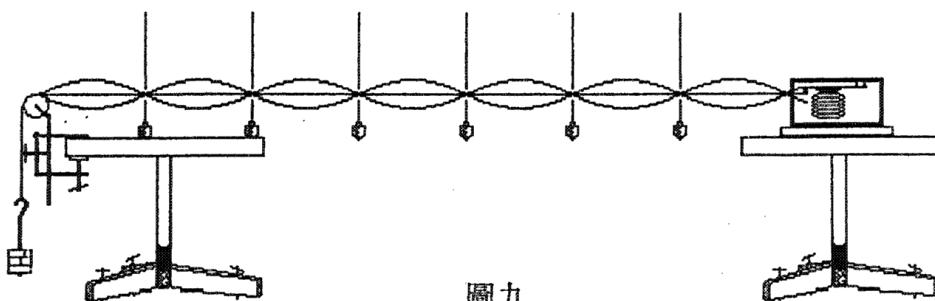
5.較粗之釣魚線，會因重力而下垂，因此掛盤上應放置較重之砝碼。

6.在測量節點間距時，我們先以重錘標出節點位置後，再以直尺測量節點間距。



圖八 兩相向行進弦波波長、速度相同而振幅不同合成波之情況

7.水平跨過滑輪時，注意不可扭到滑輪而使線受額外力的作用。



圖九

8.掛上砝碼後，不可使掛盤搖動，否則繩受擺動時衝力作用，張力成週期性改變，則節點也成週期性變動，不易量出。



○ 圖十

9.事實上， $V = \sqrt{T_0 / \mu}$ 之公式乃在振幅不是很大時才成立，故打點計時器之振幅雖不太大，較不易觀察，但如此能保持公式之正確。

(二) 在鉛直彈簧的實驗中：

1. 鉛直均勻彈簧(繩)中節點位置亦可用理論預測：

距頂端 y 處弦之張力 $T_0 = \mu g (L - y)$ 以負擔以下重量。

由(2)式：

$$\begin{aligned} & \frac{-2\sqrt{L-n\lambda/2}}{\sqrt{g}} + \frac{2\sqrt{L}}{\sqrt{g}} = \frac{n}{2f} \\ \Rightarrow & \frac{n\lambda}{2} = \frac{n}{2f} \sqrt{gL} + \frac{n^2 g}{16f^2} \end{aligned} \quad (6)$$

2.若將一彈力常數並非無限大之彈簧吊起，則線密度與張力均隨位置不同而改變，其理論推導：

將一質量m，彈力常數k之彈簧吊起，則其長度 $L = L_0 + \frac{mg}{2k}$
(證明略) (7)

設距彈簧底端x處張力 $F(x)$ ，線密度 $\mu(x)$ ，由頂端至x處彈簧彈力常數 $k(x)$ ，

$$\Rightarrow F(x) = \int_0^x \mu(x) g dx = k(x) \Delta x \quad (8)$$

Δx 為由頂端至x處彈簧加掛下段彈簧後之伸長量，

其中 $k(x) = mk / (m - \int_0^x \mu(x) dx)$ ，令 $m(x) = \int_0^x \mu(x)$

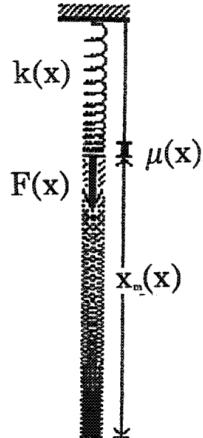
dx 為由底端至x處之彈簧質量，由(7)

$$\Rightarrow \Delta x = (\text{後來長度}) - (\text{未掛下段彈簧之自然長度})$$

$$= \left(\frac{mg}{2k} + L_0 - x \right) - \left(\frac{m - m(x)}{m} L_0 + \frac{m - m(x)}{2k(x)} g \right)$$

將 $k(x)$ 、 Δx 代入(8)化簡得：

$$g[m(x)]^2 / 2 + kL_0 m(x) - m k x = 0$$



圖士

$$m(x) = \frac{-kL_0 \pm \sqrt{(kL_0)^2 + 2kmgx}}{g} \quad (\text{取正})$$

$$\therefore \mu(x) = \frac{dm(x)}{dx} = \frac{km}{\sqrt{(kL_0)^2 + 2kmgx}} \quad (9)$$

$$F(x) = -kL_0 + \sqrt{(kL_0)^2 + 2kmgx} \quad (10)$$

假設不均勻介質中 $V = \sqrt{T_0 / \mu}$ 仍適用

$$V = \sqrt{\frac{F(x)}{\mu(x)}} = \sqrt{\frac{-kL_0 + \sqrt{(kL_0)^2 + 2kmgx}}{\frac{km}{\sqrt{(kL_0)^2 + 2kmgx}}}}$$

若令 $y = L_0 + mg / 2k - x$ (即自彈簧頂端量度的距離)

$$\Rightarrow (kL_0)^2 + 2kmgx = (kL_0 + mg)^2 - 2kmgy$$

$$\therefore V = \sqrt{\frac{-kL_0\sqrt{(kL_0 + mg)^2 - 2kmgy} + (kL_0 + mg)^2 - 2kmgy}{km}} = \frac{dy}{dt} \dots\dots\dots (12)$$

$$\int_0^{\frac{n\lambda}{2}} \sqrt{\frac{km}{-kL_0\sqrt{(kL_0+mg)^2 - 2kmgy} + (kL_0+mg)^2 - 2kmgy}} dy = \int_0^{\frac{n}{2f}} dt$$

$$\text{令 } u = (kL_0 + mg)^2 - 2kmgy \Rightarrow du = -2kmgy$$

\Rightarrow 原方程式

$$\int_{(kL_0 + mg)^2}^{(kL_0 + mg)^2 - 2kmg} \frac{n\lambda}{2} \sqrt{\frac{km}{u - kL_0\sqrt{u}}} \left(\frac{du}{-2kmg} \right) = \int_0^{\frac{n}{2f}} dt$$

經積分*得：

$$\left\{ kL_0 \ln[2(\sqrt{u} + \sqrt{u - kL_0}\sqrt{u}) - kL_0] + 2\sqrt{u - kL_0}\sqrt{u} \right\}$$

因無法直接解出 $n\lambda / 2$ ，故只能用逼近法求出。

※註：積分：

$$\int \frac{du}{\sqrt{u - kL_0 \sqrt{u}}} = ?$$

$$\text{令 } S = \sqrt[4]{U} \Rightarrow U = S^4$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{dS^4}{S\sqrt{S^2 - kL_0}} = \int \frac{4S^2}{\sqrt{S^2 - kL_0}} dS = 4 \int \frac{S \times S}{\sqrt{S^2 - kL_0}} dS \\ &= 4 \int S d\sqrt{S^2 - kL_0} \end{aligned}$$

再令 $S = \sqrt{kL_0} \sec \theta$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 4 \int \sqrt{kL_0} \sec \theta d\sqrt{kL_0(\sec^2 \theta - 1)} \\ &= 4 \int kL_0 \sec \theta d\tan \theta = 4kL_0 \int \sec \theta d\tan \theta\end{aligned}$$

其中 $\int \sec \theta d\tan \theta$

$$\begin{aligned}&= \sec \theta \tan \theta - \int \tan \theta d\sec \theta \quad (\text{分部積分}) \\ &= \sec \theta \tan \theta - \int \tan^2 \theta \sec \theta d\theta \\ &= \sec \theta \tan \theta - \int (\sec^3 \theta - \sec \theta) d\theta \\ &= \sec \theta \tan \theta - \int \sec \theta d\tan \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta| \\ \Rightarrow 2 \int \sec \theta d\tan \theta &= \sec \theta \tan \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C_1\end{aligned}$$

原式 $= 2kL_0 \sec \theta \tan \theta + 2kL_0 \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C_2$ (將 θ 換成 S 再換成 u ，計算得(13)式，以下略)

※特例：若 $k \rightarrow \infty$ (即彈簧不因本身重力而伸長)，則將(11)式取極限可得(5)式，將(13)式取極限可得(6)式。(證明略)

3. 振盪器之頻率不能過小，否則振盪器本身摩擦力的影響會很顯著。
4. 彈簧在綁上振盪器時，不可使彈簧受到額外拉力的作用。
5. 在量取節點的距離時，我們利用投影機，將彈簧投影在銀幕上，先標出節點位置後，再以直尺量取數據。

八、結論

在研究過程中，我們由波速 $V = \sqrt{T_0 / \mu}$ 逐步探討波的性質：

1. 由實驗(一)，我們驗證了 $V = \sqrt{T_0 / \mu}$ 的關係，乃其它實驗的基礎。
2. 由實驗(二)來探討兩線密度不同之繩相接時，原本以為在連接點會因反射與透射而有複雜的結果。但由實驗可證明，即使發生反射與透射，外表上毫無差異，駐波之產生亦無任何限制。
3. 有了(二)之結論，我們始可進行不均勻繩之實驗，因為不均勻繩實際上可視為無限多段小均勻繩連接而成，其透射與反射效應相同。由實驗結果可知，不均勻繩中 $V = \sqrt{T_0 / \mu}$ 成立。
4. 實驗(四)中則驗證了張力改變時 $V = \sqrt{T_0 / \mu}$ 亦成立。
5. 實驗(五)中，我們更進一步以實驗證明了，張力改變且不均勻之彈簧中 $V = \sqrt{T_0 / \mu}$ 亦成立。
6. 由粗漸細或由細漸粗(半徑與距離成斜率 k 之線性關係)的水平釣魚線，張力 F ，一端固定產生駐波時，第 N 個節點距固定端：

$$\frac{n\lambda}{2} = \frac{-r_0 + \sqrt{r_0^2 + nkr_0 / f \times (\sqrt{F / \mu_0})}}{k} \quad \dots \dots \dots \quad (4)$$

7. 鉛直懸掛的彈簧(質量 m , 力常數 k , 自然長度 L_0)其波速:

其特例 $k \rightarrow \infty$ (即彈簧不因本身重力而伸長)

8.在求鉛直懸掛的軟彈簧產生駐波，其第n個節點至固定端（彈簧頂端）的距離 $n\lambda / 2$ 時，得一關係式：

因無法直接解出 $n\lambda / 2$ ，故只能用逼近法求出值。

其特例 $k \rightarrow \infty$ 時，

由實驗結果，上兩式正確。

評語

本作品探討在不均勻介質中傳播的駐波形態；理論上從在均勻介質中傳播的波速公式中之質量密度賦予變化推導出節點位置，實驗上則用均勻變化質量密度的釣線做水平波動傳播，用垂吊的彈簧做垂直方向傳播所形成的駐波，證明理論的正確性。具有創意，具有嚴謹的驗證。值得鼓勵。