

楊氏係數之精密測定及金屬線塑性行爲之探討

高中組物理科第一名

台北市立內湖高級中學

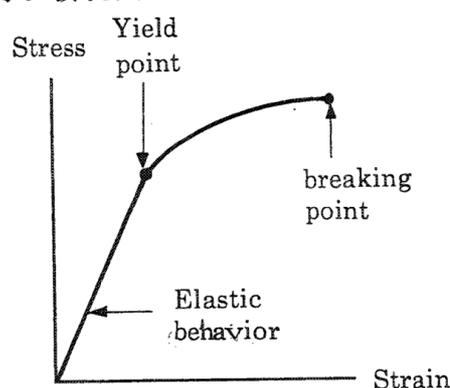
作者：羅志偉、張健良、黃瓊慧、楊承翰
指導教師：陳聲台

一、研究動機

一般楊氏係數的測量結果常與公認值相差甚多，詳細檢討原因，覺得這個實驗有徹底改進的必要。金屬線受應力而產生應變時，其內電阻亦必跟著變化，或許我們可以利用這種“電阻應變”來測量楊氏係數。物理書上對於塑性應變的圖形都畫成下面左圖的樣子，但去年我去參觀資訊展時發現有一種自動化儀器可以將金屬線受力應變的整個過程描繪出來，由下面右圖可以發現曲線上有突然折返的現象，到底那個圖才對呢？

二、研究目的

- (一)研究金屬線之彈性行爲。
- (二)研究金屬線之塑性行爲。
- (三)設計有效測量楊氏係數之新方法。



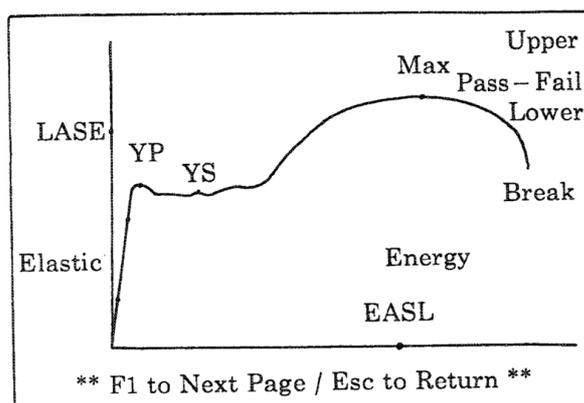
三、設究器材

- (一)0.01kgw張力計（自製）。
- (二)0.0001（m/m）應變計（自製）。
- (三)金屬線特殊夾頭（自製）。
- (四)旋轉式張力調整器（自製）。

四、實驗設計

(一)現有楊氏係數測量器材之主要缺點

- 1.氣泡移動有少許惰性，荷重砝碼每個須達1kgw才能明顯查覺懸線應變，因此懸線張力之調整過於粗糙。
- 2.銅線或鋁線僅加上2至3個砝碼即已產生塑性形變，如此在彈性範圍內所得數據太少，不足以正確估計楊氏係數。
- 3.加上砝碼使氣泡偏離，再利用螺旋轉軸將氣泡調整回至中央以讀取長度變化



量，但氣泡是否真的回至中央須靠目測認定，因此每個人測量結果都不盡相同，數據差達三倍者亦屢見不鮮。

(二)金屬線的內電阻應變

1.金屬線的內電阻由下式決定

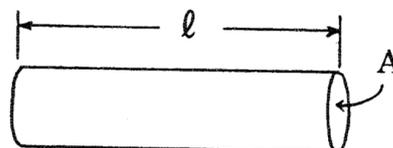
$$R = \rho (\ell / A) \dots\dots\dots(1)$$

2.金屬線受張力作用而形變時，不僅長度和截面積產生變化，其內電阻亦隨之而變，我們對(1)式取對數再微分可得

$$\frac{\Delta R}{R} = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right) + \left(\frac{\Delta \ell}{\ell} \right) - \left(\frac{\Delta A}{A} \right) \dots\dots\dots(2)$$

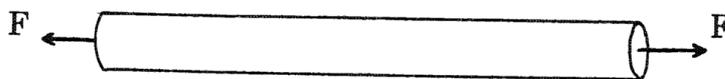
3.當懸線被拉長時半徑必縮小，兩者的變化量成比例

$$\frac{\Delta d}{d} = -\nu \left(\frac{\Delta \ell}{\ell} \right) \text{ 其中 } \nu \text{ 為 poisson's ratio}$$



$$\frac{\Delta A}{A} = 2 \left(\frac{\Delta d}{d} \right) = -2\nu \left(\frac{\Delta \ell}{\ell} \right) \dots\dots(3)$$

$$V = A \ell$$



$$\frac{\Delta V}{V} = \left(\frac{\Delta A}{A} \right) + \left(\frac{\Delta \ell}{\ell} \right) = (1 - 2\nu) \left(\frac{\Delta \ell}{\ell} \right) \dots\dots(4)$$

4.電阻係數 ρ 的改變率與其體積的改變率成正比，即

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = m \left(\frac{\Delta V}{V} \right) \dots\dots\dots(5)$$

定溫下固體金屬的體積不易改變， $\Delta V \rightarrow 0$ ，一般都視 ρ 為常數，但此處以精密計算為準， ΔV 不得忽略，將(4)式代入(5)式得

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = m (1 - 2\nu) \left(\frac{\Delta \ell}{\ell} \right) \dots\dots\dots(6)$$

5.合併(2)、(3)、(6)式可得

$$\frac{\Delta R}{R} = [m (1 - 2\nu) + (1 + 2\nu)] \left(\frac{\Delta \ell}{\ell} \right) = K \left(\frac{\Delta \ell}{\ell} \right) \dots\dots\dots(7)$$

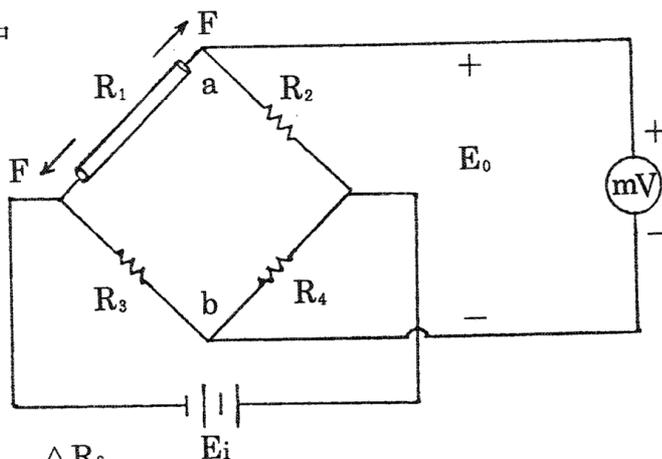
上式的重要意義為金屬線長度應變可以用內電阻應變來代替。

(三)以惠斯登電橋測量內電阻應變其中

1.由右圖知 $E_0 = E_a - E_b$

$$E_a = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E_i$$

$$E_b = \frac{R_3}{R_3 + R_4} E_i$$



微分上兩式可得

$$\Delta E_a = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} \right) E_i$$

$$\Delta E_b = \frac{R_3 R_4}{(R_3 + R_4)^2} \left(\frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) E_i \dots \dots (8)$$

2.若將電橋調整至平衡， $\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{R_3 R_4}{(R_3 + R_4)^2}$ ，此時 $E_0 = 0$

3.當 $R_1 \sim R_4$ 受到某種原因而產生微量變化時

$$\Delta E_0 = \Delta (E_a - E_b) = \Delta E_a - \Delta E_b$$

由(8)(9)兩式結果可得

$$\Delta E_0 = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} - \frac{\Delta R_3}{R_3} + \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) E_i \dots \dots (10)$$

4.上式若 $\Delta R_1 = \Delta R_2 = \Delta R_3 = \Delta R_4$ 如此輸出電壓 ΔE_0 便可化簡成：

$$\Delta E_0 = \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} \right) E_i = \frac{K}{4} \left(\frac{\Delta \ell}{\ell} \right) E_i \dots \dots (11)$$

這個重要結果說明長度應變可以用一個電壓信號來表示，只要在電壓計前面接上可變增益的放大器以調整常數K值，我們就可以利用電壓計來直接讀出應變量 $(\Delta \ell / \ell)$ 。

(四)溫度的考慮

電橋上的四隻電阻都會因溫度變化而改變阻值，輸出電壓變成：

$$\Delta E_0 = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \left[\left(\frac{\Delta R_1}{R_1} \right)_t + \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} \right)_l - \left(\frac{\Delta R_2}{R_2} \right)_t - \left(\frac{\Delta R_3}{R_3} \right)_t + \left(\frac{\Delta R_4}{R_4} \right)_l \right] E_i \dots (12)$$

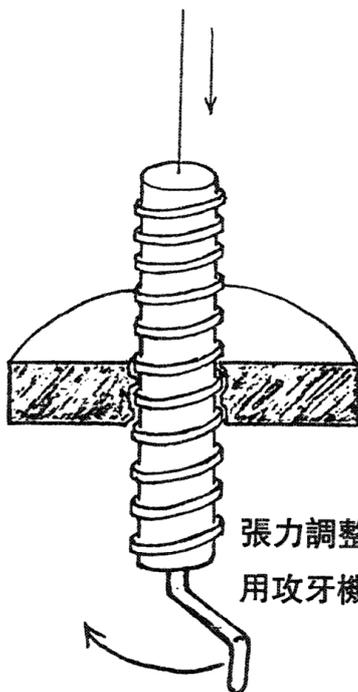
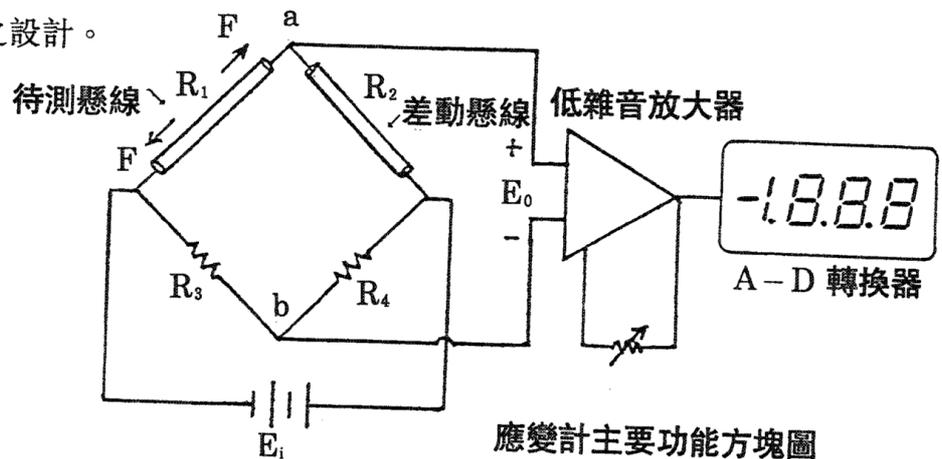
若 R_1 與 R_2 用完全相同材料、相同長度的金屬線，而 R_3 與 R_4 也用完全相同的電阻，那麼(12)式中的溫度項將完全消去

$$\Delta E_0 = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} \right)_t E_i = \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} \right) E_i = \frac{K}{4} \left(\frac{\Delta \ell}{\ell} \right) E_i$$

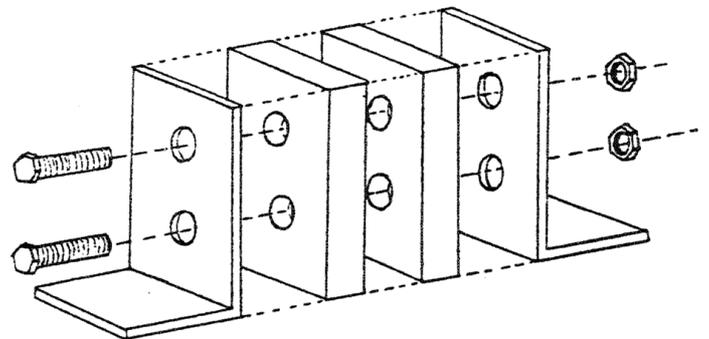
此與(11)式完全相同，不再有溫度的煩惱了。

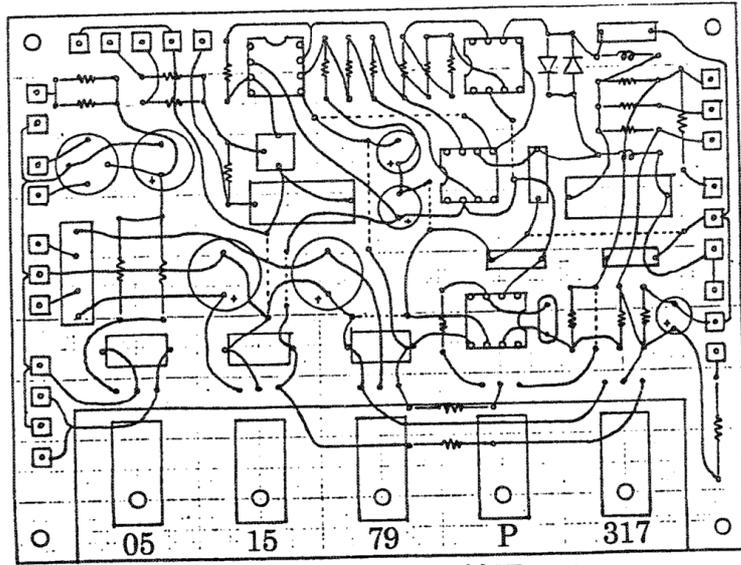
五、實驗過程（限於篇幅只列圖形）

- (一)電阻式應變計之研製。
- (二)電阻式張力計之研製。
- (三)旋轉張力機之研製。
- (四)新式線端夾頭之設計。

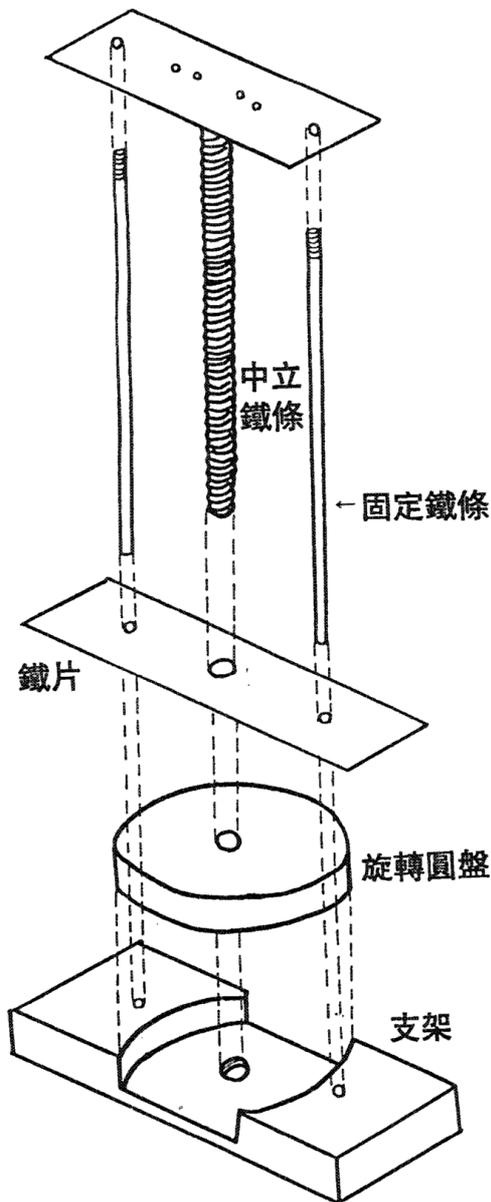


張力調整圓盤的軸心
用攻牙機處理過。

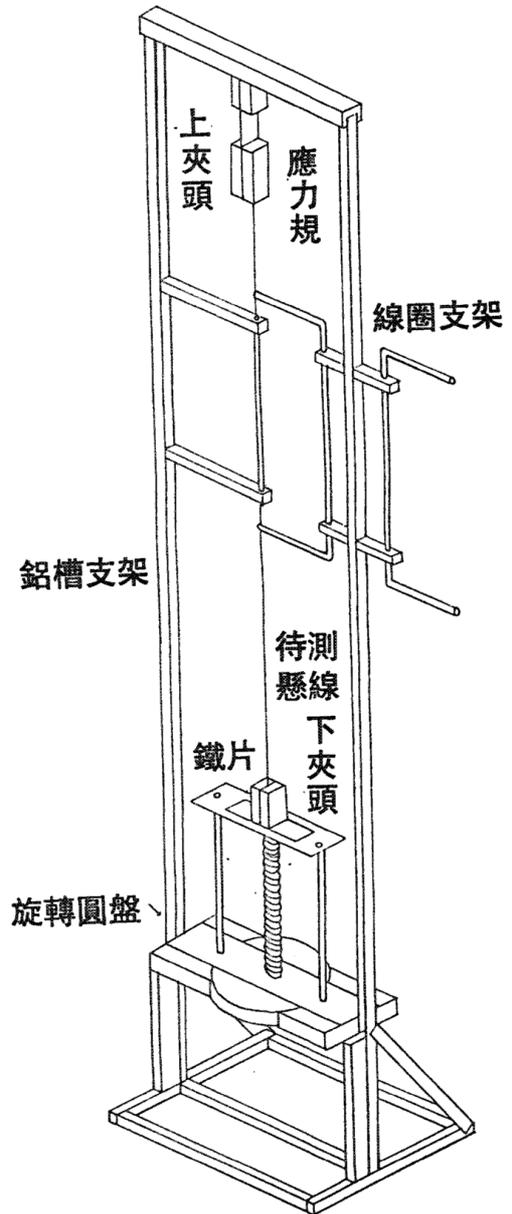




塵變計PC版設計圖



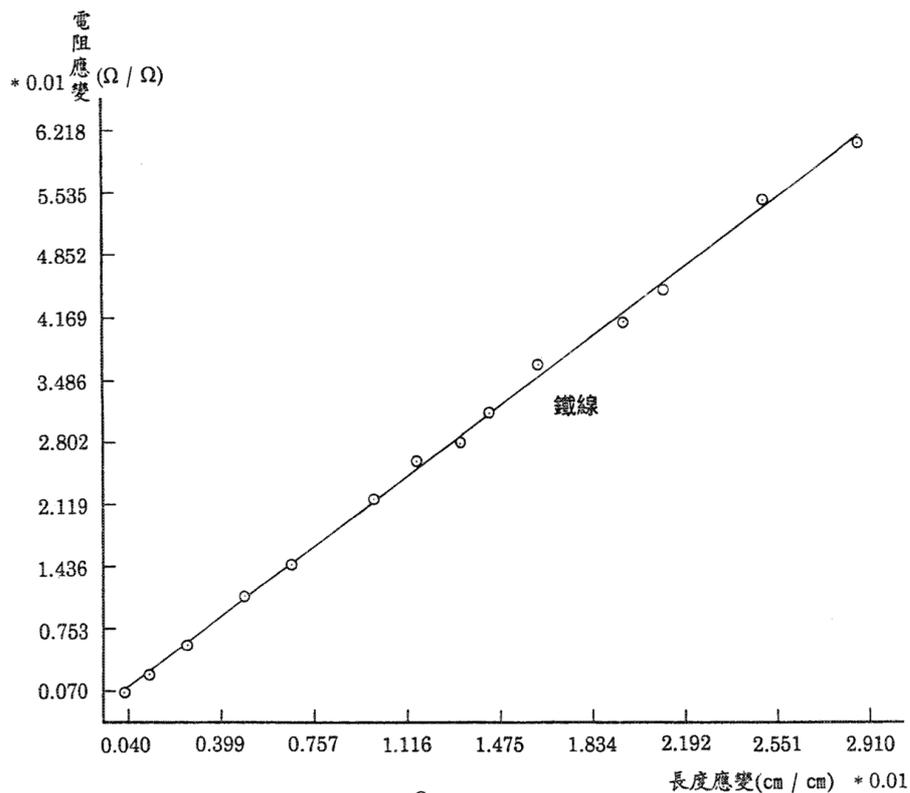
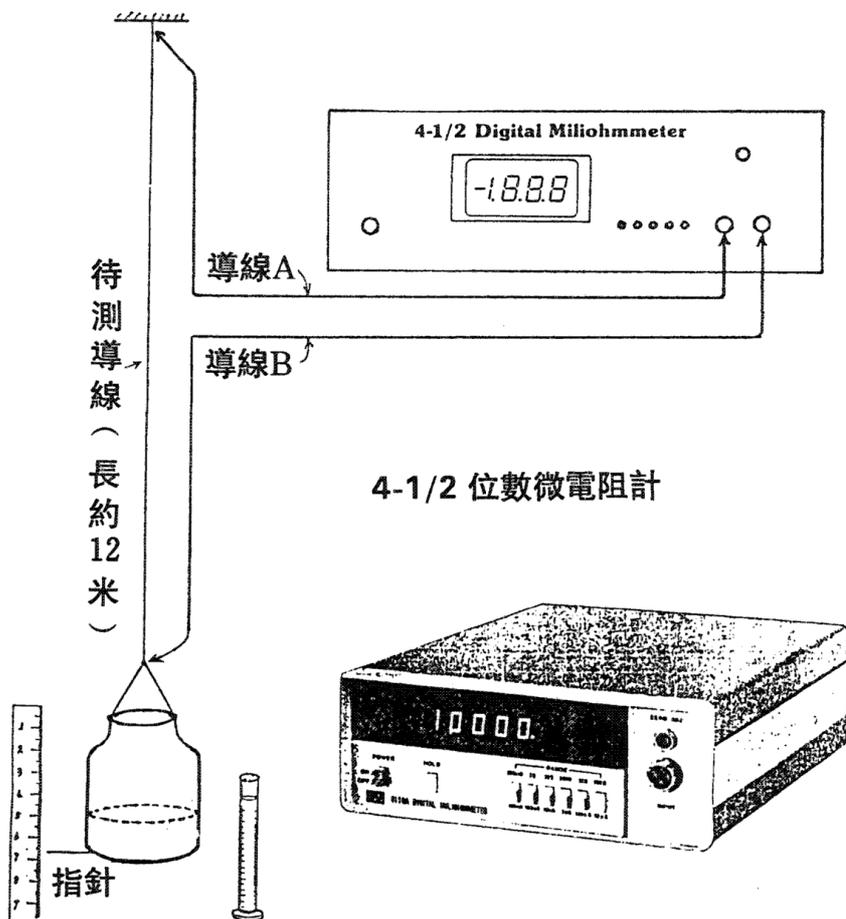
旋轉式張力調整器之細部分解圖



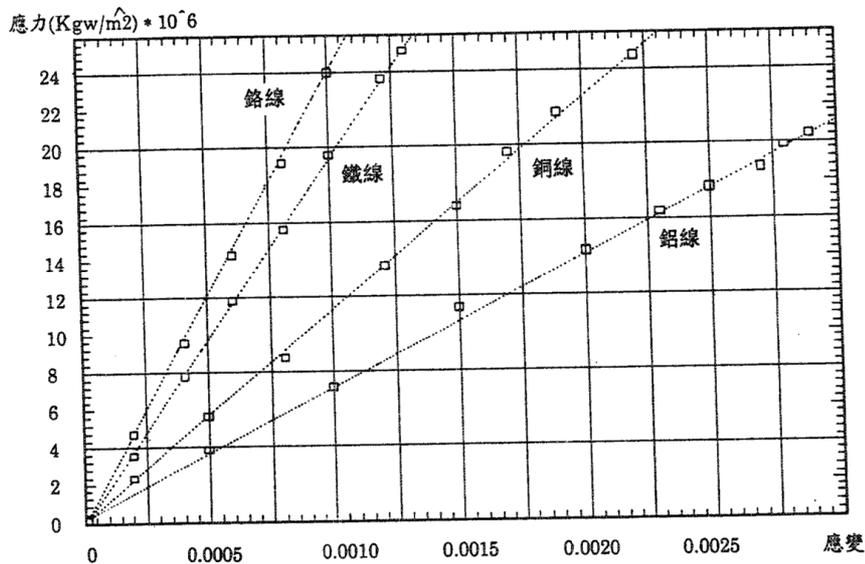
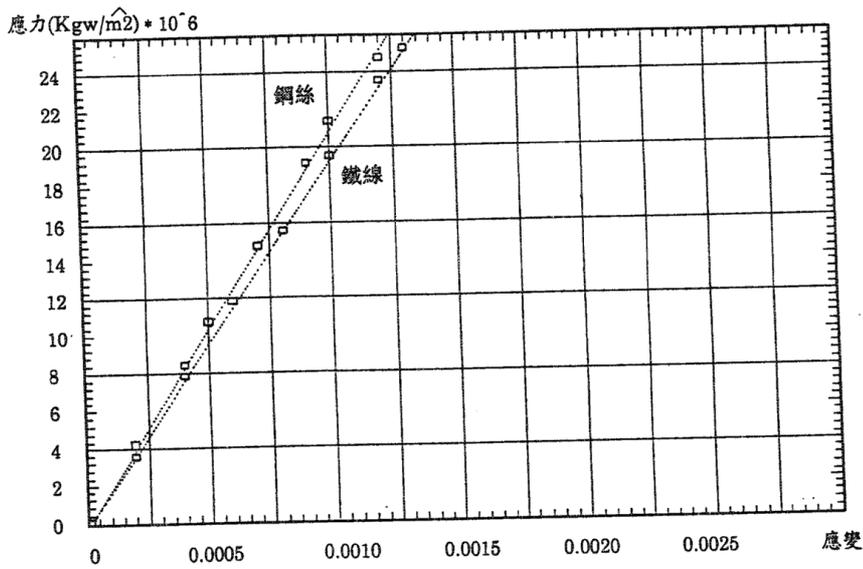
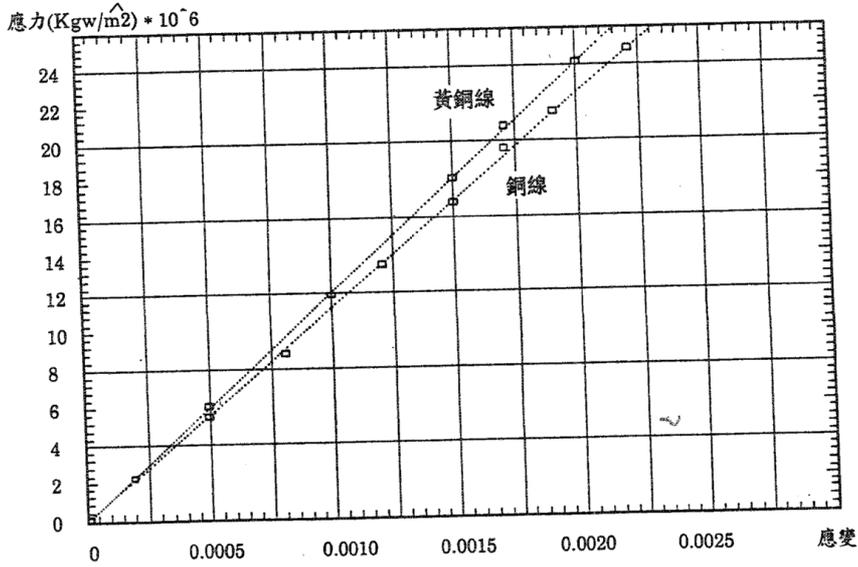
張力調整器組合

七、實驗結果

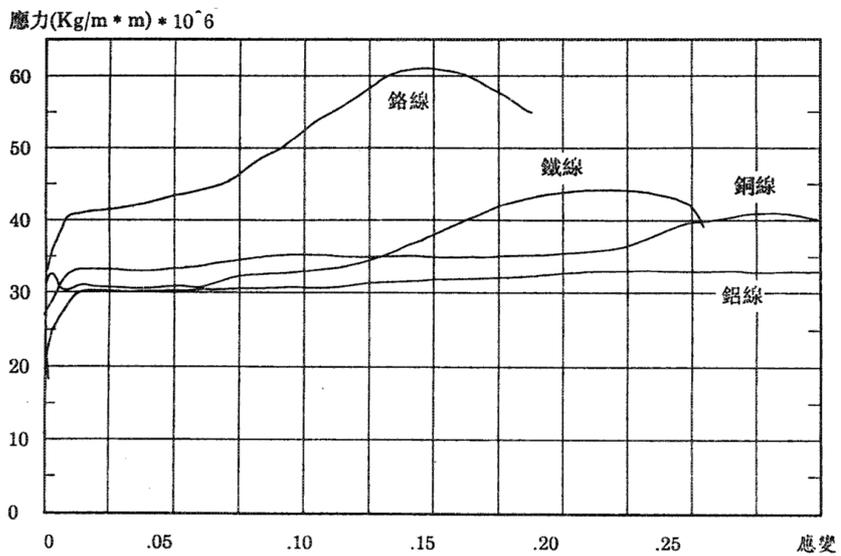
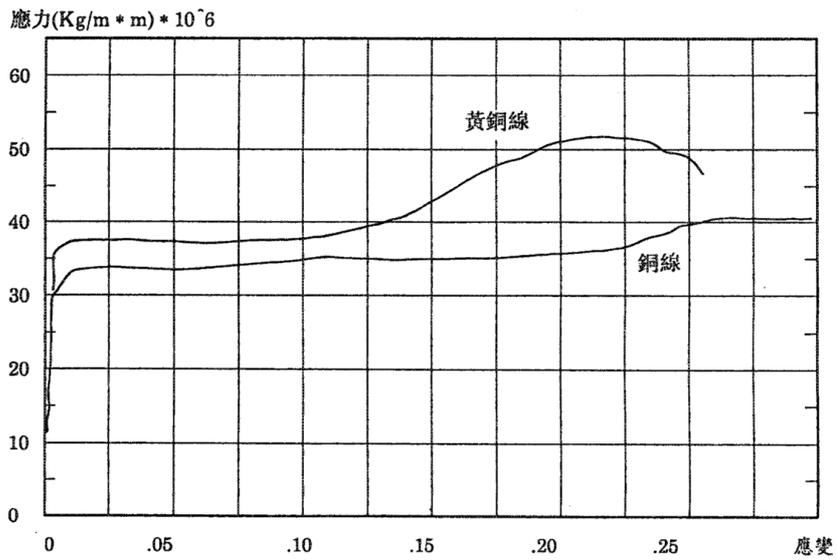
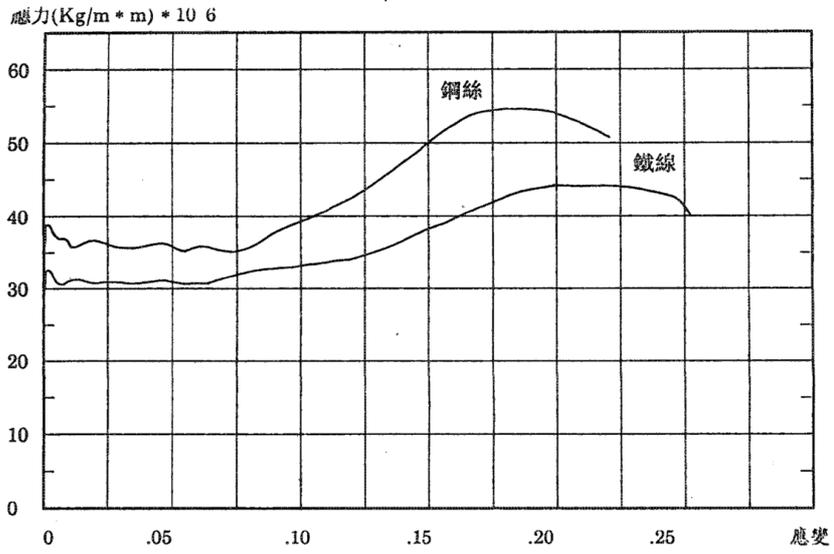
[實驗一] 驗證 $(\frac{\Delta R}{R}) = K(\frac{\Delta l}{l})$ 之正確性



〔實驗二〕 精密測量各種金屬的楊氏係數



〔實驗三〕 測量各種金屬線之塑性應變



八、實驗結論

1. 長度應變不超過5%時，電阻應變與長度應變是成正比的，即(7)式中 $(\frac{\Delta R}{R}) = K(\frac{\Delta l}{l})$ 是正確的，自製的應變計即以此式為依據設計的。
2. 每種金屬線的K值皆不相同，須依實驗一的方法分別測定。
3. 自製的張力計可讀出張力低至0.01Kgw之微弱變化，配合靈敏度高達0.0001(m/m)的直讀式應變計，能在彈性範圍內測得多點數據，有利於我繪製精確的實驗曲線，這是傳統測量器材辦不到的。
4. 鐵線的楊氏係數比銅大(19:11)，但其金屬鍵能卻比銅小(38:46)，由附圖可看出原子受淨力很小時，在平衡位置處之曲線斜率才是決定楊氏係數大小的真正原因。
5. 雜質原子能使金屬線楊氏係數略為提高且彈性範圍變大，比較鐵與鋼或是銅與黃銅之間都有這種現象。
6. 在較高應力下，原子離開平衡位置較遠，晶體內差排受拉扯而開始移動，某些原子平面上的分解剪應力達到臨界值，故能藉差排移動而滑動起來，材料便開始塑性變形，此時應力不須增加多少，應變卻能大量產生，實驗曲線幾乎變成水平。
7. 差排移動的過程漸漸遇到一些阻礙，多來自晶格中的不完美性如空位、格隙原子、取代原子及晶界等，如須克服阻礙使差排繼續前進，材料須要更高的應力，故實驗曲線再度上揚直到斷點。
8. (f.c.c)金屬(如銅、鋁)的延性都超過(b.c.c)金屬(如鐵、鉻)這是因為原子平面密度越高的其臨界剪應力越低，(f.c.c)的最密平面為(111)密度高達90.7%而(b.c.c)最密平面為(110)密度只有83.3%，因此銅和鋁的斷裂強度雖低但延性卻較鉻和鐵為高。
9. 比較銅與黃銅或是鐵與鋼的實驗曲線可知，雜質原子較多時會使差排糾集於一處，差排既受雜質牽制，材料斷裂強度將會變大，可是延性範圍卻相對降低了。
10. 只有鋼與鐵的實驗曲線，在彈性與塑性之交界點上曲線有突然折返的現象，這必然與雜質碳原子有關，其它金屬完全沒有這種現象。碳是小的格隙原子，它們若圍繞著差排聚集會干擾差排滑動，當差排克服了這些小原子聚集的地方，就可以在較低的應力下迅速地移動，這是曲線突然折返的原因。

評語

1. 理論上能夠思考以電阻變化量比值取代習見以長度變化量比值之測量楊氏係

數方式，頗富創意。

- 2.設計了一套精密儀器測量各類金屬的楊氏係數，其測量方法新穎，數據準確。
- 3.自撰數據處理程式，明確表徵金屬線特性曲線圖就實驗資料處理言，嚴謹、清楚。
- 4.詳盡回顧習見測量楊氏係數的缺點，並深入探討金屬線之彈性、塑性，頗為可取。