多面體之旅～妙探點、線、面

高小組數學科第二名

台北市立古亭國民小學　　作　　者：陳明揚
指導教師：林綉美

一、研究動機

六上數學，「怎樣解題」是我們學習的重心。在「角柱與角錐」的單元裡，我們觀察立體模型及其展開圖，歸納出「角柱與角錐」的特性及規律性。

在一個偶然的機會，看到師大數學系收藏的多面體組合模型和幾何拼圖板，引起我動作操作拼圖的樂趣，拼出各式各樣的多面體，有的是正多面體，有的是奇形怪狀凹凸不平的，有些看起來像一個球，有些是拼不出封閉的多面體，引起我的好奇心。我想這其中一定有一些道理，結果在拼圖的過程中，觀察出立體頂點數、稜數、面數的變動有一定的規則。在老師的指導下，閱讀相關的書籍資料，終於了解其中的道理和許多解題思考的規則，並得到實用的研究成果，很有收獲。

二、研究內容及目的

多面體是一些平面包圍起來的封閉立體，而角柱及角錐是特殊的多面體；在日常生活中常見的，有火柴盒、三稜鏡、金字塔等。

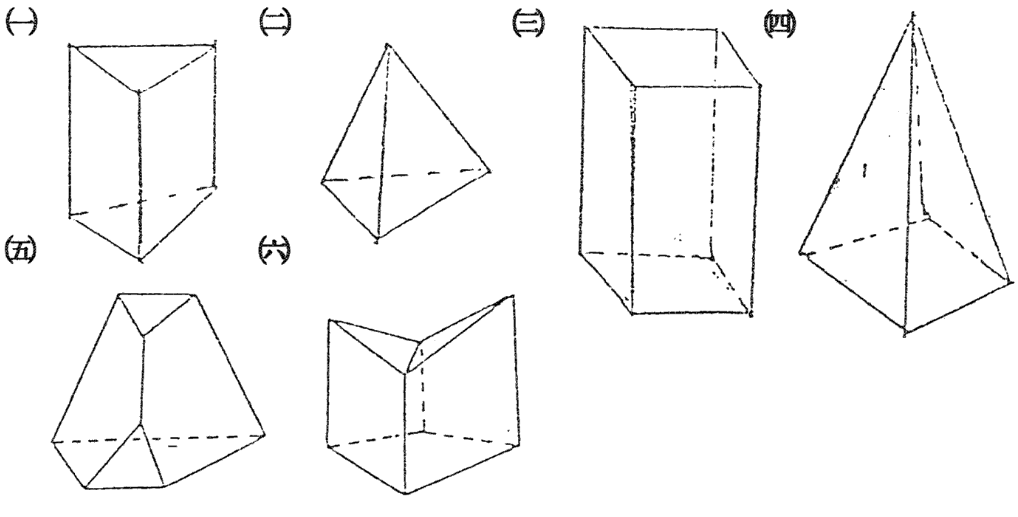


圖1.　常見的多面體

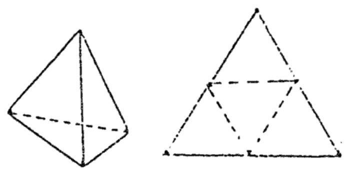
在討論一個多面體的外形，要注意到：

㈠各面的多邊形的形狀；　㈡邊或稜：面與面相交的線；

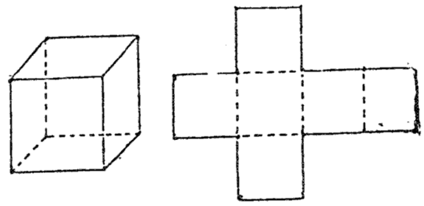
㈢多面角：三個以上的面聚在一起的角狀體；㈣頂點：稜與稜的交會點。

在做多面體器具時，通常先看它的平面展開圖：

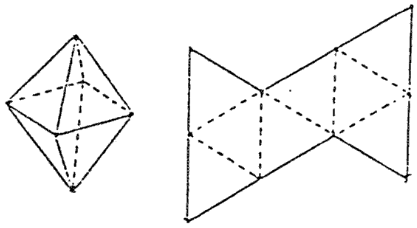
㈠正四面體



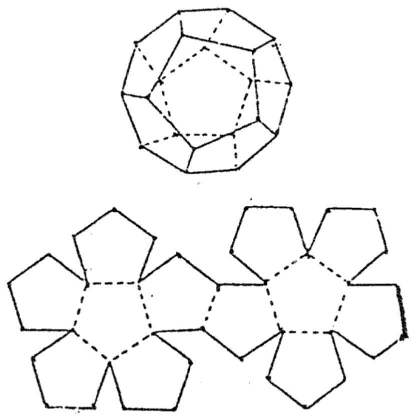
㈡正六面體



㈢正八面體



㈣正十二面體



㈤正二十面體

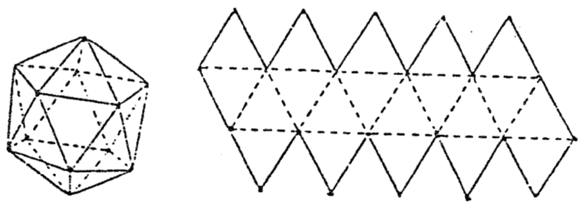


圖2.　五種正多面體及其平面展開圖

在六上數學第八單元中，教我們記錄角柱、角錐的頂點個數（多面角個數）面的個數及邊的個數：

多面體	頂點的個數（V）	面的個數（F）	稜的個數（E）
三角柱	6	5	9
三角錐	4	4	6
四角柱	8	6	12
四角錐	5	5	8

它們的頂點數**V**，面數**F**，稜數**E**三者之間，可以歸納出下面的規律：

$$V+F-E=2$$

也就是頂點數與面數的和，與稜數的差爲**2**。再看這些多面體的頂點數、稜數與面

數三者之間，都有這個規律性，這就是多面體的尤拉公式（參考資料(一)之3、及(三)）

平面圖形的頂點數、區域數、與稜數三者之間也有一定的規律性：

$$v+f-e=1$$

那就是平面圖形的頂點數（v）與區域數（f）的和、與稜數（e）的差爲1，這就是平面圖形的尤拉公式。例如多邊形的頂點數等於稜數（v＝e），而區域數爲（f＝1），當然符合了平面圖形尤拉公式的規律性。又圖2中的平面展開圖及圖3中平面圖形，也都有這個規律性。

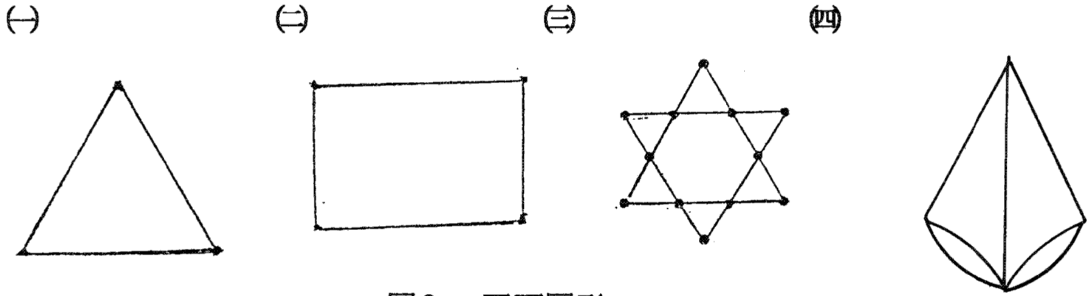


圖3.　平面圖形

這個作品經過操作拼湊幾何拼圖板，觀察多面體在拼湊過程中的變化，了解立體的頂點數、面數、稜數的變動規則，驗證得到多面體的尤拉公式的直觀解釋。再針對多面體的凸多面角，及凹凸不平的多面角，找出其中的規律性並應用這個規律判定可不可以拼出具有某些條件的多面體。最後，發現可以用平面圖形的尤拉公式來解答〞分割圓的區域數〞的問題。

三、研究工具

(一)參考資料所列書籍

(二)直尺，三角板，圓規，量角器，排球一個

(三)正多面體模型

(四)正三角形，正方形，正五邊形，幾何拼圖板

(五)薄紙板，剪刀，透明膠帶，膠液及清水一大杯

四、研究過程

下面是本作品相關子題的研究過程：

(一)多面體尤拉公式的直觀解釋

1. 閱讀有關平面圖形和多面體尤拉公式的文獻資料。

2. 平面圖形尤拉公式的直觀解釋：

依次減少一個稜，新圖形的頂點數v和區域數f的和與稜數e的差保持不變。

拆除到最後一條稜，二個頂點，得到頂點數爲2，稜數爲1，區域數爲0。

3. 連接式的拆解多面體的面，觀察逐次拆解後所得立體的面數、稜數及頂點數減少變化的情形（以四面體爲例）：

在拆解的過程中，先拆任一個面，再拆相鄰的另一面，但不要拆不相鄰的面。

⑴第一次拆除一面後的立體，只減少一面，其餘稜數、頂點數保留不變。

⑵第二次再拆除一面，減少一面及一條稜。

⑶第三次再拆除一面，減少一面，二條稜，及一個頂點。

⑷最後留下一個三角形，$v+f-e=1$

⑸逆推回去得到原來的四面體　　$V+F-E=2$

(二)凸多面體虧角和的研究

1. 觀察正多面體的平面展開圖，看看其中的一個多面角展開的部份，發現多面角各平面角的總和小於一個360°的周角。

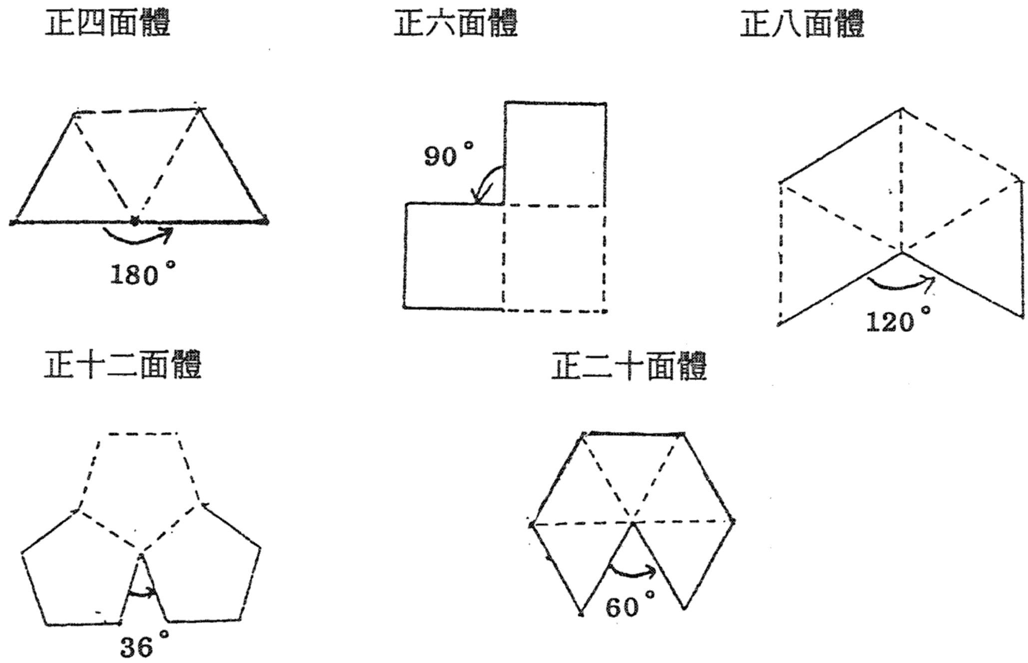


圖4.　五種正多面體的虧角

正四面體4有個大小相同的多面角：180° ×4＝720°

正六面體有8個大小相同的多面角：90° ×8＝720°

正八面體有6個大小相同的多面角：120° ×6＝720°

正二十面體有12個大小相同的多面角：60° ×12＝720°

2.歸納出720° 的規律性

再用正十二面體檢查，36° ×20＝720°

3.虧角：把360° 減去某一頂點處多面角各平面角的總和

歸納上面的規律性，虧角總和為720°

4.正多面體頂點數與虧角的關係：

虧角×V＝720°

720° ÷虧角＝V

5.猜測凸多面體的虧角總和為720°

6.證明猜測結果：

(1)一般的多面體的面依照邊數分類：

三角形：內角和180° ＝180° ×（3－2），共有F_3 面

四邊形：內角和360° ＝180° ×（4－2），共有F_4 ‘面

·

·

·

k邊形：內角和＝180° ×（k－2），共有F_k 面

總面數$F＝F_3 ＋F_4 ＋・・・＋F_k$

以五面體F＝5為例，三角形可能有2面或4面，四邊形可能有3面或1面，沒有其它的多邊形，各面角總和為

180° ×（3－2）×F· ＋180° ×（4－2）×F_4

(2)各面角總和為360° ×E－360° ×F

得虧角總和為360° ×V－（360° ×E－360° ×F）

＝360° ×（V＋F－E）＝720°

(三)八角星體與盈角的研究

1.用二十四面正三角形幾何拼圖板拼湊類似兩個大的正四面體交錯而成的凹凸八角星體。

2.八角星體外表看來，由八個凸正四面體拼湊而成，內含一個正八面體。

3.八角星體有一些有趣的特性：

(1)每一凹凸部分可以用1／4個正八面體補平；共需用3個正八面體可將八角星體

補成一個正六面體。

(2)用無蓋的正四面體及正四角錐容器（稜長相等），將正四面體容器裝滿水後，倒入正四角錐容器，內連裝二次，剛好倒滿正四角錐容器。那麼正四角錐的體積爲正四面體的2倍，正八體的體積爲正四面體的4倍。

(3)六個正八面體的體積＝正方體的體積

(4)底面爲正方形，且各稜長都相等的正四角錐的體積

＝（底面積×高）÷3

(5)八角星體有8個虧角，每個虧角都是180°。

(6)盈角：有六個多面角凹凸交錯，每個多面角的各面角總和都超過一個周角，每一個超過的部分叫做盈角，每個盈角都是120°。

(7)虧角總和與盈角總和相差

$(180^\circ \times 8) - (120^\circ \times 6) = 720^\circ$

(四)多面體盈角與虧角的研究

1. 凸多面虧角總和爲720°
2. 八角星體虧角總和與盈角總和相差720°
3. 再檢查一些凹凸不平的多面體，發現虧角總和與盈角總和相差720°
4. 猜測多面體虧角總和與盈角總和相差720°
5. 模仿乙.6證明猜測結果。

(五)分割圓的區域數的研究～平面圖形尤拉公式的應用

1. 研究在圓周上取若干個點（n個）把這些點用直線連接，全部直線數爲 $C_2^n = \dfrac{n \times (n-1)}{2}$ 的規律性（六上數學，習作甲第37頁）。
2. 其次研究〝分割圓的區域數〞的規律性。
3. 在研究中，如果圓內有三條以上的直線相交，比只有兩直線相交時，所產生的分割區域數少，而且答案無法確定，沒有適當的規律性。
4. 尋找圓內任意三條直線不相交時，最多分割區域數的規律性。

n=4 n=5 n=6 n=7 n=8 n=9 n=10

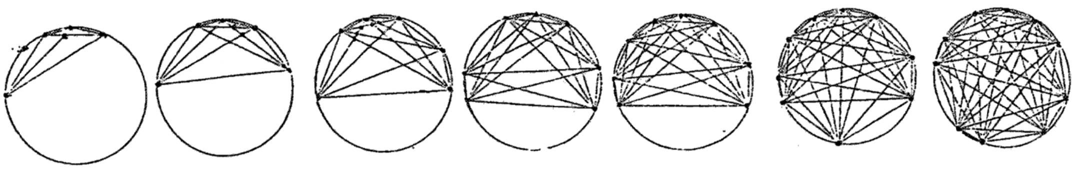


圖5. 分割圓的最多區域數圖形

(1)錯誤的猜測：2^{n-1}

點數	1	2	3	4	5	...	n
區域數	1	2	4	8	16	...	?

猜測出n個點，最多分割區域數是不是2^{n-1}？

檢驗n＝6時，得到最多分割區域數是31，不等於2^5(＝32)猜測結果不正確。

⑵先看一些輔助的規律

圓周上頂點數4，圓內的頂點數1，稜數12〔＝（4×1＋5×4）÷2〕

區域數8〔＝12－（4＋1）＋1〕

圓周上頂點數5，圓內的頂點數5，稜數25〔＝（4×5＋6×5）÷2〕

區域數16〔＝25－（5＋5）＋1〕

圓周上頂點數6，圓內的頂點數15，稜數51〔＝（4×15＋7×6）÷2〕

區域數31〔＝51－（6＋15）＋1〕

規律性：(ㄅ)圓內每一個頂點有4條稜

(ㄆ)圓周上每一個頂點有（n＋1）條稜

(ㄇ)每4個圓周上的頂點，決定1個圓內頂點

⑶圓周上n個點，兩兩連接的線段分割圓的最多區域數的規律性：

最多的圓內頂點數：n個點任取4點的組合總數計作C^n_4

例如$C^5_4 = 5$，$C^6_4 = C^6_2 = 15$

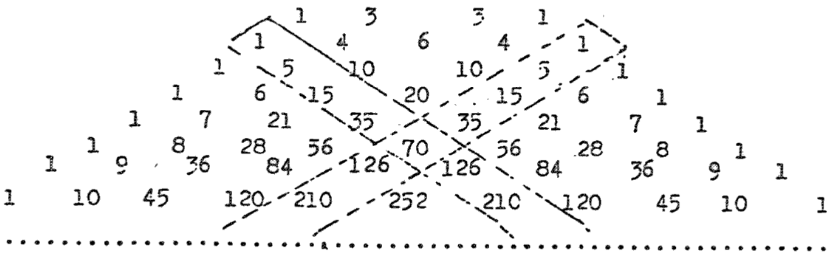
$$\text{稜數} = \left[\, n \times (n+1) + 4 \times C^n_4 \,\right] \div 2 = \frac{n(n+1)}{2} + 2 \times C^n_4$$

$$\text{最多的區域數} f = \text{稜數} - (\text{頂點總數}) + 1$$

$$= \frac{n \times (n+1)}{2} + 2 \times C^n_4 - (C^n_4 + n) + 1$$

$$= C^n_4 + \frac{n \times n(n-1)}{2} + 1$$

5. C^n_4跟巴斯卡三角形(或楊輝三角形)的關係(㈠之4.)。



巴斯卡三角形（或楊輝三角形）

$C^{4}_{4}=1$,$C^{5}_{4}=5$，$C^{6}_{4}=15$，$C^{7}_{4}=35$

$C^{8}_{4}=70$，$C^{9}_{4}=126$，$C^{10}_{4}=210$

$C^{11}_{4}=120+210=330$，…

6. 檢驗 $n=4 \quad f_4 =1+\frac{4\times 3}{2}+1=8$

$n=5 \quad f_5 =5+\frac{5\times 4}{2}+1=16$

$n=6 \quad f_6 =15+\frac{6\times 5}{2}+1=31$

7. $n=7$，得 $\quad f_7 =35+\frac{7\times 6}{2}+1=57$

$n=8$，得 $\quad f_8 =70+\frac{8\times 7}{2}+1=99$

$n=9$，得 $\quad f_9 =126+\frac{9\times 8}{2}+1=163$

$n=10$，得 $\quad f_{10} =210+\frac{10\times 9}{2}+1=256$

$n=11$，得 $\quad f_{11} =(120+210+\frac{11\times 10}{2}+1)=386$

8. 研究 C^{n}_{4} 的值：

由排列組合知道（參考資料(一)之4）：$C^{n}_{4}=\frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)}{4\times3\times2\times1}$

9. 分割圓的最多區域數：$f_n=C^{n}_{4}+C^{n}_{2}+1$

五、研究結果

(一)獲得多面尤拉公式的直觀角釋。

(二)多面體的外角和定理：利用多面體尤拉公式，求得凸多面體的虧角總和為720°。

一般多面體的虧角總和與盈角總和相差720°。

(三)獲得八角星體的特性。

(四)利用平面圖形的尤拉公式，找出分割圓的最多區域數的規律。

六、結論

(一)用拆拼方式得到尤拉公式的直觀角釋，很具體容易了解：對於一般封閉的立體，即使它的表面不是平面，也適用多面體尤拉公式；例如：一個球面（排球）有20個頂點12有個面，30條稜，所20＋12－30＝2（V＋F－E＝2）

(二)多面體的外角和為720°的事實很有應用價值：

1. 用來說明六邊以上的正多邊形無法拼成正多面體。

2. 用來判定可不可以拼成滿足特殊條件的多面體，在設計上有很大的應用價值。

3. 每個多角都是由一個正三角形、二個正方形及一個正五邊形拼成的多面體，那

麼每一個虧角都是12°，故頂點數＝720°÷12°＝60，稜數＝（4×60）÷2＝120；面數＝E－V＋2＝62（面），這是62面數。

4. 能拼成每一個虧角都是n°的多面體，那麼n一定是720的因數，也就是720能被n整除；因此，沒有辦法拼成各多面角都是由一個正三角形、一個正方形及一個正五邊形組成的多面體。

㈢在觀察及計算"分割圓的最大區域數"的規律性時，覺得要小心處理，最好加以合理的證明，不然歸納的結果也許不是眞正的規律。

七、結論

觀察拼湊立體模型幾何圖板及閱讀一些有關圖書資料，一一克服了種種困難，發現有用的規律及相關的應用，當然應該還有許多值得進一步探討的問題，等待我繼續研究。

八、參考資料

㈠國立編譯館現行出版中小學數學教科用書

1. 國民小學數學第十一冊第八、九單元及習作
2. 國民中學數學第二冊第一、二章
3. 高級中學基礎數學統合上冊第三章
4. 高級中學基礎數學第四冊第一章

㈡黃敏晃（民75年），數學解題規則，牛頓文庫24期，第41～54頁。

㈢諸明嘉（民68年），多面形與閉曲面的問題，人間文化事業股份有限公司，第1～29頁。

評語

從V-E+F=2的尤拉公式爲觀點，探討此公式在正多面體，圓內接多邊形以及多面體的虧角和等表現，這些定理雖然爲人熟知，但陳生用實物作圖，很具體地呈現出來，而且在部分推理中表現了一些創意。

以一個國小六年級學生來說，要瞭解這些內容是相當困難的，但陳生對這些知識顯然相當瞭解，這是非常難得的。