十六枚金幣的奧祕

高小組數學科第一名

北市師院附設實驗國民小學

作　　者：喬旋、郭美辰等五名

指導教師：蔡淑英

一、研究動機

話說，約瑟國王以十二枚金幣的問題嫁出了漂亮的大女兒。如今，聰明的二女兒要出嫁，國王又出了一道難題：〔有十六枚金幣，其中有11公克及9克金幣各一枚，其餘的金幣一律10克，請用等臂天平在五次之內秤出11克及9克的金幣。能夠解出此題的人，就能娶到二公主〕，我們五個人對這傳說國王嫁二公主的問題感到興趣，便開始對本問題展開全面性的研究。

二、研究目的

(一)問題：利用等臂天平出現左重、平衡、右重的三分特性，從十六枚金幣中，找出兩枚與正常金幣等差的一重、一輕異常金幣。

(二)目的：在十六枚金幣中，含有二枚異常金幣，其中一枚較重，另一枚較輕，共有幾種可能出現情形？要怎麼秤才能用最少的秤數，包容所有的可能出現情形？

三、文獻探討

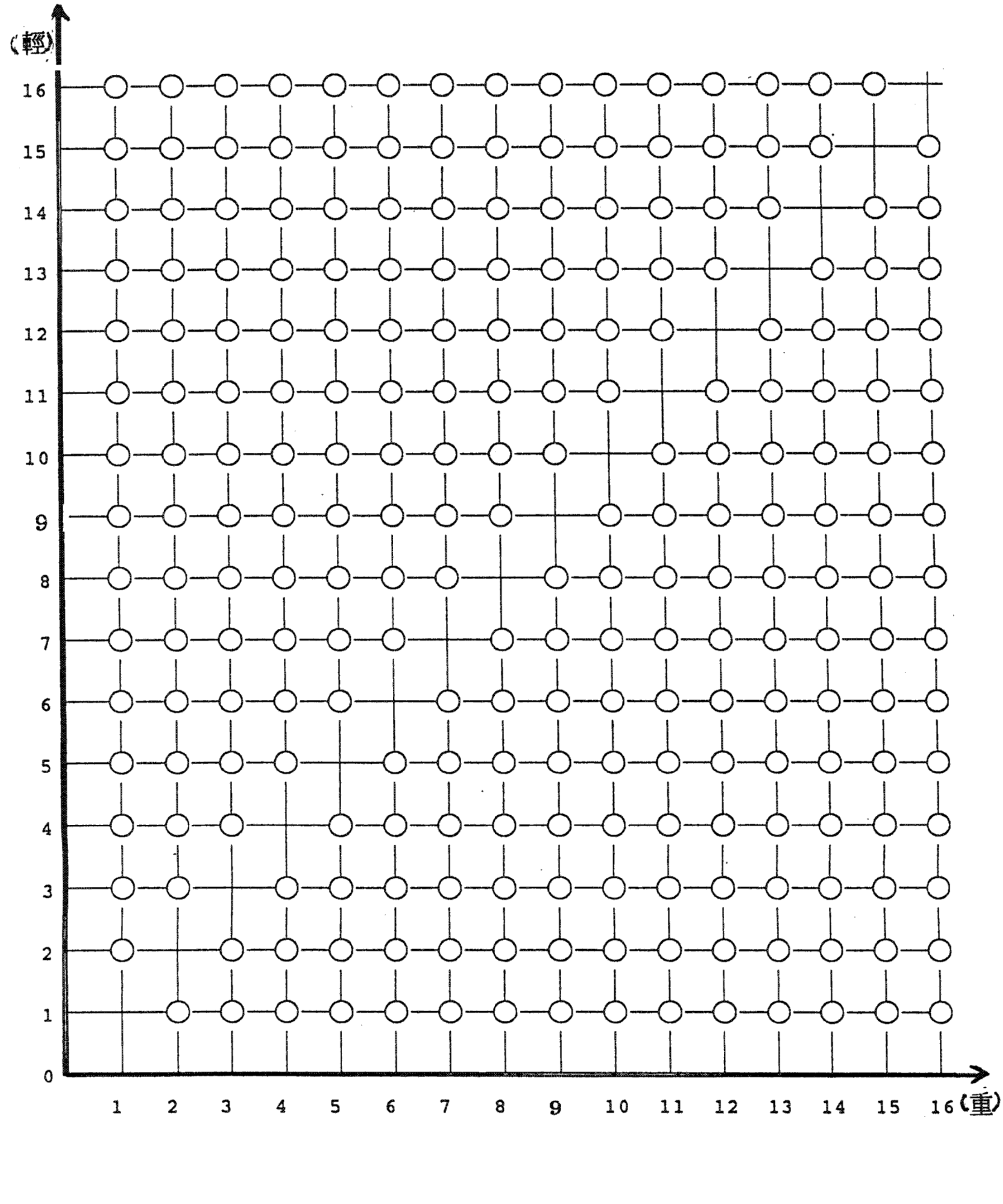
使用等臂天平判別一枚假金幣最有效率的方法，就是在每一秤將所有可能出現的情形平分成三等分（中華民國第31屆科展高小組〔十二枚金幣的奧妙〕、曹亮吉編著〔益智集〕第24頁〔孰重孰輕〕）。

四、分析

(一)取一〔直角座標〕為輔助，將十六枚金幣中，含有二枚異常金幣，其中一枚較重，另一枚較輕的各種可能出現情形，以（重，輕）方式標示在右邊的座標上，經計算發現共有16×15＝240種可能情形。

例如：用（1，2）表示編號1號的金幣較重，編號2號的金幣較輕，而編號3，4，

5…16號的金幣正常。



(二)運用天平每秤一次三分的特性，秤四次只能包容81種可能情形，秤五次則可以提供243個空間，來包容240種可能出現情形，所以，最少要秤五次。因此，第一秤必須將這240種可能出現情形分成三份，每份都不得大於81。經由我們的研究，我們發現：在第一秤天平左右各擺1個、2個、3個、……8個，天平出現左重、平衡、右重的三種情況的個數比如下表：

左右各擺？個	左重：平衡：右重	註
1個	29：182：29	
2個	52：136：52	
3個	69：102：69	
4個	80：80：80	**
5個	85：70：85	
6個	84：72：84	
7個	77：86：77	
8個	64：112：64	

由表中的分析情形可知，要解決十六枚金幣的這個問題，第一秤在天平的左右一定要各擺4個金幣，才恰好可以將240種可能出現情形，平均分成三等分，除此之外，別無他法。

五、解法

首先將十六枚金幣由1開始編號，1，2，3……16，以下是第一、二、三秤的秤法圖說，用＞表左重，＝表平衡，＜表右重。

- 第一秤（1, 2, 3, 4 對 5, 6, 7, 8）
  - ＞●第二秤（1, 5, 9, 10, 11 對 2, 6, 12, 13, 14）
    - ＞●第三秤（1, 6 對 11, 12）
      - ＞A 9 種可能情形
      - ＝B 9 種可能情形
      - ＜C 9 種可能情形
    - ＝■第三秤（1, 3, 15 對 2, 4, 16）
      - ＞D 9 種可能情形
      - ＝E 8 種可能情形
      - ＜F 9 種可能情形
    - ＜▲第三秤（2, 5, 對 11, 12）
      - ＞G 9 種可能情形
      - ＝H 9 種可能情形
      - ＜I 9 種可能情形
  - ＝◎第二秤（1, 2, 5, 9, 10, 11, 12 對 3, 4, 6, 7, 8, 13, 14）
    - ＞★第三秤（3, 7, 13 對 4, 8, 14）
      - ＞J 9 種可能情形
      - ＝K 9 種可能情形
      - ＜L 9 種可能情形
    - ＝◎第三秤（3, 6, 9 對 4, 7, 10）
      - ＞M 9 種可能情形
      - ＝◎ 8 種可能情形
      - ＜N 9 種可能情形
    - ＜☆第三秤（3, 7, 13 對 4, 8, 14）
      - ＞O 9 種可能情形
      - ＝P 9 種可能情形
      - ＜Q 9 種可能情形
  - ＜○第二秤（1, 5, 9, 10, 11 對 2, 6, 12, 13, 14）
    - ＞○第三秤（5, 2 對 11, 12）
      - ＞R 9 種可能情形
      - ＝S 9 種可能情形
      - ＜T 9 種可能情形
    - ＝□第三秤（5, 7, 15 對 6, 8, 16）
      - ＞U 9 種可能情形
      - ＝V 8 種可能情形
      - ＜W 9 種可能情形
    - ＜△第三秤（1, 6, 對 11, 12）
      - ＞X 9 種可能情形
      - ＝Y 9 種可能情形
      - ＜Z 9 種可能情形

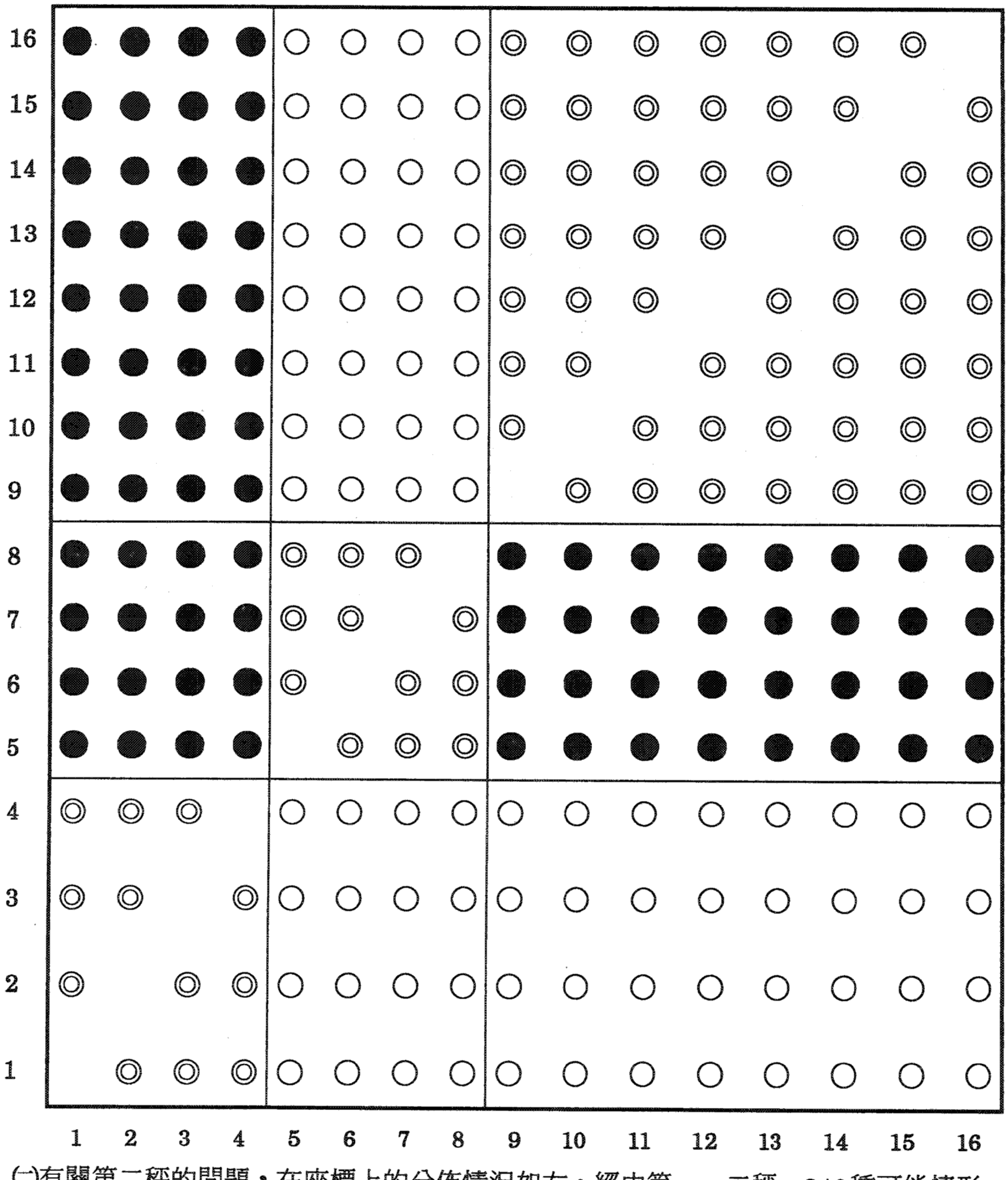
(一)十六枚金幣的問題，經由第一秤在天平的左邊放上編號1，2，3，4號金幣；天平的右邊放上編號5，6，7，8號金幣。則240種可能情形經由這麼一秤，可區分成3種狀況

●表示左重

◎表示平衡

○表示右重

[左重]、[平衡]、[右重]的個數比＝80：80：80



(二)有關第二秤的問題，在座標上的分佈情況如右，經由第一、二秤，240種可能情形已被分成9種狀況，如下圖：

16	●	▲	■	■	○	△	□	□	★	★	★	★	☆	☆	◎	
15	●	▲	■	■	○	△	□	□	★	★	★	★	☆	☆		◎
14	●	■	●	●	○	□	○	○	★	★	★	★	◎		★	★
13	●	■	●	●	○	□	○	○	★	★	★	★		◎	★	★
12	●	■	●	●	○	□	○	○	◎	◎	◎		☆	☆	☆	☆
11	■	▲	▲	▲	□	△	△	△	◎	◎		◎	☆	☆	☆	☆
10	■	▲	▲	▲	□	△	△	△	◎		◎	◎	☆	☆	☆	☆
9	■	▲	▲	▲	□	△	△	△		◎	◎	◎	☆	☆	☆	☆
8	●	▲	■	■	★	◎	◎		●	●	●	▲	▲	▲	■	■
7	●	▲	■	■	★	◎		◎	●	●	●	▲	▲	▲	■	■
6	●	■	●	●	★		◎	◎	●	●	●	■	■	■	●	●
5	■	▲	▲	▲		☆	☆	☆	■	■	■	▲	▲	▲	▲	▲
4	★	★	◎		○	△	□	□	○	○	○	△	△	△	□	□
3	★	★		◎	○	△	□	□	○	○	○	△	△	△	□	□
2	◎		☆	☆	○	□	○	○	○	○	○	□	□	□	○	○
1		◎	☆	☆	□	△	△	△	□	□	□	△	△	△	△	△
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

㈢有關第三秤的問題，在座標圖上的分佈情況如下圖，經由第一、二、三秤，240種可能情被區分爲27種狀況。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
16	A	G	D	E	R	X	U	V	K	K	K	K	O	Q	◎	
15	A	G	E	F	R	X	V	W	K	K	K	K	O	Q		◎
14	A	F	B	B	R	W	S	S	J	J	J	J	◎		J	J
13	A	F	B	B	R	W	S	S	L	L	L	L		◎	L	L
12	A	F	A	A	R	W	R	R	M	N	◎		O	Q	P	P
11	D	G	G	G	U	X	X	X	M	N		◎	O	Q	P	P
10	D	G	H	H	U	X	Y	Y	M		M	M	O	Q	P	P
9	D	G	H	H	U	X	Y	Y		N	N	N	O	Q	P	P
8	A	G	D	F	J	M	N		B	B	C	I	H	H	D	F
7	A	G	D	F	L	M		M	B	B	C	I	H	H	D	F
6	B	F	C	C	K		N	N	C	C	C	E	E	E	C	C
5	D	H	I	I		P	O	Q	E	E	E	I	I	I	I	I
4	J	J	M		R	X	U	W	S	S	T	Z	Y	Y	U	W
3	L	L		N	R	X	U	W	S	S	T	Z	Y	Y	U	W
2	◎		O	Q	S	W	T	T	T	T	T	V	V	V	T	T
1		◎	O	Q	U	Y	Z	Z	V	V	V	Z	Z	Z	Z	Z

㈣有關第四秤的問題，經由第一、二、三、四秤，240種可能情形已區分爲81種狀況，其解決對策，依圖形的種類共可分成八種類型，類型不同，解決對策也不同。類型一：A，C，G，I，R，T，X，Z；類型二：B，H，S，Y；類型三：D，F，U，W；類型四：E，V；類型五：J，L，O，Q；類型六：K，P；類型七：M，N；類型八：◎；類型一～A的解決對策爲7，8，13　14，15，16

㈤範例：類型一～A第一秤至第五秤的解法如下：

>表示左重

＝表示平衡

<表示右重

<table>
<tr><th>第一秤</th><th></th><th>第二秤</th><th></th><th>第三秤</th><th></th><th>第四秤</th><th></th><th>第五秤</th><th></th><th>結 果</th><th></th></tr>
<tr><td rowspan="9">4 8
3 7
2 6
1 5</td><td rowspan="9">>
左
重</td><td rowspan="9">2
5 6
9 12
10 13
11 14</td><td rowspan="9">>
左
重</td><td rowspan="9">1 11
6 12</td><td rowspan="9">>
左
重</td><td rowspan="9">7 14
8 15
13 16</td><td rowspan="3">></td><td rowspan="3">16 14</td><td>></td><td>(1,14)</td><td>A</td></tr>
<tr><td>=</td><td>(1,15)</td><td>A</td></tr>
<tr><td><</td><td>(1,16)</td><td>A</td></tr>
<tr><td rowspan="3">=</td><td rowspan="3">1 4</td><td>></td><td>(1,12)</td><td>A</td></tr>
<tr><td>=</td><td>(3,12)</td><td>A</td></tr>
<tr><td><</td><td>(4,12)</td><td>A</td></tr>
<tr><td rowspan="3"><</td><td rowspan="3">13 7</td><td>></td><td>(1, 7)</td><td>A</td></tr>
<tr><td>=</td><td>(1, 8)</td><td>A</td></tr>
<tr><td><</td><td>(1,13)</td><td>A</td></tr>
</table>

六、討論

在本節將討論金幣總數爲任意數C，在第一秤時，天平的左右應各取幾個金幣才能最符合三分法的精神？我們分別從觀察座標實作紀錄表與代數推演來討論。

(一)觀察座標實作紀錄表：

從四枚、五枚、六枚、七枚……十六枚金幣中，找出兩枚一重、一輕的異常金幣，由第一秤天平左右各取的金幣數a，對三分所有可能出現情形的情況，判定正好三等分、最接近三等分、以及可以在最少的秤數內秤完的情形如下表：

研究發現：

金幣數爲平方數時，第一秤才可以三等分所有的可能出現情形。（如下表中⊙記號者）

金幣數 c	第一秤天平的左右各取a個金幣								最少秤數
	1	2	3	4	5	6	7	8	
4	○	⊙							
5	◎	○							3
6	◎	○	◎						
7	○	○	◎						
8		◎	○	○					
9		⊙	○	⊙					4
10	○	◎	○	◎	○				
11	○	○	○	○	◎				
12		○	◎	○	◎	○			
13		○	◎	○	○	○			
14			○	○	○	◎			
15				◎	○	◎			
16				⊙					5

註：○表示能在最少的秤數秤完。

◎表示能在最少的秤數秤完，且最接近三等分。

⊙表示能在最少的秤數秤完，且正好三等分。

㈡代數推演

令金幣總數＝c，第一秤天平左右各取的金幣個數＝a，

第一秤剩餘的金幣個數＝b，則$c=2a+b$。

第一秤出現左重、平衡、右重、三種情況所能涵蓋的可能出現情形個數如下：

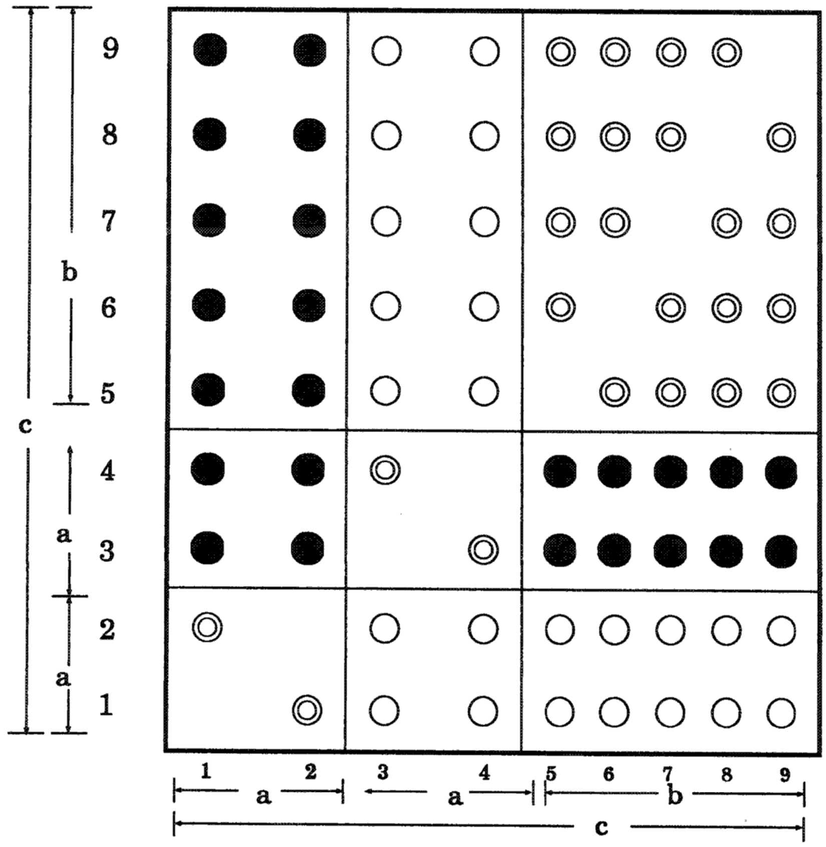
〔右重〕＝〔左重〕＝$a^2+2ab=(2c-3a)\times a$

〔平衡〕＝$2a(a-1)+b(b-1)=(a-b)^2-c$

〔平衡〕－〔左重〕＝$(2a^2+b^2-c)-(a^2+2ab)$

$=a^2-2ab+b^2-c=(a-b)^2-c$

若$(a-b)^2>c$，則表示〔平衡〕＞〔左重〕且〔平衡〕＞〔右重〕



若 $(a-b)^2-c<0$；則表示〔平衡〕<〔左重〕

且〔平衡〕<〔右重〕。

若 $(a-b)^2-c=0$；則表示〔平衡〕=〔左重〕=〔右重〕

即 $c=(a-b)^2$

因此，唯有在c＝平方數時，第一秤的a值才可以均分所有的可能情形爲三等分。

當金幣總數c爲平方數，求第一秤的a值的方法如下：

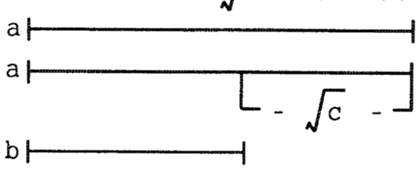
因爲 $(a-b)^2=c$，所以 $a-b=\sqrt{c}$ 或 $a-b=-\sqrt{c}$

由①，②可知，當金幣總數c＝平方數時，

第一秤可以將所有可能出現情形三等分的a值＝$(c\pm\sqrt{c})\div 3$

a＝1,2,3,4,…………

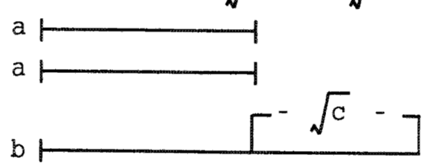
①當a>b時，$a-b=\sqrt{c}$，可繪成下圖：



$\because c=2a+b$

$\therefore a=(c+\sqrt{c})\div 3$

②當a<b時，$a-b=-\sqrt{c}$ 即 $b-a=\sqrt{c}$，可繪成下圖



$\because c=2a+b$

$\therefore a=(c+\sqrt{c})\div 3$

七、結論

(一)有c個金幣，其中有兩枚與正常金幣等差的一重、一輕異常金幣，其可能出現的情形共有c×（c－1）種。若將各種可能情形，以（重，輕）方式標示在直角座標上，有助於解決本問題。

(二)運用〔三分法〕的精神秤y次，則可包容3^y容種可能出現情形

(三)金幣總數c與在運氣最差的最少秤數y的關係如下：

$$3^{(y-1)} < c\times(c-1) \leq 3^y$$

金幣總數c	最少秤數y
4 ～ 5	三次
6 ～ 9	四次
10 ～ 16	五次
17 ～ 27	六次

金幣總數c	最少秤數y
28 ～ 47	七次
48 ～ 3^4	八次
82 ～140	九次
141 ～ 3^5	十次

(四)第一秤在天平左右各取的金幣數，對天平出現左重、平衡、右重的三種情況，所能涵蓋的可能出現情形個數如下：若已知金幣數爲c，設第一秤天平左右各取a個金幣，則剩餘金幣數爲b。

(1)〔右重〕＝〔左重〕$a^2+2ab=(2c-3a)\times a$

(2)〔平衡〕$=2a(a-1)+b(b-1)=2a^2+b^2-c$

(3)〔平衡〕－〔左重〕$=(a-b)^2-c=(3a-c)^2-c$

(五)在第一秤時，天平的左右應各取幾個金幣，才能最符合三分法的精神？

若已知金幣總數爲c，假設第一秤在天平左右各取a個金幣，

(1)當c爲平方數時，第一秤才可以將所有可能出現情形三等分：

$a=(c\pm\sqrt{c})\div3$，且a必須爲整數。

(2)當c非平方數時，第一秤不可能將所有可能出現情形三等分：

當$(3a-c)^2$與c的差最小時，此一a值最符合三分法的精神。

八、參考資料

(一)中華民國第31屆科展高小組〔十二枚金幣的奧妙〕。

(二)曹亮吉編著〔益智集〕第24頁〔孰重孰輕〕。

評語

16枚金幣中不正常者一輕一重，差距相等，是從習見的金幣稱重問題中，跳出老套，富有創新的變化，其解法採用電腦解題中所謂直觀法(Heuristic methord)入手，先從5稱可得243種狀況，再從金幣數的安排來窮究，而以第一稱能將240種金幣組合，平分在左輕、相等、左重三類中。解法細膩。參加學生在對答中，能夠把解題的要點扼要呈現。其看板報告表達明確，以坐標加顏色的表達富有創意。突破之後，又能做週到的檢討，及可能的推廣，富有研究精神。就兒童數學學習心理學的觀點來看，確是此階段兒童的自然表現。