

可以分公平一點吧！



初小組數學科第二名

宜蘭縣新南國民小學

作者：簡嘉儀 林佳盈 吳素梅

指導教師：陳昇群 林機勝

一、研究動機

開慶生會，老師拿出一塊正方形的大蛋糕，和大家分享，可是當時全班分成五組，要像  分，蛋糕上的奶油分不公平呢！只好像  從中心點分，可是，正方形只有四個邊，怎麼分成五塊呢？壽星們只好先切八個等分，再增增減減的，雖然分成了，不過，很不科學。一定有簡易的分法吧！我們決定找找看。

二、研究目的

- (一) 探討通過中心點，將正方形四等分後，作等分面積和原面積之間的比較、分析，找到關鍵，提出結論或公式。
- (二) 將上述的研究結果驗證在：1. 不同等分時。2. 其它形狀時，並證明可行。

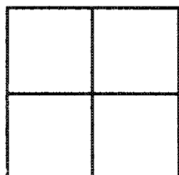
三、研究器材

色紙、尺、刀片、計算機、量角器、圓規。

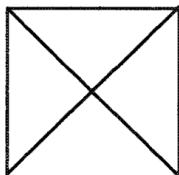
四、研究過程

<過程一> 摺摺看，通過中心點，將邊長10公分的正方形，分成四等分。

(一) 方法：1. 對邊摺：



2. 對角摺：



(二) 結果：

各可摺出4個完全一樣的正方形和等腰直角三角形。

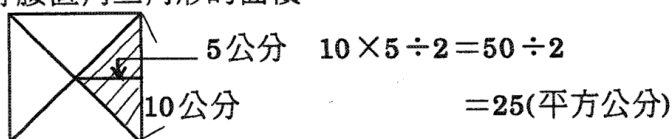
(三)討論：

- 1.這兩種摺法，從中心點到各邊的摺線長都相等。
- 2.另外，對邊摺的摺線，正好是對角摺所摺出的三角形的高。
- 3.方法2.所摺出的等腰直角三角形的底邊長，和方法1.摺成的小正方形的兩邊長之和，都是10公分。（原正方形的周長是40公分哦！）

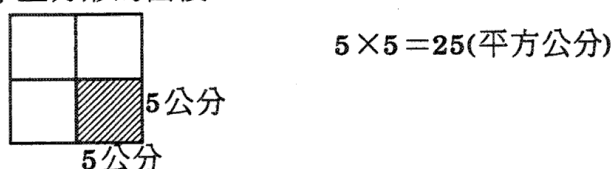
(四)發現：

1.我們以面積公式去發現：

(1)等腰直角三角形的面積：



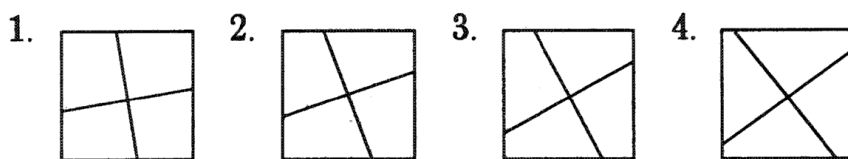
(2)小正方形的面積：



- 2.小正方形和小等腰直角三角形的周長和面積，都是原來大正方形的四分之一！
難道等分面積和等分周長有關？

<過程二>通過中心點，正方形要分成四等分，還有其它摺法嗎？

(一)方法：將每邊10公分的正方形，邊長各分成1.6公分4公分。2.7公分3公分。3.8公分2公分。4.9公分1公分。作為摺點，對摺看看，我們叫它們是「分邊摺」。（如下圖）



(二)結果：

- 1.上列四種摺法，每一種都可以分割出四個同樣大小的不定四邊形，我們一一剪下來，都重合。
- 2.可以確定：從中心點四等分正方形，可以先四等分邊長，連接中心點後，可以再四等分面積。

<過程三>能不能，從中心點將正方形五等分？

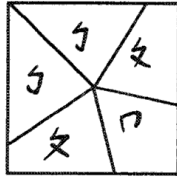
(一)方法：先等分周長，再等分面積

- 1.（如右圖）先求出正方形的周長：

$$4 \times 10 = 40 \text{ 公分}$$

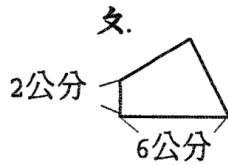
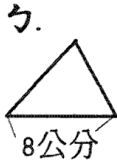
- 2.將周長5等分： $40 \div 5 = 8$ 公分

3. 在四邊上，每隔8公分做一點，和中心點聯結。



(二)結果：(如下圖)

該正方形被分成了5個部分。卻有3種形狀，其中，ㄅ、ㄆ兩種形狀出現兩次。



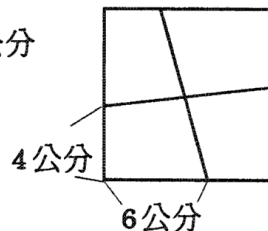
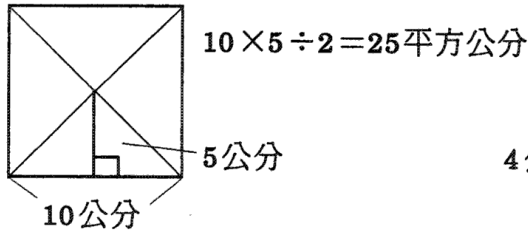
(三)討論：

上述ㄅ、ㄆ、ㄇ三種形狀的面積一樣嗎？我們回到〈過程一〉和〈過程二〉去找一找看吧！

〈過程四〉找一找等分後，不定形狀的面積算法

(一)方法：

1. 對角摺，三角形的面積：

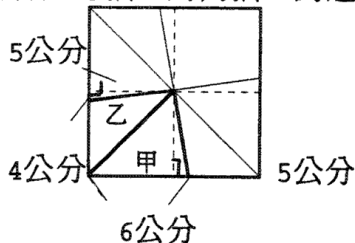


2. 分邊摺，不定四邊形的面積

？這種形狀怎麼算？只好去請教老師了。

3. 老師提示我們：將不定四邊形分成兩個三角形後，再算算看。這樣啊！那麼我們試試看——

(1)我們將分邊摺、對角摺、對邊摺都摺在一起。(如下圖)



(2)出現甲乙兩個三角形和它們的高。

(二)結果：

1. 終於可以計算不定四邊形的面積了

(1)甲三角形 $6 \text{公分} \times 5 \text{公分} \div 2 = 15$ 平方公分

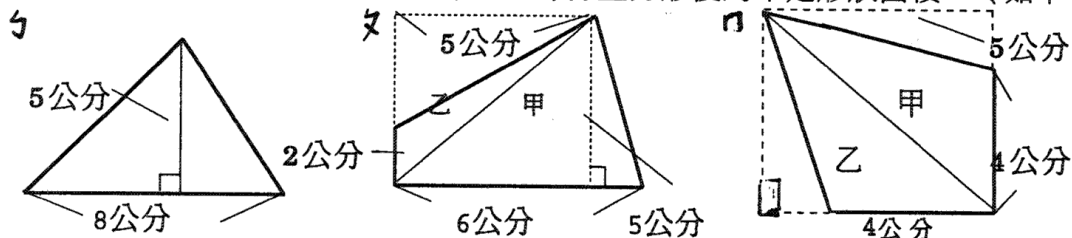
②乙三角形 $4 \text{公分} \times 5 \text{公分} \div 2 = 10 \text{平方公分}$

③不定四邊形的面積 $= 15 + 10 = 25 \text{平方公分}$

2.25平方公分正好是原正方形面積（100平方公分）的四分之一。

㊦討論：

拿這個方法，去解決〈過程三〉中，五等分正方形後的不定形狀面積：（如下）



$8 \times 5 \div 2 = 20$

(平方公分)

甲 $= 6 \times 5 \div 2 = 15$

乙 $= 2 \times 5 \div 2 = 5$

$15 + 5 = 20$ (平方公分)

甲面積 = 乙面積

所以□的總面積

$4 \times 5 \div 2 \times 2 = 20$ (平方公分)

原正方形的面積（100平方公分）正好都是ㄅㄆㄇ三種形狀面積的五倍，可見，我們分成功了。

㊦發現：我們將以上過程導出一個公式來。

1. 周長 \div 等分數 \times 高 = 等分的面積

2. 驗證的方法：等分的面積 \times 等分數 = 原面積

〈過程五〉發展活動

（研究一）將正方形做不同等分時

㊦方法：每邊6公分的正方形，做3、4、5、6、8等分。

㊦結果：如右圖，均可以等分。

□	等分	□=3	□=4	□=5	□=6	□=8
等分周長	周長 \div □ = 底	8	6	4.8	4	3
等分面積	底 \times 高 \div 2	12	9	7.2	6	4.5
原面積	\times □ 等分	36	36	36	36	36

（研究二）哪些四邊形可以利用這個方法，將面積等分

㊦方法：我們選擇課本裡所列的形狀一一試驗。

㊦結果：如右圖。

形狀	正方形	長方形	菱形	平行四邊形	梯形	不定四邊形
可以 \checkmark	\checkmark		\checkmark			

㊦討論和結論：

1. 只有正方形和菱形可以用這個方法等分，其它的都不行。

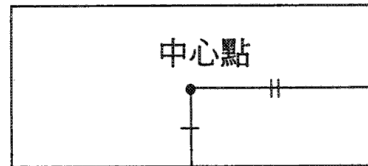
2. 我們歸納了兩點重要結論：

- (1)正方形和菱形的每一邊都等長。
 (2)從中心點到各邊的垂直距離也都相等。



菱形(可以)

(中心點到不同兩邊的距離等長)



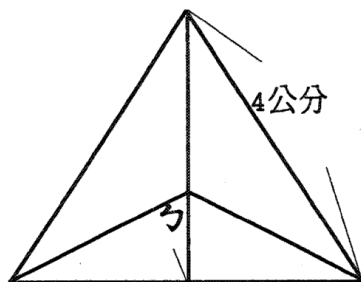
長方形(不能)

(中心點到不同兩邊的距離不等長)

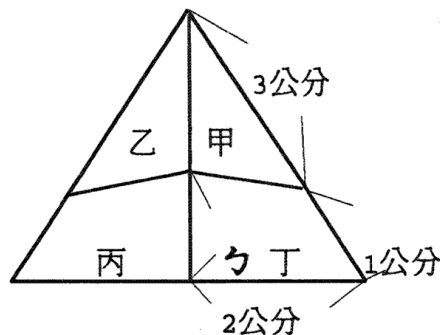
(研究三) 運用公式，證明正三角形也可以用這個方法去等分

(一)方法：

1. (如右圖一) 每邊4公分的正三角形，很難正確的量出中心點到邊的垂直距離(高)，以 u 代替，所以面積是 $(4 \times u \div 2) \times 3 = 6 \times u$



2. (如右圖二) 將其分成四等分，每邊4公分，周長12公分，分成4等分後，每3公分定一點。



(1)利用公式

$$4 \times 3 \div 4 \times u \div 2 = 1.5 \times u$$

(2)驗證 $(1.5 \times u) \times 4 = 6 \times u$

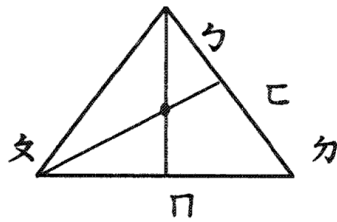
(二)結果：

1. 圖二，甲乙丙丁四個部分的面積相等，總和也是 $6 \times u$ ，可見正三角形可以用這方法等分。
 2. 以此類推，其它的正多邊形，也適用這方法去等分面積。

<過程六> 新發現！任意三角形也可以這樣等分

(研究一) 從正三角形出發，探討任意三角形等分的方法

(一)方法：利用摺紙，找出中心點(如下圖)。



(二)結果：

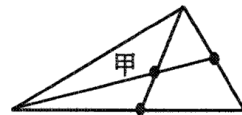
1. ウワ線段和文カ線段在三角形中央的交點，就是中心點。
2. 以ウワ線段來看，ウワ線段平分了兩個地方：
 - (1) 文カ線段(邊)；(2) ウ角。

(三)討論：

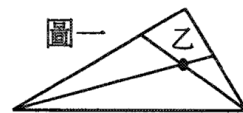
1. 這個中心點，已確定可以等分面積。(在過程五、研究三中)
2. 我們決定從上面<結果二>的兩個重點去探討任意三角形的中心點。

(四)發現：

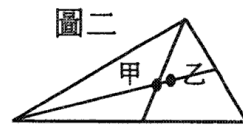
1. 平分任意三角形的邊，如右圖：
 - (1) 找出一個點。(我們暫定為甲中心點)
 - (2) 從甲中心點到三個邊的垂直距離不相等，所以，這個方法證明失敗！



2. 平分任意三角形的角，如右圖一：
 - (1) 又找出一個點，和甲中心點不同位置。(暫定為乙中心點)如右圖二。



- (2) 從乙中心點到三個邊的距離相等，所以，我們從平分角度去得到的乙中心點，是可以用來等分面積的。



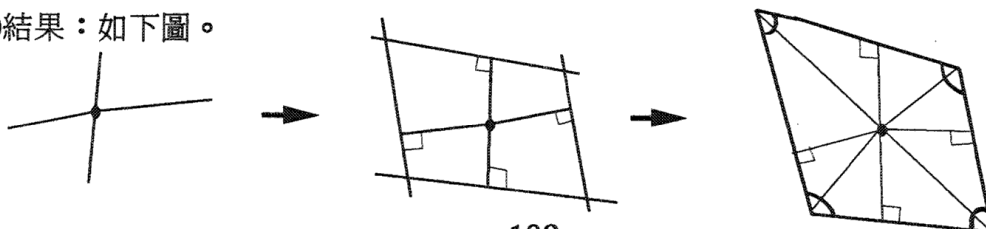
- (3) 任意三角形的角平分線所交會出來的乙中心點，完全符合我們的「通過中心點，等分周長，即可等分面積」的要求。

(研究二) 從「乙中心點」出發，看任意四邊形也能等分面積

(一)方法：

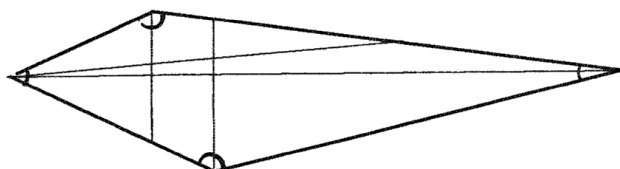
1. 定一點，任意向四個方向，作四條相等長度的線段。
2. 再作這四條線段的垂直線，交會成一個任意不定四邊形。

(二)結果：如下圖。



(三)討論：

- 1.上述的任意四邊形，雖然各邊不相等，卻也能適用這種等分面積的方式。所以，〈過程五〉中的結論看來必須做修正了。
- 2.另外，從「中心點」到各角的連線，也平分了各角。
- 3.我們試著從反方向去作：先剪出一個任意四邊形，用平分四角的摺線去找交點（中心點），卻發現不能！（如下圖）



(四)發現：

- 1.任意四邊形並全部都能適用我們的方法去等分面積。
- 2.只要任意四邊四個角的角平分線，相交在一點上，就可以用這一點，做為「中心點」去等分面積。
- 3.經過驗證：任意五邊形也可以依上述的發現去等分面積。
- 4.終於，我們的結論必須修正成：
「通過中心點（此點必須到各邊的距離都相等），將周長的等分點，連接中心點形成的各部分面積，即為等分面積。」

五、總結論

- (一)利用摺紙和面積公式，我們能很完整的解決切蛋糕、求公平的問題。
- (二)只要找出：到各邊都等長的多邊形的內部一點，做為中心點，我們可以從這中心點到周長的等分點做切割，求出等分面積。
- (三)這方法不能適用於平分各角時，角平分線無法交會成一點的圖形，像長方形和平行四邊形。

六、檢討和感想

- (一)我們都深深感覺到，數學這門學問必須要深入研究下去，才能發現裡面的奇妙世界。一個問題解決了，另一個問題又出現了，甚至把原來的結論給修改了。
- (二)所以，這件作品帶給我們的，不只是解決公平切蛋糕的問題，它更帶給我們怎樣去求證一件事情的根本和過程的緊張刺激感，這種經驗真好，我們願意介紹給大家。

七、參考資料

國小數學課本 第七、九冊

國立編譯館

評語

對於初小之學生能夠利用所學幾樣簡單之圖形來考慮如何平分三角形、四邊形及五邊形，雖然簡單，不夠嚴謹但仍然可貴，故建議給予第二名。