

# 負數的面具「和拾數」

## 國中組數學科第三名

雲林縣立虎尾國民中學

作者：蔡配華、鐘文紹、王俊中、謝正祿

指導教師：鄭朝亨

### 一、研究動機與目的

從背九九乘法表開始，我們就對除法充滿新奇並也有份神秘感，在當時我們只覺得很不容易猜到商是多少？餘數是多少？

到了國中，在課本中又發現要去判定是否兩數有因數倍數的關係時也是使用除法去算；但是課本中列舉了2、3、4、5、9、11等幾個不需要使用複雜而長的除法就可以知道是否會整除的計算技巧。

因此我們在想是否有較簡單而不複雜的計算過程，可以來幫助計算？所以我們決定對四則運算加以研究整理，期望能找出一些規則或方法來減少傳統運算上的不方便。

### 二、研究過程

(一)「和拾數」的介紹：

計算中發現較小的數計算上較為方便，因此我們將

-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

以⑨ ⑧ ⑦ ⑥ ⑤ ④ ③ ② ①代表

而 $9=10+(-1)$ ， $8=10+(-2)$ ， $7=10+(-3)$ ，……因此

結論：某位數可用10加上「和拾數」來表示。

(二)「和拾數」的表示法：

要維持變小的數，因此把大於5的數字換成「和拾數」。

① 8記作1 ② -8記作①2

② 27記作3 ③ 72記作1 ③ 2

-27記作③ 3 -72記作① 3 ②

③ 139記作 1 4 ① 905記作1 ① 0 5

-139記作① ④ 1 -905記作① 1 0 ⑤

規則：由個位數起將大於5的位數數字變成「和拾數」，而高一位數要加1；若為負數，則全部做型態變換。

例：2991825

↓小於6，不變

2991825

↓小於6，不變

2991825

+1↓大於5，變「和拾數」

2992②25 高一位加1

↓小於6，不變

2992②25

+1↓大於5，變「和拾數」

30①2②25 高一位加1

↓小於6，不變

30①2②25

↓小於6，不變

30①2②25

↓正數，不變

30①2②25

-3765

↓小於6，不變

-3765

+1↓大於5，變和拾數

-38④5

+1↓大於5，變和拾數

-4②④5 高一位加1

↓小於6，不變

-4②④5

↓負數，做型態變換，去負號

④24⑤

結論：任一數都可以利用「和拾數」的方法變成每位數的數字均小於6

(二)「和拾數」的還原：

結果需用原來的記數方法表示，因此需要將它還原為原來計數。

(1) 3②記作28

③2記作-28

(2) 1②3記作83

12③記作117

①2③3記作-83

①②3記作-117

(3) 13②2記作1282

3④4②記作2638

①③2②記作-1282

③4④2記作-2638

規則：由最高位數起將「和拾數」的位數數字變成原代表數，而高一位數要減 1；

若最高位數為「和拾數」，則先做型態轉換。

例：30①2②25

↓非「和拾數」，不做型態轉換

30①2②25

↓非「和拾數」，不變

30①2②25

↓非「和拾數」，不變

③2①1

↓「和拾數」做型態轉換

-3②1①

↓B

-3②1①

-1↓A

$$30\textcircled{1}2\textcircled{2}225$$

$$-1\downarrow A$$

$$2992\textcircled{2}25$$

↓非「和拾數」，不變

$$2992\textcircled{2}25$$

$$-1\downarrow A$$

$$2991825$$

$$\downarrow B$$

$$2991825$$

$$\downarrow B$$

$$2991825$$

$$-281\textcircled{1}$$

$$\downarrow B$$

$$-281\textcircled{1}$$

$$-1\downarrow A$$

$$-2809$$

設A為「和拾數」，變為原代表數；高一位數減1

設B為「非「和拾數」，不變

結論：任一含有「和拾數」的數均可藉此規則還原為原來的表示方法。

#### (四)「和拾數」的加法：

利用整數的加法運算，即可做加法。

(1)  $39 + 68 = ?$

(2)  $2947 + 8725 = ?$

$$39 + 68 = 4\textcircled{1} + 1\textcircled{3}\textcircled{2}$$

$$2947 + 8725 = 3\textcircled{1}5\textcircled{3} + 1\textcircled{1}\textcircled{3}25$$

$$4\textcircled{1}$$

$$3\textcircled{1}5\textcircled{3}$$

$$+ 1\textcircled{3}\textcircled{2}$$

$$+ 1\textcircled{1}\textcircled{3}25$$

$$\hline 11\textcircled{3}$$

$$\hline 12\textcircled{4}72$$

$$11\textcircled{3} = 107$$

$$12\textcircled{4}72 = 11672$$

規則：將每一項先轉換成「和拾數」表示法，再利用整數加法加出結果，最後再轉換成原數。

例： $36729 + 278 = ?$

$$36729 + 278 = 4\textcircled{3}\textcircled{3}3\textcircled{1} + 3\textcircled{2}\textcircled{2}$$

$$4\textcircled{3}\textcircled{3}3\textcircled{1}$$

$$+ 3\textcircled{2}\textcircled{2}$$

$$\hline 4\textcircled{3}01\textcircled{3} \rightarrow \textcircled{1} + \textcircled{2} = (-1) + (-2) = -3$$

$$3 + \textcircled{2} = 3 + (-2) = 1$$

$$\textcircled{3} + 3 = (-3) + 3 = 0$$

$$\textcircled{3} + 0 = \textcircled{3}$$

$$4 + 0 = 4$$

$$4\textcircled{3}01\textcircled{3} = 37007$$

$$-2746 + 372 = ?$$

$$-2746 + 372 = \textcircled{3}3\textcircled{5}4 + 4\textcircled{3}2$$

$$\begin{array}{r}
 \textcircled{3}3\textcircled{5}4 \\
 + \quad 4\textcircled{3}2 \\
 \hline
 \textcircled{3}7\textcircled{8}6 \rightarrow 4+2=6 \\
 \begin{array}{l}
 \textcircled{5} + \textcircled{3} = (-5) + (-3) = -8 \\
 3 + 4 = 7 \\
 \textcircled{3} + 0 = \textcircled{3}
 \end{array} \\
 \hline
 \textcircled{3}7\textcircled{8}6 = -2374
 \end{array}$$

結論：任何加法都可利用「和拾數」的表示法再加以計算，而且很少需要處理進位。

(五)「和拾數」的減法：

利用整數的減法運算可以表示成爲加（負數）即可做減法。

$$\textcircled{1}46 - 97 = ?$$

$$46 - 97 = 46 + (-97)$$

$$= 5\textcircled{4} + \textcircled{1}03$$

$$\begin{array}{r}
 5\textcircled{4} \\
 + \textcircled{1}03 \\
 \hline
 \textcircled{1}5\textcircled{1} \quad \textcircled{1}5\textcircled{1} = -51
 \end{array}$$

結論：任何減法運算只要透過加負數的方法即可計算。

(六)「和拾數」的乘法：

利用整數的乘法運算，即可做乘法。

$$\textcircled{1} \quad 38 \times 94 = ?$$

$$38 \times 94 = 4\textcircled{2} \times 1\textcircled{1}4$$

$$\begin{array}{r}
 4\textcircled{2} \\
 \times 1\textcircled{1}4 \\
 \hline
 16\textcircled{8} \\
 42 \\
 42 \\
 \hline
 458\textcircled{8} \\
 \text{合}3572
 \end{array}$$

$$\textcircled{2} \quad 362 \times (-193) = ?$$

$$362 \times (-193)$$

$$= 4\textcircled{4}2 \times \textcircled{2}1\textcircled{3}$$

$$\begin{array}{r}
 4\textcircled{4}2 \\
 \times \textcircled{2}1\textcircled{3} \\
 \hline
 12\textcircled{6} \\
 \textcircled{1}2 \\
 442 \\
 \hline
 \textcircled{8}84 \\
 \textcircled{7}1\textcircled{9}4\textcircled{6} \\
 \text{合}-69866
 \end{array}$$

規則：將每一項轉換成「和拾數」後依整數的乘法計算出結果，最後再轉換成原數。

例：58699 × 396 = 6①30① × 40④

$\begin{array}{r} 6①\ 3\ 0① \\ \times\ 4\ 0④ \\ \hline 1\ 2\ 0\ 4 \rightarrow ④ \times ① = 4, ④ \times 0 = 0, ④ \times ③ = 12 \\ ②④\ 4 \rightarrow ④ \times ① = 4, ④ \times 6 = ②④ \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ ①②\ 0④ \rightarrow 4 \times ① = ④, 4 \times 0 = 0, 4 \times ③ = ①② \\ 2\ 4④ \rightarrow 4 \times ① = 4, 4 \times 6 = 24 \\ \hline 2\ 4⑦⑥\ 5②\ 0\ 4 \quad \text{合} 23244804 \end{array}$	<p>符號法則</p> <p>① × ① = 1</p> <p>① × 1 = ①</p> <p>1 × ① = ①</p> <p>1 × 1 = 1</p>
$\begin{array}{r} 6①③\ 0① \\ \quad\quad 4\ 0④ \\ \hline ②④\ 5\ 2\ 0\ 4 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 24⑤②\ 0④ \\ \hline 24⑦⑥\ 5②\ 0\ 4 \end{array}$	

結論：任何乘法均可用「和拾數」的方法計算，而且數字較小。

(七)「和拾數」的除法：

利用整數的除法，即可做除法。

(1)  $63 \div 29 = 1④3 \div 3①$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 3① \overline{) 1④3} \\ \underline{6②} \quad \text{商} 2 \\ 5 \quad \text{餘數} 5 \end{array}$$

(2)  $17294 \div 817 = ?$

$$\begin{array}{r} 2\ 1 \\ 1\ ②②③ \overline{) 2③\ 3①\ 4} \\ \underline{2④\ 4⑥} \\ 1①\ 5\ 4 \\ \underline{1②\ 2③} \quad \text{商} 21 \\ 1\ 3\ 7 \quad \text{餘數} 137 \end{array}$$

規則：將每一項轉換成「和拾數」後依整數的除法計算出結果，最後再轉換成原數。

例：29385 ÷ 819 = ?

$$29385 \div 819 = 3①4②5 \div 1②2①$$

$$\begin{array}{r}
 35 \\
 1\textcircled{2}2\textcircled{1} \sqrt{3\textcircled{1}4\textcircled{2}5} \\
 \underline{3\textcircled{6}6\textcircled{3}} \rightarrow 3 \div 1 \text{ 試除得 } 3; 3 \times 1\textcircled{2}2\textcircled{1} \\
 5\textcircled{2}15 \rightarrow \textcircled{2} - \textcircled{3} = 1, 4 - 6 = \textcircled{2}, \textcircled{1} - \textcircled{6} = 5 \\
 \underline{5\textcircled{9}0\textcircled{5}} \rightarrow 5 \div 1 \text{ 試除得 } 5; 5 \times 1\textcircled{2}2\textcircled{1} \\
 720 \rightarrow 5 - \textcircled{5} = 10, 1 - 0 + 1 = 2 \\
 \textcircled{2} - \textcircled{9} = 7
 \end{array}$$

結論：任何除法均可用「和拾數」的方法計算，而且數字較小也較不用進（借）位。

### 三、應用：判別 $A \div B$ 是否整除

例：求  $2798374 \div 37$  的餘數

$$\begin{array}{r}
 2798374 = 3\textcircled{2}0\textcircled{2}4\textcircled{3}4 \\
 \begin{array}{r}
 75631 \\
 4\textcircled{3} \sqrt{3\textcircled{2}0\textcircled{2}4\textcircled{3}4} \\
 \underline{26\textcircled{1}} \\
 21\textcircled{2} \\
 \underline{19\textcircled{5}} \\
 234 \\
 \underline{23\textcircled{8}} \\
 12\textcircled{3} \\
 \underline{12\textcircled{9}} \\
 64 \\
 \underline{4\textcircled{3}} \\
 27 \quad \text{餘數}27
 \end{array}
 \end{array}$$

另解： $37 \times 27$

$$\begin{array}{r}
 = 999 \\
 = 100\textcircled{1} \\
 \begin{array}{r}
 2801 \\
 100\textcircled{1} \sqrt{2798374} \\
 \underline{200\textcircled{2}} \\
 800374 \\
 \underline{800\textcircled{8}00} \\
 1174 \\
 \underline{100\textcircled{1}} \\
 175 \\
 175 \div 37 = 4 \dots 27
 \end{array}
 \end{array}$$

### 四、研究結果

由前述幾個簡單的結論，使我們瞭解，若能適當的運用負數是可改善四則運算的過程，減少發生借位進位的情形，因此運算速度可大為提升。也由此更能體會出，負數的學習和引入，不只是用來表示不足或不同的方向，而是負數也是數的一部份，它和正數一樣是可以混合在一起運算的。在最後利用除法求餘數的另解中，我們更指出如果再引用其他數學觀念配合「和拾數」將可增大計算的威力，也更加深我們對研究數學的好奇心。

## 五、討 論

- (一)在此次研究中，我們只對四則基本運算做探討，我們發現「大體上負數如同正數一樣，不必因學習負數而放棄舊有的運算方法」。由此可知數學方法有強烈的繼承性。
- (二)目前我們只學了負數的四則運算、因數與倍數、應用問題的解法，其中因數倍數在另解中我們提出了另一種算法，雖然我們沒有很深入的加以探討研究，但相信其中是有值得探討的內容，希望將來能有足夠的時間再深入的加以研究。

## 六、參考資料

- (一)原理：有號數的乘法符號法則。
- (二)資料：國中數學第一冊。

## 評語

本件作品是考慮如何提高四則運算的速度，作者考慮加入負數，結果確實能加速四則運算之進行，相當具有創新之觀念。