丁字路口地下人行道應如何設計

國中組數學科第二名

臺北縣立福和國民中學

作　　者：林玫如、蘇培珍、杜郁欣、邱馨儀

指導教師：陳瑞欣、劉睿琦

一、研究動機

走在秀朗國小（得和路、永元路）及台大（羅斯福路、新生南路）這二個丁字路口之地下人行道，發現前者略呈L形，而後者呈T形，引起我們研究的動機。

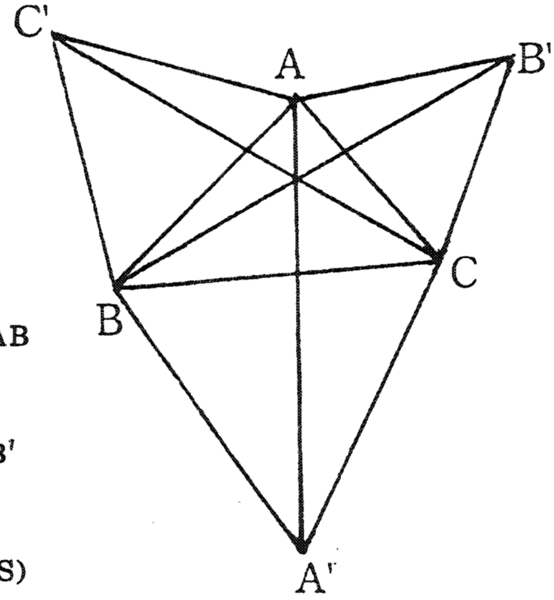
二、研究目的

希望找出丁字路口之地下人行道設計，有一長度最短，經費最省，施工最快，提供參考。

三、研究過程

(一)假設人行道三個出口的位置A，B，C均已選定，且△ABC三個內角均小於120°。

基本原理：給定一個△ABC，分別自三邊向外作正三角形△ABC'，△BCA'，△CAB'則



（圖一）

1. $\overline{AA'}=\overline{BB'}=\overline{CC'}$（圖一）

證明：△ACC'及△ABB'中

$\because \overline{AC'}=\overline{AB}$，

$\overline{AC}=\overline{AB}$

$\angle CAC'=\angle BAC+\angle C'AB$

$=\angle BAC+60°$

$=\angle BAC+\angle CAB'$

$=\angle BAB'$

$\therefore \triangle ACC' \cong \triangle AB'B$ (S.A.S)

故$\overline{CC}=\overline{BB'}$（對應邊相等）

同理可證：△BAA'＝△BC'C，故$\overline{AA'}=\overline{CC'}$

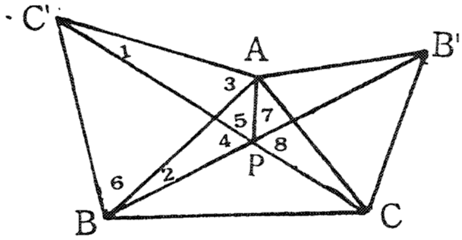
$\therefore \overline{AA'}=\overline{BB'}=\overline{CC'}$

2. 設$\overline{BB'}$交$\overline{CC'}$於P點，則$\angle APB'=\angle APC=\angle BPC=120°$（圖二）

證明：由1.的證明知$\triangle ACC'\cong\triangle AB'B$，故$\angle 1=\angle 2$，因此A，P，B，C'四點共圓，$\therefore\angle 4=\angle 3=60°$，$\angle 5=\angle 6=60°$，因此$\angle APB=\angle 4+\angle 5=120°$，同理可證：$\angle 7=60°$，$\angle 8=60°$，因此$\angle APC=\angle 7+\angle 8=120°$

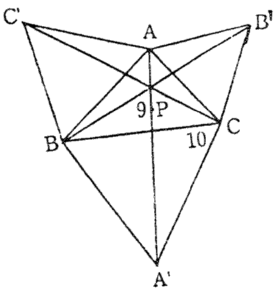
$\angle BPC=360°-\angle APB-\angle APC=120°$

$\therefore\angle APB=\angle APC=\angle BPC=120°$



（圖二）

3. $\overline{AA'}$，$\overline{BB'}$，$\overline{CC'}$三直線交於一個點（共點）（圖三）



（圖三）

證明：同2.設$\overline{BB'}$交$\overline{CC'}$於P點，連$\overline{AP}$及$\overline{A'P}$，由2.知$\angle APB=\angle BPC=120°$

$\because\angle BPC+\angle BA'C=120°+60°=180°$

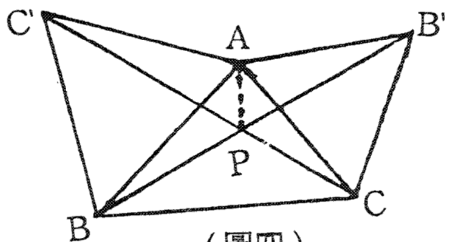
$\therefore$B，A'，C，P四點共圓。

因此$\angle 9=\angle 10=60°$

$\therefore\angle APB+\angle BPA'=120°+60°=180°$

即A，P，A'三點共線，也就是$\overline{AA'}$，$\overline{BB'}$，$\overline{CC'}$三線交於P點。

理想地下人行道的設計：（圖四）



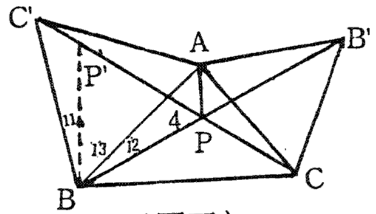
（圖四）

造法：⑴以$\overline{AB}$，$\overline{AC}$爲邊，分別向外作正三角形$\triangle ABC'$及$\triangle ACB'$

⑵連$\overline{BB'}$及$\overline{CC'}$，設其交點爲P

⑶連$\overline{AP}$，則$\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}$爲最短。

性質1：$\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}=\overline{CC'}=\overline{BB'}=\overline{AA'}$（圖五）



（圖五）

證明：⑴在$\overline{PC'}$上取一點P'，使得$\overline{PP'}=\overline{BP}$，連$\overline{BP'}$。

⑵在$\triangle BPP'$中，$\because PP'=BP$，又$\angle 4=60°$，故$\triangle BPP'$爲正三角形。

$\therefore \angle PBP'=60°$

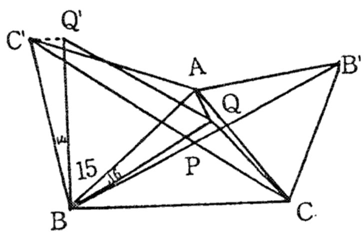
⑶$\triangle BP'C'$及 $\triangle BPA$中，$\overline{BC'}=\overline{BA}$，$\overline{BP'}=\overline{BP}$，$\angle 11=60°-\angle 13=\angle 12$

$\therefore \triangle BP'C' \cong \triangle BPA$(S.A.S.)

故$\overline{P'C'}=\overline{PA}$

⑷$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}=\overline{P'C'}+\overline{P'P}+\overline{CP}=\overline{CC'}=\overline{BB'}=\overline{AA'}$

性質2：設Q爲任意異於P之點，則$\overline{AQ}+\overline{BQ}+\overline{CQ}>\overline{CC'}=\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}$（圖六）



（圖六）

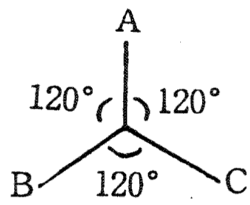
證明：⑴以$\overline{BQ}$爲一邊作正三角形$\triangle BQQ'$，則$\overline{BQ}=\overline{QQ'}=\overline{BQ'}$且$\angle QBQ'=60°$

⑵$\triangle BQ'C'$及$\triangle BQA$中，$\overline{BQ'}=\overline{BQ}$，$\overline{BC'}=\overline{BA}$

$\angle 14=60°-\angle 15=\angle 16$

$\therefore \triangle BQ'C' \cong \triangle BQA$(S.A.S)

故$\overline{Q'C'}=\overline{QA}$



⑶$\therefore \overline{AQ}+\overline{BQ}+\overline{CQ}=\overline{Q'C'}+\overline{QQ'}+\overline{CQ}>\overline{CC'}=\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}$

結論：三個出口位置A，B，C已選定，且$\triangle ABC$三個內角均小於120°時

ㄅ、理想地下人行道之設計應如

ㄆ、此時$\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}=\overline{CC'}=\overline{BB'}=\overline{AA'}$（如圖三）

ㄇ、P點的位置是唯一的。

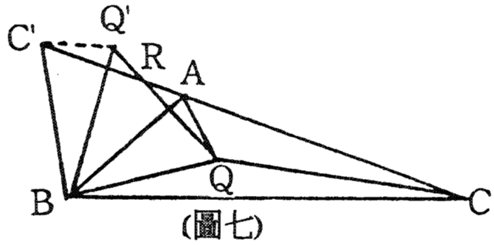
(二) 假設地下人行道三個出口均已選定，且∠A ≧120° 。

定理：△ABC中，∠A ≧120° ，Q爲異於A之任一點，則$\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}>\overline{AB}+\overline{AC}$。（Q在△ABC外部時，顯然不成立，不予討論。）

證明：1. 當Q在△ABC內部時，以$\overline{AB}$及$\overline{BQ}$分別爲邊作正三角形△ABC'及△BQQ'。

(1)若$\overline{AC'}$與$\overline{QQ'}$會相交，設其交點爲R，連$\overline{Q'C'}$在△RQ'C'中，$\overline{RQ'}+\overline{Q'C'}>\overline{RC'}$……①

ㄅ、若∠BAC＝120° ，則C'，A，C共線(圖七)，故$\overline{QR}+\overline{QC}>\overline{RC}$…②



(圖七)

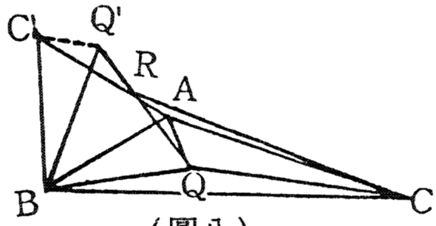
①、②兩式相加得：

$\overline{RQ'}+\overline{Q'C'}+\overline{QR}+\overline{QC}>\overline{RC'}+\overline{RC}=\overline{CC'}=\overline{AC'}+\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{AC}$

即$\overline{QQ'}+\overline{AQ}+\overline{CQ}>\overline{AB}+\overline{AC}$〔$\overline{Q'C'}=\overline{AQ}$證法同性質2中證明步驟(2)〕。

$\overline{BQ}+\overline{AQ}+\overline{CQ}>\overline{AB}+\overline{AC}$。

ㄆ、若∠BAC＞120° ，連$\overline{RC}$，則A爲△QRC內部一點（圖八）



（圖八）

故$\overline{QR}+\overline{QC}>\overline{AR}+\overline{AC}$……③

①、③兩式相加得：

$\overline{RQ'}+\overline{Q'C'}+\overline{QR}+\overline{QC}>\overline{RC'}+\overline{AR}+\overline{AC}$。

即$\overline{Q'Q}+\overline{AQ}+\overline{CQ}>\overline{AC'}+\overline{AC}$（$\overline{Q'C'}=\overline{AQ}$）

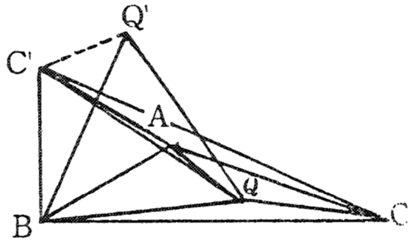
故$\overline{BQ}+\overline{AQ}+\overline{CQ}>\overline{AB}+\overline{AC}$得證

(2)若$\overline{AC'}$與$\overline{QQ'}$不相交，連$\overline{QC'}$，$\overline{Q'C'}$，則：

在△C'Q'Q中，$\overline{Q'C'}+\overline{Q'Q}>\overline{QC'}$……①

在△QC'C中，若

ㄅ、A為內部一點，（圖九）



（圖九）

$\therefore \overline{QC} + \overline{QC} > \overline{AC} + \overline{AC}$……②

①、②兩式相加得：

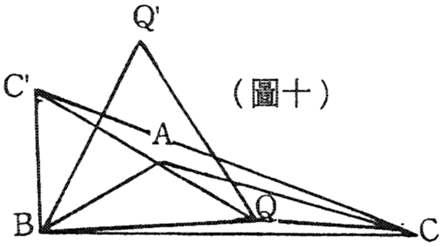
$\overline{Q'C'} + \overline{Q'Q} + \overline{QC'} + \overline{QC} > \overline{QC'} + \overline{AC'} + \overline{AC}$

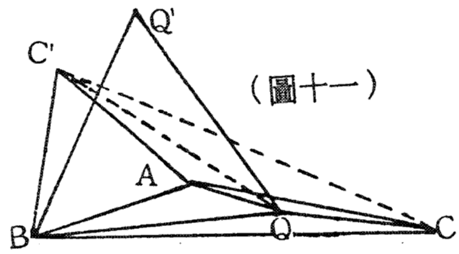
$\therefore \overline{Q'C'} + \overline{Q\ Q} + \overline{QC} > \overline{AC'} + \overline{AC}$

又$\overline{Q'C'} = \overline{AQ}$，$\overline{QQ'} = \overline{BQ}$，$\overline{AC'} = \overline{AB}$

故$\overline{AQ} + \overline{BQ} + \overline{CQ} > \overline{AB} + \overline{AC}$得證

ㄆ、A為$\overline{QC'}$邊上一點，或為外部一點（圖十、圖十一）





$\overline{AQ} + \overline{CQ} > \overline{AC}$……①

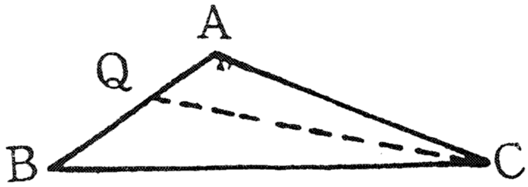
在$\triangle BQQ'$中，$\angle BAQ > \angle BQ'Q = 60^\circ = \angle BQQ'$

$\therefore \overline{BQ} > \overline{AB}$……②

①、②兩式相加得：

$\overline{AQ} + \overline{BQ} + \overline{CQ} > \overline{AB} + \overline{AC}$

2. 當Q在△ABC邊上時，（設Q在$\overline{AB}$上）（圖十二）



（圖十二）

$\because \angle QAC > 120^\circ > \angle AQC$

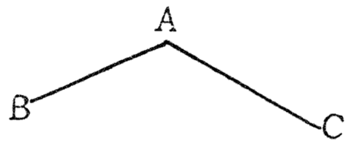
$\therefore \overline{CQ} > \overline{AC}$

故$\overline{AQ}+\overline{BQ}+\overline{CQ}=\overline{AB}+\overline{CQ}>\overline{AB}+\overline{AC}$。

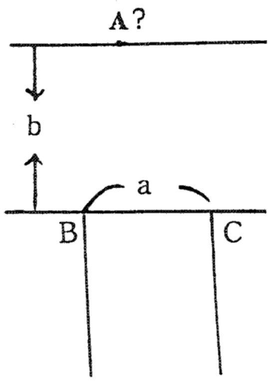
結論：三個出口位置A，B，C均已選定，且$\angle A \geqq 120^\circ$ 時，

1. 理想地下人行道之設計應如：（右圖）

2. 此時地下人行道之最短長度爲$\overline{AB}+\overline{AC}$。



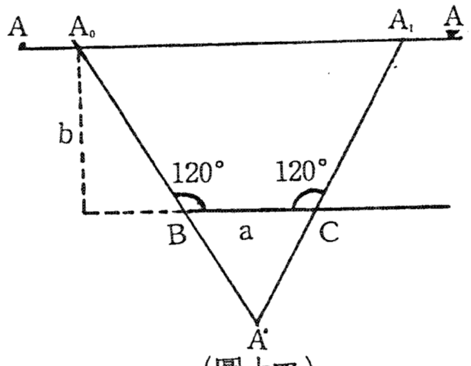
(三) 二個出口選定在轉彎處B，C，且兩街道之寬度a，b，滿足$b>\frac{a}{2\sqrt{3}}$時，那麼第三個出口A應如何選取，才會使得理想地下人行道的總長爲最短？（圖十三）



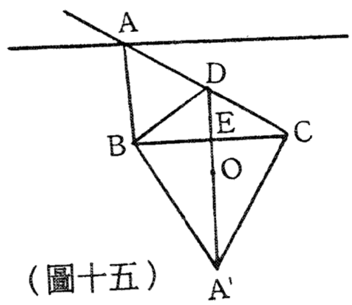
（圖十三）

1. 若A點的位置使$\angle ABC \geqq 120^\circ$ 或$\angle ACB \geqq 120^\circ$ 時，則由(二)段之討論知：最短地下人行道總長應爲$\overline{AB}+\overline{BC} \geqq \overline{A_0B}+\overline{BC}=\frac{2}{\sqrt{3}}b+a$ 或$\overline{AB}+\overline{BC} \geqq \overline{A_1C}+\overline{BC}=\frac{2}{\sqrt{3}}b+a$。

2. 若A點的位置介於A_0與A_1之間，此時$\angle ABC<120^\circ$，$\angle ACB<120^\circ$，由假設$b>\frac{a}{2\sqrt{3}}$ 知：如（圖十五）$\angle BAC<\angle BDC=120^\circ$，因此$\triangle ABC$三個內角均小於$120^\circ$，由(一)段之討論知：以$\overline{BC}$爲邊往下作正三角形$\triangle A'BC$，此時理想地下人行道總長爲$\overline{AA'}$，而A在$\overline{A_0A_1}$上移動時，$\overline{AA'}$之最短長度爲$A'$到$\overline{A_0A_1}$之垂線長，因此當A爲垂足時，$\overline{AA'}$爲最短，此時總長爲$b+\frac{\sqrt{3}}{2}a$。

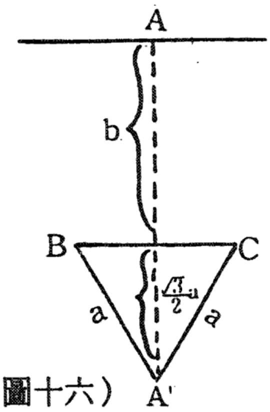


（圖十四）



（圖十五）

比較上述1.2.兩種情形，因$\frac{2}{\sqrt{3}}b+a=\frac{2}{\sqrt{3}}(b+\frac{\sqrt{3}}{2}a)>b+\frac{\sqrt{3}}{2}a$得知最短之理想地下人行道，總長爲$b+\frac{\sqrt{3}}{2}a$，如（圖十六）

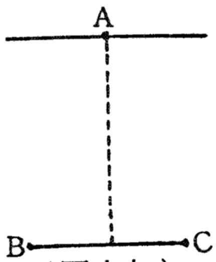


（圖十六）

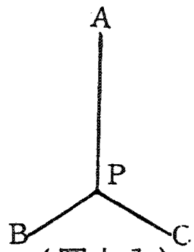
結論：出口B，C，已確定，且二之寬度a，b滿足$b>\frac{a}{2\sqrt{3}}$時

ㄅ、第三出口的最佳選擇爲：過$\overline{BC}$之中點再橫跨到對街之點，即$\overline{AB}=\overline{AC}$之點，如（圖十七）。

ㄆ、此時最短之理想地下人行道之總長爲$b+\frac{\sqrt{3}}{2}a$，地下人三道的形狀爲：如（圖十八）

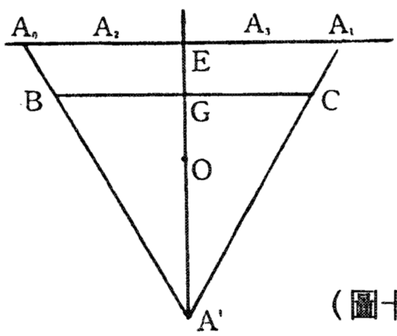


（圖十七）



（圖十八）

㈣如果二個出口選在轉彎處B及C，而且二條街道之寬度a，b滿足$<\frac{a}{2\sqrt{3}}$時，以$\overline{BC}$爲邊往下做一個正$\triangle A'BC$，再做$\triangle A'BC$的外接圓，設此圓與對接相交於A_2，A_3兩點，如（圖十九）



（圖十九）

1. 當A點不爲$\overline{A_0A_1}$的內點上時，$\angle ABC \geq 120°$ 或$\angle ACB \geq 120°$，由(二)段討論知：理想地下人行道之限度爲：

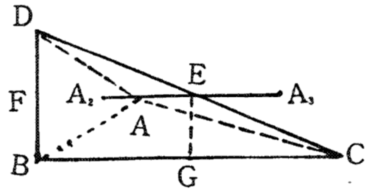
$\overline{AB}+\overline{BC}\geq\overline{A_0A'}=\overline{A_1A'}=a+\frac{2}{\sqrt{3}}b$

2. 當A點爲$\overline{A_0A_2}$或$\overline{A_3A_1}$之內點時，△ABC三個內角均小於120°，由(一)段之討論知：理想地下人行道之長度爲$\overline{AA'}\geqq\overline{A_2A'}=\overline{A_3A'}$。

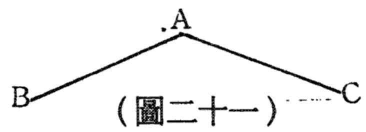
3. 當A點在A_2A_3時，因A點在圓上或圓內部，故∠BAC≧120° 由(二)段之討論知：理想地下人行道之長度爲$\overline{AB}+\overline{AC}$，此時過B作直線$\overline{A_2A_3}$之垂線，並取D點，如（圖二十），使得$\overline{BD}=2b$，因$\overleftrightarrow{A_2A_3}$爲$\overline{BD}$之垂直平分線，故$\overline{AD}=\overline{AB}$。△ACD中，$\overline{AC}+\overline{AD}>\overline{CD}$，故$\overline{AD}+\overline{AB}>\overline{CD}$，設$\overline{CD}$與$\overline{A_2A_3}$相交於E，當取A＝E時，$\overline{AB}+\overline{AC}$有最小值$\overline{CD}$。今$\overline{BF}=\overline{DF}$且$\overline{A_2A_3}//\overline{BC}$，∴$\overline{CE}=\overline{DE}$。過E作$\overline{BC}$之垂線，設垂足爲G，△BCD中，∵$\overline{CE}=\overline{DE}$且$\overline{EG}//\overline{BD}$∴$\overline{CG}=\overline{BG}$，即G爲$\overline{BC}$之中點，因此當A點在$\overline{A_2A_3}$上時，$\overline{AB}+\overline{AC}$之最小值爲$\overline{CD}$，此時A＝E，E爲$\overline{A_2A_3}$之中點，亦即$\overline{BC}$中點到對街之垂足，此時理想地下人行道之長度$\overline{CD}=\sqrt{a^2+(2b)^2}=\sqrt{a^2+4b^2}$

比較1.2.3.，因$\overline{A'A_0}<\overline{A_2A'}=\overline{A_2B}+\overline{A_2C}>\overline{EB}+\overline{EC}=\overline{CD}$知$\overline{CD}$爲最短。

結論：如果二個出口選在轉彎處B，C，則第三個出口A應取在自$\overline{BC}$之中點到對街之垂足E處，由於$b<\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$，此時最短之理想地下人行道之長度應爲$\overline{AB}+\overline{AC}$，其設計應爲：如（圖二十一）。



（圖二十）



（圖二十一）

四、參考資料

國中數學課本選修上冊。

評語

找出一點到二定點等距離之題目相當普遍，作的人也多，但本件作品有相當程度的推展而討論和街道寬度有關之結論是一件不錯的作品，值得獎勵。