相　對　運　動

國中組數學科第一名

台北市立景興國民中學

作　　者：李浩仲、蘇哲偉

指導教師：戴青田、吳省三

一、研究動機

在觀察一些幾何圖形的過程中，引發了研究的興趣，從中得到了一些領悟很想把它發表出來。

二、研究目的

應用我們國中所學的基本性質，做一些我們未曾學習過的研究，以達到組合已知推求未知的數學精神與目標。

三、文獻探討：（略）

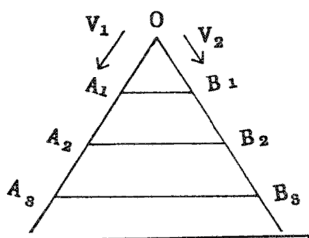
四、研究設備器材

紙、筆、圓規、直尺、三角板。

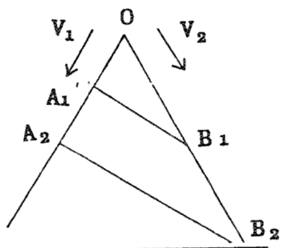
五、研究過程

(一)質點運動：

1.觀察右圖



(1) $V_1 : V_2 = 1 : 1$



(2) $V_1 : V_2 = 1 : 2$

(1)A_nB_n至O的距離比爲定値，即定點O、動點A_n、B_n相對位置不變。

(2)O、A_n、B_n所連成的三角形形狀不變，以下簡稱「固有形」。

(3)討論：由物理知識可得運動三要素爲：出發點、方向及速度。

ㄅ、上列討論的運動方向改變，則結果呢？（以下兩質點運動方向之夾角簡稱「方向角」）。

答：結果仍相同，但兩質點分離的速度改變。

⑷結論：

二質點由同一點出發分別作等速度運動，則此二質點 ㄅ、至出發點相對距離不變（以下簡稱「固有值」） ㄆ、出發點與動點所圍成的三角形形狀不變，即「固有形」形狀不變。

2. 出發點不同：若設二動點出發點A_o、B_o運動軸為L_1、L_2交於O（以下稱頂點），夾角θ（以下簡稱頂角）則：

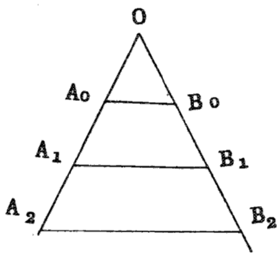
⑴若$\overline{OA_o}:\overline{OB_o}=V_1:V_2$則結果與前述相同。

⑵$\overline{OA_o}:\overline{OB_o}\neq V_1:V_2$則：

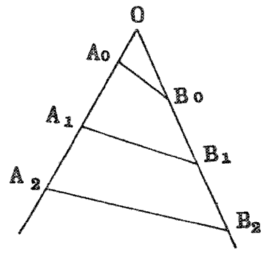
ㄅ、$\overline{A_oB_o}\neq\overline{A_1B_1}\neq\overline{A_2B_2}\cdots\cdots$

ㄆ、$\overline{OA_o}:\overline{OA_1}\neq\overline{OB_0}:\overline{OB_1}\neq\cdots\cdots$

$\boxed{\overline{OA_0}:\overline{OB_0}=V_1:V_2=1:1}$

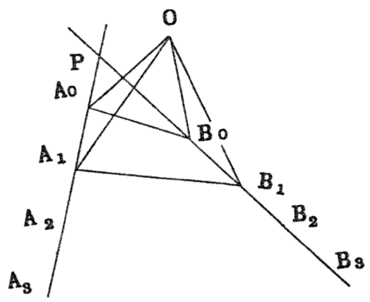


$\boxed{\overline{OA_0}:\overline{OB_0}\neq V_1:V_2}$



所以A_n，B_n到頂點O的距離比不為定值。

3. 不同出發點運動之固有點的探索：



⑴設$V_1:V_2=k\rightarrow\overline{A_oA_1}:\overline{B_oB_1}=\overline{A_1A_2}=\overline{B_1B_2}=\cdots\cdots=k$

⑵假設存在固有點O使得：

$\overline{OA_o}:\overline{OB_o}=\overline{OA_1}:\overline{OB_1}=k$（註存在性成立）

則$\overline{OA_o}:\overline{OB_o}=\overline{OA_1}:\overline{OB_1}=\overline{A_oA_1}:\overline{B_oB_1}\rightarrow\triangle OA_oA_1\sim\triangle OB_oB_1$

$\therefore\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$

⑶$\because$P A_o B_o O 及 P A_1 B_1 O共圓，同理得P A_n B_n O共圓。

⑷$\because\angle A_oOB_o=\angle A_oPB_o$且$\angle A_1OB_1=\angle A_nPB_o\cdots\cdots$

$\therefore\angle A_o B_o=\angle A_1OB_1=\angle A_2OB_2=\cdots\cdots$

即兩動點與固有點之夾角恆不變（以下簡稱「固有角」）。

⑸$\because\angle 3=\angle 4$

$\therefore \angle A_2A_1O = \angle B_2B_1O$

又$\overline{OA_1} : \overline{OB_1} = \overline{A_1A_2} : \overline{B_1B_2}$

$\therefore \triangle OA_1A_2 \sim \triangle OB_1B_2$

$\therefore \overline{OA_2} : \overline{OB_2} = \overline{A_1A_2} : \overline{B_1B_2} = k$

同理可證 $\overline{OAn} : \overline{OBn} = k$ 對所有n均成立。

(6)結論：

同一平面上兩質點A_n、B_n以夾角θ之兩方向速度直線運動，則可找到一定點使：

ㄅ、兩動點到定點的距離比固定（以下簡稱「固有值」）。

ㄆ、動點與定點所成之角爲定值（以下簡稱「固有角」）。

ㄇ、固有形不變。

4. 定理1.固有角＝頂角。

定理2.兩質點作等速度直線運動，必可找到一定點，使三點構成定形運動，以下簡稱二質點的固有運動。

(二)固有運動－含一固有點的定形運動。

1. 運動之要素爲

(1)起點
(2)方向
(3)速率

2. 由實驗得知：

(1)固有點的位置與速率、起點有關。

(2)運動方向、速率比固定：起點改變→固有點在一直線上移動。

3. 定理3：

兩動點之運動方向、速率確定，則第三質點（固有點）的軌跡亦確定爲一直線且：

(1)固有角＝頂角。

(2)固有值＝運動速率比。

4. 運動狀態的改變：

(1)質點轉向定理：$\boxed{\text{兩質點同時旋轉}\theta\text{角，速率不變則固有點不變。}}$

(2)推論：

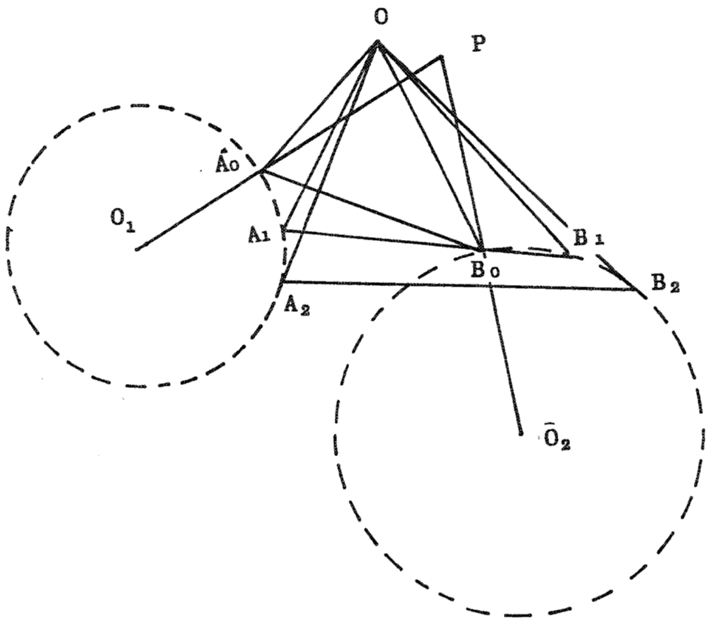
ㄅ、相似軌跡定理：

①第一質點按某一定軌跡作等速率運動，若固有點不變則第二質點的運動軌跡與第一質點的運動軌跡相似。
②軌跡長度比＝速率比。

ㄆ、軌跡質心定理：

①二質點軌跡的質心（重心）與固有點連成固有形。
②質心與起點的連線及成固有角。

⑶圓軌跡的固有運動：



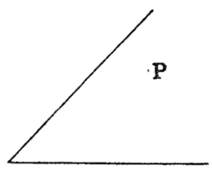
ㄅ、∠P＝固有角。

ㄆ、動點A_n、B_n角速率相等。

5. 應用：

已知∠O內一點P在∠O的兩邊各找一點，

使$\overline{PA}=\overline{PB}$且$\overline{PA}\perp\overline{PB}$



㈢n質點的固有運動：

1. n質點的固有運動的確定條件：

⑴兩質點的運動狀態。

⑵固有點及一質點的運動狀態。

⑶三質點的運動方向。

⑷三質點的速率。

㈣相對運動：

1. 定義：n質點的相對運動 | ⑴n點均為動點。 ⑵n點之相對位置不變。 |

2. 共固有點定理：$\boxed{\text{n質點若有相對運動則任兩點之固有運動的固有點均相同。}}$

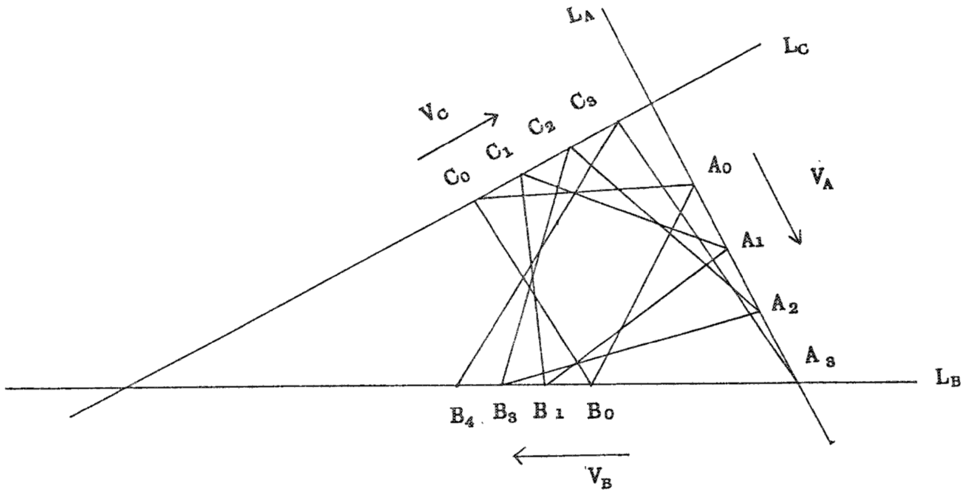
3. n質點的相對運動的確定條件：

⑴任兩點的運動狀態。
或⑵固有點及一質點的運動方向。
或⑶三質點的運動方向。
或⑷三質點的運動速率。

4. 固定軸定理：

⑴三質點在固定軸上恰有一種相對運動。
⑵即速率比隨軸及固有形而確定。

圖ㄅ　固定軸上的相對運動

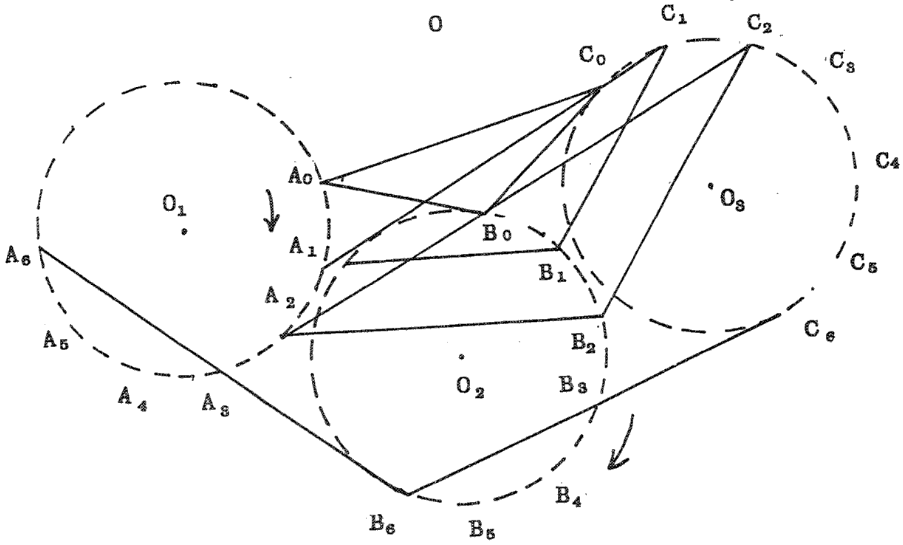


⑴速率比恰有一組。

⑵L_{A1}，L_{B1}，L_C確定固有形△$A_oB_oC_o$確定則相對運動確定。

⑶軸為四組以上，不一定存在相對運動。

圖ㄆ　圓軌跡的相對運動



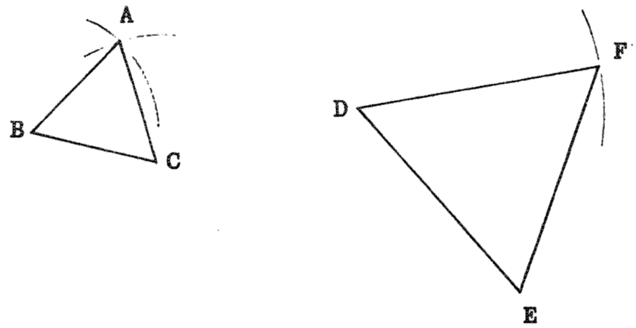
5. 自由軸－速率比不止一組的運動軌跡。

⑴應討論繁瑣在此省略。

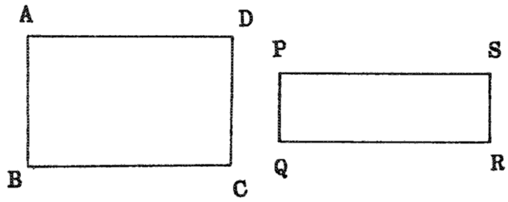
㈤ 應用：

1. 運動形態之應用：

⑴將A，B，C利用相對運動或固有運動移至D，E，F。



⑵說明－矩形



①沒有內接相似矩形。

②內接矩形一定比原形扁。

③求矩形ABCD之一內接矩形使其與PQRS相似。

⑶電腦動畫。

⑷太空中的運動。

六、研究結果

1. 質點固有運動之形式及性質。
2. n質點相對運動之存在及性質。
3. 運用質點運動性質解決多動點之未知問題。

七、討　　論

由於我們國中所學知識不足，所以有許多研究進行一半就遇到困難，所以我們要再接再厲用功讀書吸取知識，以便日後作更進一步的研究。

八、結　　論

質點之間欲維持定形運動，則各質點之獨立運動狀態會因其它質點的改變而改變，若其中一爲等速度運動，其餘各點也是；若一質點運動加速則其餘各點也是，不知是否正確？

九、參考資料

國中數學課本第五、六冊及理化課本第二冊。

評語

本件作品是一件難度高又有創新之極佳作品，作者能判定因不等速率而會有“固有點”存在，進而研究出兩個相當嚴謹的定理，非常難得。