常寬圖形的探討

高中組數學科第三名

高雄市立高雄高級中學　　作　　者：林穎詳、歐英毅
指導教師：黃榮發、張本源

一、研究動機

我平常對數學就有很濃厚的興趣，而且隨時有機會接觸和數學有關的事物。此次由老師處得知有數學科展的活動，於是便在老師的鼓勵下利用寒假和課餘的時間從事研究，經由書上的資料，我選定了「常寬圖形的探討」這個題目爲研究主題，並邀學長一起深入研究，一同找尋資料來完成這一件作品。

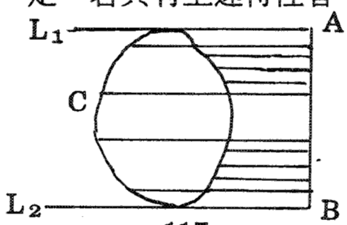
二、研究目的

(一)常寬圖形的作法
(二)常寬圖形性質的探討
(三)常寬圖形與正六邊形的關係
(四)常寬圖形的周長
(五)常寬圖形面積極值的探討

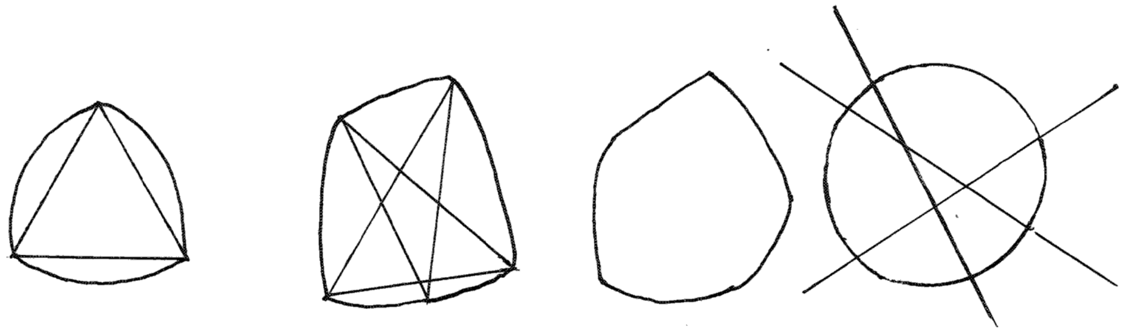
三、研究過程

(一)定義

1. 如果我們希望按一定方向確定某曲線C的寬度，我們可以把這條曲線的所有點垂直投影在平行於這個方向的直線上。這些投影可以布滿直線的某個線段AB（如圖）而這個直線段的長度，就是曲線在一定方向的寬度。
   在A和B處，垂直AB的二條邊緣投影線L_1，L_2至少和曲線C有一個公共點而整個曲線位於這種直線的一側，我們稱具有這種性質的直線L_1，L_2是曲線的支持線。
2. 等寬度曲線爲一連續且不相交的封閉圖形，且對任意方向的二條平行支持線其距離恆爲定值，即寬度一定。若具有上述特性者，我們稱爲等寬度圖形（曲線）或常寬圖形。



(二)畫法



(三)有關等寬度 ℓ圖形Γ的定理

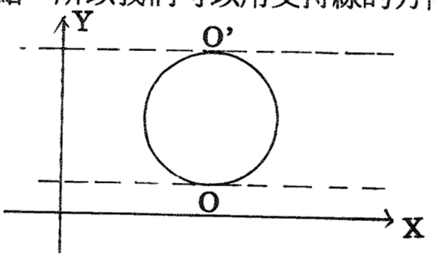
1. Γ必爲凸圖形。
2. Γ上任意兩點間的距離至多是 ℓ。
3. 若Γ的一組平行支持線L_1，L_2分別交Γ於P，Q，則$\overline{PQ}\perp L_1$，L_2。
4. Γ和它每一條支持線只有一個公共點。
5. 過等寬度曲線上的任一點至少有一條支持線。
6. 等寬度曲線的角頂處的角不能小於120°，惟一在角頂處有120°角的曲線是諾雷三角形，它有三個這樣的角頂。

(四)以函數的方式來表示Γ上的點，並證明此函數是連續的。

1. 預備定理：

   若$f:[a,b]\to[\alpha,\beta]$且$f(a)=\alpha$，$f(b)=\beta$，f遞增且蓋射→f在(a,b)連續。

2. 將Γ置入直角座標系中，Γ在任意方向，任意點均可作支持線，過一點的支持線可能只有一條（弧）可能有很多條（角頂），但任意方向的一組平行支持線與Γ只有兩個交點，所以我們可以用支持線的方向來表示Γ上的點。



作一組平行x軸之支持線交Γ於二點，定較低點爲O，另一點爲O'，則Γ上的點P若沿逆時針方向，則稱其爲正向；若沿順時針方向，則稱其爲負向。θ表支持線與x軸正方向，以逆時針方向爲正向的交角。$\therefore 0\leqq\theta<180°$。若以λ$(\theta)$表示斜角$\theta$的支持線與Γ的交點，則λ$(\theta)$會有二個不同的值，此不合函數的定義，故我們定義：$\lambda:[0,2\pi]\to\Gamma$

若$\theta\in[0,\pi]$則λ(θ)表以θ爲斜角之支持線與$\overline{OO'}$右邊圖形之交點。

若$\theta\in[\pi,2\pi]$則λ(θ)表以$(\theta-\pi)$爲斜角之支持線與$\overline{OO'}$左邊圖形

之交點。

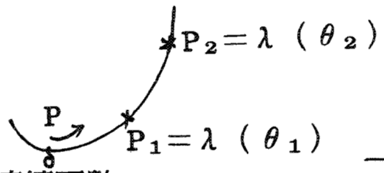
過Γ上任一點P均可作至少一條支持線，故必$\exists\theta\in$〔0，2π〕使得λ（θ）＝P，故此函數為蓋射。

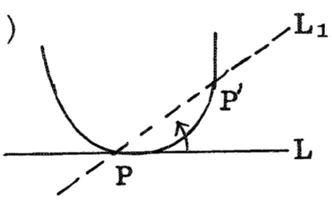
3. 因為Γ為凸圖形，故λ（θ）必有一些特性，我們試著將它找出：

以O為基準點，點P由O出發順著Γ正向移動，而轉一圈回到O。

若P先通過$P_1=\lambda(\theta_1)$，而後再通過$P_2=\lambda(\theta_2)$，則定義$\lambda(\theta_2)>\lambda(\theta_1)$。

Γ為凸圖形，且圖形必在支持線的一側，若公共點P，若P'由P正向移動，則$\overline{PP'}$的斜角會大於L的斜角，若負向移動，則會小於L的斜角。P'在λ(O)附近的情形此處我們將不考慮，因為那是函數定義域設定的問題，我們在此將不討論。





4. 證明λ為連續函數：

首先我們要利用3.的結果來證明若$\lambda(\theta_1)>\lambda(\theta_1)\Rightarrow\theta_2>\theta_1$

證明：(1)$\because\lambda(\theta_2)>\lambda(\theta_1)$

$\therefore\lambda(\theta_2)$在$\lambda(\theta_1)$的正向

(2)由3.的結果

$\because\lambda(\theta_1)$在$\lambda(\theta_1)$的正向

$\therefore\overleftrightarrow{\lambda(\theta_1)\lambda(\theta_2)}$與x軸正向的夾角$\theta$'大於$\theta 1$

(3)同理$\lambda(\theta_1)$在$\lambda(\theta_2)$的負向，故$\overleftrightarrow{\lambda(\theta_1)\lambda(\theta_2)}$的斜角$\theta$'小於$\theta_2$

$\because\theta_2>\theta_1$

$\therefore\lambda(\theta_2)>\lambda(\theta_1)\Rightarrow\theta_2>\theta_1$　　得證

上式之對偶命題為$\theta_1\geqq\theta_2\Rightarrow\lambda(\theta_1)\geqq\lambda(\theta_2)$，等號成立時命題恆成立，故我們不需考慮之，此命題可改寫為$\theta_1>\theta_2\rightarrow\lambda(\theta_1)\geqq\lambda(\theta 2)$

$\therefore\lambda$亦可視為具有遞增函數般的性質。

若〔a，b〕$\subset$〔0，2π〕

λ：〔a，b〕→〔λ(a)，λ(b)〕

又λ遞增且蓋射，由預備定理$\Rightarrow\lambda$在（a，b）連續。

我們可將所有的連續區間取聯集，則λ在（0，2π）連續

$\therefore\lambda$為連續函數。

(五)我們觀察發現，任意一個等寬度ℓ圖形Γ經過適當的擺置，可以使Γ恰好放入寬度ℓ（即邊長$\frac{\ell}{\sqrt{3}}$）的正六邊形中，我們試著利用已學過的方法，將它證明：

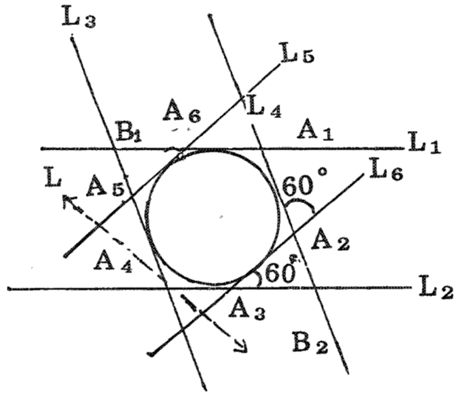
1.證明：

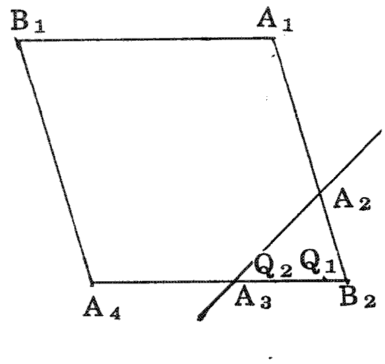
⑴取三組平行支持線以兩兩交成60°的方式夾住Γ（如圖所示）

∵Γ爲等寬度

∴平行線間的距離均爲 ℓ（平行線可移動，但方向不變）

⑵在平行線組成的Γ可轉動六邊形的六個交點處依順時針方向依序標定A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6,我們將證明$\overline{A_1A_2}=\overline{A_3A_4}=\overline{A_5A_6}$，$\overline{A_2A_3}=\overline{A_4A_5}=\overline{A_6A_1}$。





證明：①我們先取兩組平行線來看

∵平行線的寬度爲ℓ

∴$B_1A_1B_2A_4$爲一一菱形

∴$\overline{A_4B_2}=\overline{A_1B_2}$

②∵$\theta_1=\theta_2=60°$（∵平行線相交60°）

∴$\overline{A_2B_2}=\overline{A_3B_2}$

③∴$\overline{A_4B_2}-\overline{A_3B_2}=\overline{A_1B_2}-\overline{A_2B_2}$

∴$\overline{A_3A_4}=\overline{A_1A_2}$

其它同理可證

∴$\overline{AA_2}=\overline{A_3A_4}=\overline{A_5A_6}$，$\overline{A_2A_3}=\overline{A_4A_5}=\overline{A_6A_1}$

⑶接下來我們要證明是否Γ能轉動到某一個角度，使得$\alpha=\beta$（$\alpha=\overline{A_1A_2}$，$\beta=\overline{A_2A_3}$）成立，那麼圖形便能放入正六邊形中。

⑷假設$\alpha=n$，$\beta=m=\overline{A_4A_5}$，且$n>m$則當我們將圖形轉動180°時$\alpha$由n變至m，$\beta$由m變至n，令$f_\alpha$表$\alpha$所對應長度之函數，$f_\beta$表$\beta$所對應之函數，我們假設$f_\alpha$，$f_\beta$都是連續函數。

f_α：〔0，π〕，f_β：〔0，π〕

f_α，f_β均爲連續函數

$f_\alpha(0)=n$，$f_\alpha(\pi)=m$

$f_\beta(0)=m$，$f_\beta(\pi)=n$

令$g=f_{\alpha}-f_{\beta}$

$\therefore g(0)=n-m>0$

$\quad g(\pi)=m-n>0$

$\therefore g(0)g(\pi)<0$

$\because g$為連續函數

由堪根定理　$r\in[0,\pi]\rightarrow g(r)=0$

$\qquad\qquad\rightarrow f_{\alpha}(r)=f_{\beta}(r)$

2. 上面的結果我們是假設f_{α}，f_{β}都是連續函數，但是否是眞的，我們在此要提出證明的方法：

(1)將L_1，L_2，L_3，L_4四線固定後，Γ仍可在 $B_1A_1B_2A_4$中轉動，而恆使L_1，L_2，L_3，L_4爲其支持線。

(2)L_5，L_6爲可平移的（但方向不變），使L_5L_6恆爲Γ的支持線。

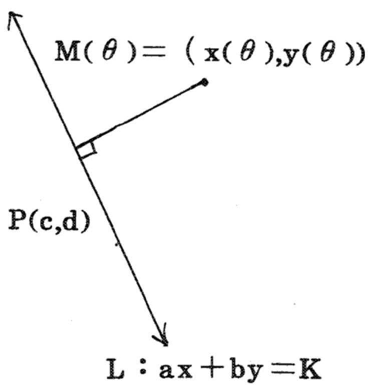
(3)我們可證明得$\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}=\overline{A_1B_2}$（定數）。

(4)作$L\perp L_5$，L_6，令$M(\theta)$爲$\lambda(\theta)$和$\lambda(\theta+\pi)$的中點，則$M(\theta)$亦爲連續。

(5)L_5，L_6的位置決定L_6與Γ之公共點所對應之$M(\theta)$在L上投影的變化，若其投影之變化爲連續的，則L_5，L_6之平移亦是連續的，$\therefore f_{\alpha}$也是連續的。

(6)設$M(\theta)$在L上之投影爲$P(c,d)$

$L: ax+by=k \qquad M(\theta)=[x(\theta),y(\theta)]$



$\because \overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{L}$

$\therefore [c-x(\theta),d-y(\theta)]\cdot(-b,a)=0$

$\quad$ P在L上

$$\therefore\begin{cases}ad-bc=axy(\theta)-bx(\theta)\\ bd+ac=k\end{cases}$$

$$\because\ c=\frac{\begin{vmatrix}a & ay(\theta)-bx(\theta)\\ b & k\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & -b\\ b & a\end{vmatrix}}\qquad d=\frac{\begin{vmatrix}ay(\theta)-bx(\theta) & -b\\ k & a\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & -b\\ b & a\end{vmatrix}}$$

$\because x(\theta)$，$y(\theta)$爲連續函數

$\therefore c$，d亦爲連續，由(5)的推論，得證。

(六)常寬圖形的周長

1. 預備定理：

曲率半徑$=\dfrac{ds}{d\theta}$（S爲曲線長度，θ爲切線的方向與x軸正向的夾角）

若$\lambda(\theta)$在θ_o處不爲角頂且可微分

則$\lambda'(\theta_o)=[x'(\theta_o), y'(\theta_o)]$

當θ由θ_o變化到$\theta_o+\triangle\theta$，$\lambda(\theta)$變化$\lambda(\theta_o+\triangle\theta)-\lambda(\theta_o)$

當$\triangle\theta\to 0$則$\lambda(\theta_o)$變化$\lambda'(\theta_o)\cdot\triangle\theta=[x'(\theta_o)\cdot\triangle\theta, y'(\theta_o)\cdot\triangle\theta]$

$$\therefore ds=\sqrt{(x'(\theta)d\theta)^2+(y'(\theta)d\theta)^2}$$

$$=\sqrt{(x'(\theta)^2)+(y'(\theta)^2)}\,d\theta$$

$$\therefore \frac{ds}{d\theta}=\sqrt{x'(\theta)^2+y'(\theta)^2}$$

又此處的θ爲支持線與水平方向的夾角

故曲線半徑$R(\theta)=|\lambda'(\theta)|$

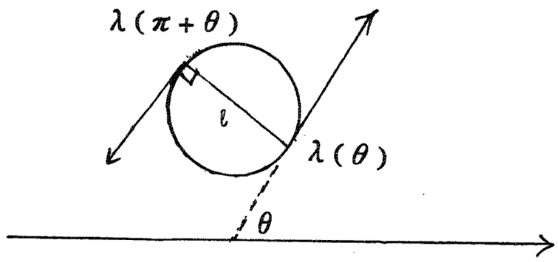
$$\lambda(\theta)-\lambda(\theta+\pi)=\left[-\ell\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right), -\ell\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\lambda'(\theta)-\lambda'(\theta+\pi)=\left[\ell\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right), -\ell\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$\because\lambda'(\theta)$與$\lambda'(\theta+\pi)$方向相反

$$\therefore |\lambda'(\theta)|+|\lambda'(\theta+\pi)|=|\lambda'(\theta)-\lambda'(\theta+\pi)|=\ell$$

$$\therefore R(\theta)+R(\theta+\pi)=\ell$$



2. 常寬圖形之周長$=\int_0^{2\pi}R(\theta)d\theta=\int_0^{\pi}R(\theta)d\theta+\int_0^{\pi}R(\theta+\pi)d\theta$

$=\int_0^{\pi}[R(\theta)+R(\theta+\pi)]d\theta=\int_0^{\pi}l\,d\theta=\pi\ell$——定値

(七)常寬圖形面積的極値

特殊情形：首先我們要討論由正多邊形各頂點爲角頂所組成的常寬圖形，我們可以發現其面積爲其角頂數（n）的函數（n爲奇數）。

$$A(n)=\ell^2\left[\frac{n}{2}\cot\frac{\pi}{n}-\frac{1}{2}n\cos\frac{\pi}{n}\cot\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{2}-\frac{n}{2}\sin\frac{\pi}{n}\right]$$

將之微分可發現：

$$A'(n)=\ell^2\frac{\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(\pi-\sin\frac{\pi}{n}\right)}{2\sin^2\frac{\pi}{n}}>0$$

$\forall n\in 2N+1$

$\therefore A(n)$爲遞增函數

min為$A(3)=(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})\ell^2$……為諾雷三角形

ma為$\lim_{n\to\infty} A(n)=\frac{\pi}{4}\ell^2$……為直徑 ℓ 之圓面積

事實上，一般任意常寬圖形的面積亦有上述結果，而並非限於特殊情形。

四、結　　論

(一)常寬圖形必為凸圖形，且其上的任意二點最長距離為ℓ。

(二)過常寬圖形上任一點至少有一條支持線，且支持線與常寬圖形只有一公共點。

(三)常寬圖形的角頂處的角不能小於120°，惟一在角頂處有120°角的圖形是諾雷三角形，它有三個這樣的角。

(四)等寬度 ℓ 曲線Γ，經適當的擺置，可放入寬度為ℓ的正六邊形中（即邊長為$\frac{\ell}{\sqrt{3}}$的正六方邊形），使正六邊形之每一邊均為Γ的支持線。

(五)等寬度ℓ的曲線，其周長為一定值$\pi\ell$，故常寬圖形為等周長圖形的一類。

(六)等寬度ℓ的圖形中，面積最大者為圓，面積最小者為諾雷三角形。

五、參考書籍

(一)數學欣賞（凡異）

(二)Johnson微積分

(三)Calculus And Analytic Geometry（Thomas／Finney）

(四)科學月刊──第一卷第九期（作者：何崇武）

(五)A Ploblem On A Circle Journnal of London Math. Society Vol. 36（1961）

評語

本作品有數學意味，也有些創意。惟過程稍嫌粗略，數學的嚴謹性亦須加強，以高中生來說，本作品對常寬曲線的各種情況，不論幾何性質，分析性質都有系統的結論，殊為難得。