圓裡乾坤知多少

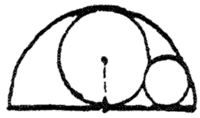
高中組數學科第三名

台北市立北一女中

作　　者：黃暉娟

指導教師：李政貴

一、研究動機



數學競試中有個問題：單位圓0 的半圓內，三個切圓，如右圖，則三個切圓之半徑各多少：這個問題引起我深入探討圓內二個及三個，任意不相割的圓，面積有多大的興趣。

二、研究目的

1. 探討圓內n個不相割的圓，其面積和之極大值。
2. 探討半圓內一個、二個、三個不相割的圓，其面積和之最大值。
3. 探討半球內一個、二個、三個不相割的球，其體積和最大值。

三、研究設備及方法

1. 研究器材設備：

   紙、筆、電腦AT-PC、印表機、磁片。

2. 研究方法：

   利用古典幾何法分析，坐標解析法找出面積和函數，並利用微分法及電腦作圖，分析及判斷，求出面積和的極大值。

四、研究步驟及結果

(一)預備知識

1. 圓的基本性質
2. 圓錐曲線及其方程式
3. BASIC程式指令
4. 函數之微積分

(二)準備工作

定義1 ：切入圓及切入球：

⑴在半圓C之內部放入一圓C'。若此圓至少與圓內已有的一個圓相外切，且與半

圓C相切，則稱C'爲一切入圓。

⑵在半球S之內部放入一球S'。若此球至少和球內已有的一個球相外切，且與半球S相切，則稱S'爲一切入球。

定義2：準線平面：

設L爲拋物線Γ的準線，ℸ爲其對稱軸，將ℸ軸在空間自身旋轉一周，所得的曲面爲Ω爲拋物曲面，而準線L自身旋轉成一平面，稱爲準線平面。

性質1：半圓內任一圓可找到一個切該半圓之直徑或圓弧的圓，使後者面積大於或等於前者面積。

性質2：在半圓內放入一圈C_1，符合性質1，及另一不與之相割的圓C_2，則必可找到一圓C_3，使C_3與C_1及邊界相切，且圓C_3之面積大於或等於圓C_2之面積。

㈢研究主題內容及結果

A.圓內放入n個圓之面積和極大值，半徑爲r，圓心爲O的圓C內，放入一個或二個或三個，n個不相割的圓，祇要使其中之一圓的圓心逼近O，半徑逼近r，就可使n個（或一個二個）的圓的面積和逼近C圓的面積πr^2，因此C圓內異於C的n個圓的面積極大值。

B.半圓內放入一個、二個、三個圓的面積極大值。

1.半圓內放入一個圓其面積的極大值。

⑴半圓C內可作出圓C_1與已知半圓C之圓弧及其直徑均相切。

⑵在⑴中動圓C_1其圓心的軌跡在一拋物線上，此拋物線Γ_1表示。

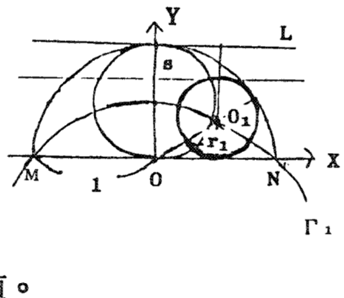
⑶當C_1的半徑爲圓C的半徑r的一半時，C_1的面積最大$=\frac{1}{4}\pi r^2$

〈pf〉Γ1的方程式爲 $x^2=-4\left(\frac{r}{2}\right)\left(y-\frac{r}{2}\right)\Rightarrow x^2+2ry=r^2$

$\Rightarrow$ 知$r_1=y=\frac{1}{2r}(r^2-x^2)\Rightarrow\ \pi r_1^2=\pi y^2=\pi\ \frac{1}{4r^2}(r^2-x^2)^2$

∴max存在x＝0時

$\pi r_1^2=\frac{\pi}{4}r^2$

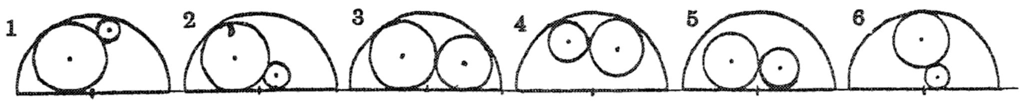


2.半圓C放入兩圓，其面積和的極大值。

由性質（見（二）的準備工作部份），知道半圓內的非切入圓可以找到一個切入圓來取代，而面積和更大，因此，我們只要探討切入圓的情況即可。

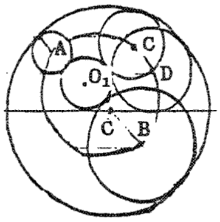
⑴半徑C內的兩切入圓，依古典幾何法分析：

〈1-1〉有下面六種情況：（如圖）



〈1-2〉①第1. 2. 4. 5. 種狀況時，都可在第3種狀況中找到較大的值。

②第6種狀況時，可在第2種狀各中找到較大的值。



註：在半圓內切一圓O_1，則在圓O內和圓O_1及大圓圓周相切之圓的圓心軌跡爲一橢圓（O及O_1爲焦點），而A、B分別爲圓O內和圓O_1相切之最小、最大圓，由A→B，切圓之面積漸增，故知圓C必小於圓D。

註：圓O內與圓O_1，外切且與圓的圓弧相切的圓的圓心必在以O_1O爲兩焦點，$r+r_1$爲長軸的橢圓上。

〈pf〉C_3爲圓C中，所有和C_1及C相切的圓，則$\overline{O_3O}+\overline{O_1O_3}=r-r_3+r_1+r_3=r+r_1$爲定值，故其軌跡在一橢圓上。

⑵若圓C_1之圓心，而C_1與圓C的圓弧與直徑$\overline{AB}$相切，則以O_1爲焦點，H爲頂點（H爲O_1在$\overline{AB}$的投影）所決定的拋物線Γ2，與拋物線Γ1的交點爲一切入圓的圓心，此圓以C_2表示

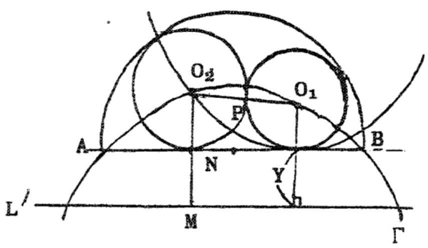
證明：由拋物線定義

$\overline{O_1O_2}=\overline{O_2M}$

$\overline{O_1O_2}=\overline{O_1P}+\overline{PO_2}$（P在$O_1$上）$=\overline{O_2P}+r$

$\overline{O_2M}=\overline{O_2N}+\overline{NM}=\overline{O_2N}+r$

$\overline{O_2P}=\overline{O_2N}$，故圓$C_2$爲一切入圓

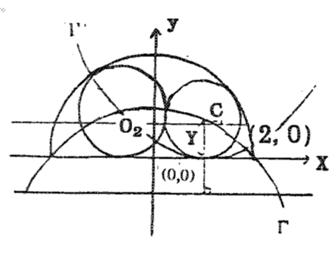


⑶以坐標解析法求之。設C爲圓心O（0，0），半徑爲2的圓之上半圓，即C：

$X^2+Y^2=4$

且$Y\geqq O$，

得Γ：$-4(Y-1)=X^2$



此時，設C_1半徑＝r，則C_1之圓心O_1（$2\sqrt{1-1r}$，r）

〔使O_1在第一象限內，不失一般性〕

以O_1爲焦點，$Y=-\gamma$爲準線，

得Γ：$(X-2\sqrt{1-r})^2=4ry$

解Γ，Γ''之交點，$\rightarrow X=(2\sqrt{1-r}\pm2\sqrt{2r})$

$y=(3r-r^2+2\sqrt{2r}\sqrt{1-r})/(1+r)^2$

即C_2之圓心O_2〔$(2\sqrt{1-r}\pm2\sqrt{2r})/(1+r)$，$(3r-r^2+2\sqrt{2r}\sqrt{1-r})$ $/(1+r)^2$〕

又∵前設O_1在第一象限，故今取O_2〔$(2\sqrt{1-r}-2\sqrt{2r})(1+r)$，$(3r-r^2+2\sqrt{2r}\sqrt{1-1r})/(1+r)^2$〕

可得較大之面積。

∴兩圓半徑和$=r^2+[(3r-r^2+2\sqrt{2r}\sqrt{1-r})/(1+r)^2]^2$

$=[r^6+4r^5+7r^4-10r^3+18r^2-4\sqrt{2}(r^3-3r^2)\sqrt{1-r}]/(1+r)^4$

$=f(r)$

f(r)之極值存在f'(r)＝O或在端點之情況。

⑷半圓內的兩切入圓之面積和以$\pi f(r)$表之，則$r=2\sqrt{2}-2$時f(r)有最大值（$24-16\sqrt{2}$），此時C_1與C_2兩切入圓半徑相等。

〈pf〉$f'(r)=\{2r^6+10r^5+20r^4+38r^3-66r^2+36r-4\sqrt{2}\,〔(-r^3+9r^2-6r)\sqrt{1-r}-(r^4-2r^3-3r^2)/2\sqrt{1-r}〕\}/(1-r)^5$

由電腦繪圖可觀察，最大值大約存在兩圓半徑相等$r=2\sqrt{2}-2\doteqdot0.8$時，我們試求$f'(2\sqrt{2}-2)$如下：

∵$r=2\sqrt{2}-2$　　$r^2+4r-4=O$

①$2r^6+10r^5+20r^4+38r^3-66r^2+36r=1400\sqrt{2}+2000$

②$r^3-9r^2+6r=(r-13)(r^2+4r-4)62r-52=124\sqrt{2}-176$

③$r^4-3r^3-3r^2=(r^2+4r-4)(r^2-6r+25)+(-124r+100)$

$=124(2\sqrt{2}-2)+1000=248\sqrt{2}+348$

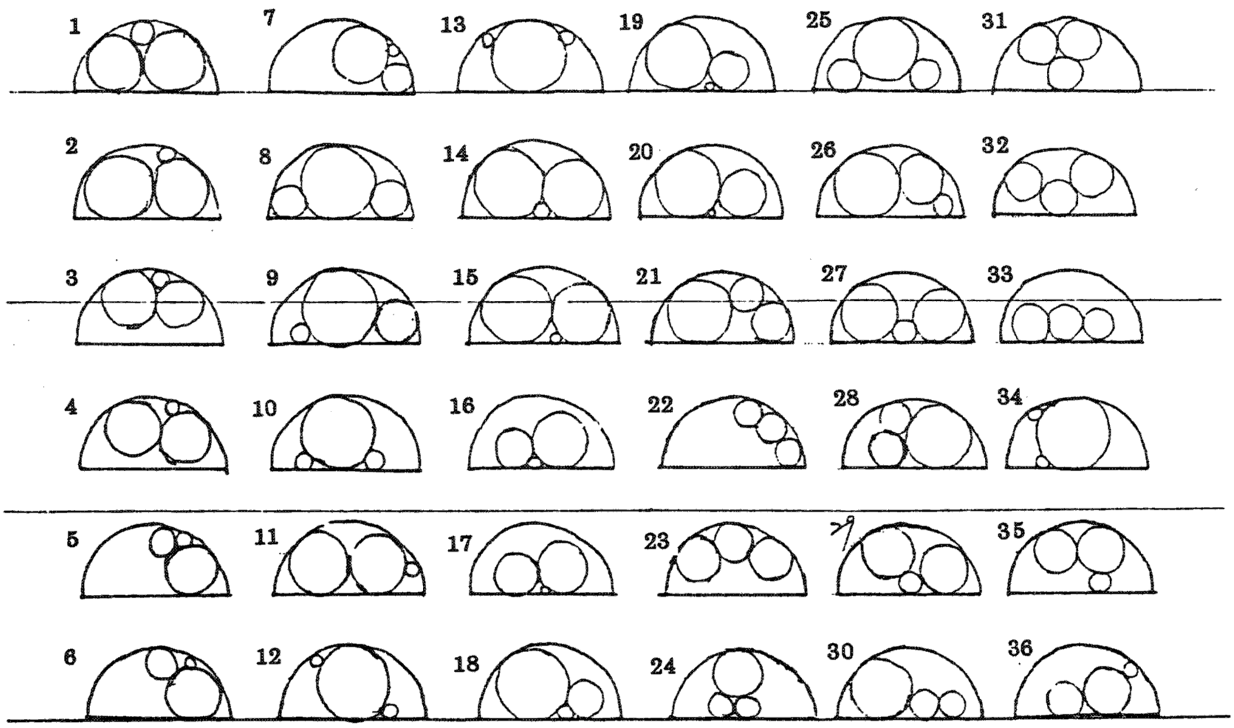
∴$f'(2\sqrt{2}-2)=1/(2\sqrt{2}-1)^5[-1400\sqrt{2}+2000+(8-4\sqrt{2})(124\sqrt{2}-176)+(4+2\sqrt{2})(-248\sqrt{2}+348)]=0$

由函數的極值必要條件和$f(2\sqrt{2}-2)$爲$f(r)$之最大值（由電腦繪圖知最大值惟一）。即當兩圓面積相等且半徑$=2\sqrt{2}-2$時，鑲在半圓內的兩圓之面積和最大此時最大面積爲$(24-16\sqrt{2})\pi$。

3. 半圓C內放入三個圓其面積和的極大值。

⑴半圓內之三個切入圓依古典幾何分析

〈1-1〉有下面36種情況，如圖



〈1-2〉討論面積的極值（分析略）

由分析討論得知：面積和的最大值僅可能存在於第1、8、14、21之狀況，然而，狀況14時，必可在狀況1找到較其大之情況（同註5），即最大值僅可能存在於第1、8、21種狀況，分別令其爲C, A, B。

⑵設r_1、r_2、r_3分別爲C_1、C_2、C_3三圓的半徑，承（二）的解析，分析結果

〈取$r_1=r$〉　　設r_1、r_2、r_3分別爲C_1、C_2、C_3的半徑，承㈡

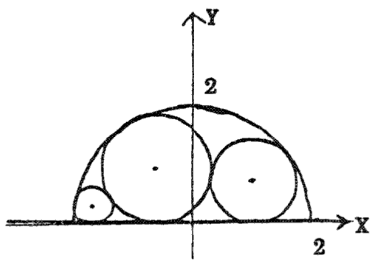
〈2-1〉狀況A　　知$r_2=(3r-r_2+2\sqrt{2}\,r\sqrt{1-r})/(1+r)^2$

再取另一x值$x=(2\sqrt{1-r}+2\sqrt{2r})/(1+r)$代入$\Gamma$：$4y=x^2+4$

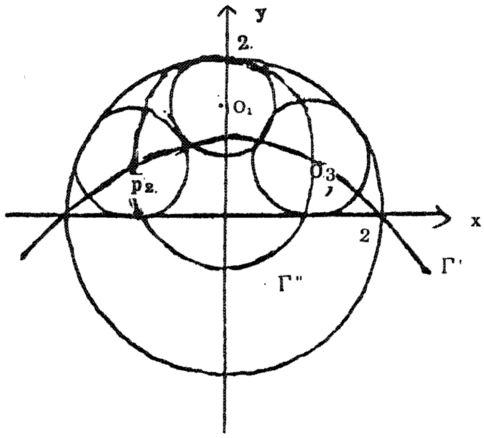
得$r_3=y=(-r^2+3r-2\sqrt{2r}\sqrt{1-r})/(1+r)^2$

因此$r_1^2+r_2^2+r_3^2=f(r)=r^2+[(3r-r^2+2\sqrt{2}\,r\sqrt{1-r}/(1+r)^2]^2+[3r-r^2-2\sqrt{2r}\sqrt{1-r}/(1+r)^2]^2=(r^6+4r^5+8r^4-24r^3+35r^2)/(1+r)^4$

由電腦繪圖觀察得知，$r=1$時有極大值，其最大面積是$(r_1^2+r_2^2+r_3^2)\pi=\frac{3}{2}\pi=1.5\pi$



<2-2>狀況B.



設$O_1(m、k)$以O、O_1為焦點，$\frac{1}{2}(r+r_1)$為長軸長之橢圓Γ"

則Γ" $\sqrt{(x-m)^2+(y-k)^2}+\sqrt{x^2+y^2}$

$=2+2-\sqrt{m^2+k^2}=4-\sqrt{m^2+k^2}$

而Γ'：$4y=-x^2+4$

於是解Γ'和Γ"之交點

化減Γ" $\to x^2-2mx+m^2+y^2-2ky+k^2$

$=x^2+y^2+16-8\sqrt{m^2+k^2}+m^2+k^2$

$-2(4-\sqrt{m^2+k^2})\sqrt{x^2+y^2}$

$\to -2mx-2ky=16-8\sqrt{m^2+k^2}$

$-2(4-\sqrt{m^2+k^2})\sqrt{x^2+y^2}$

代入Γ' $\to 2mx+\frac{k}{2}(-x^2+4)$

$=4-\sqrt{m^2+k^2})(2+\frac{x^2}{2})$

$+8\sqrt{m^2+k^2}-16$

$\to(2+\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{m^2+k^2})x^2-2mx$

$+(-8+6\sqrt{m^2+k^2}-2k)=0$

於是x $=[2m\pm\sqrt{\triangle}/(4+k-\sqrt{m^2+k^2}]$

$\triangle=4m^2-4(2+\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{m^2+k^2})$

$(-8+6\sqrt{m^2+k^2}-2k)$

$=16[(2-\sqrt{m^2+k^2})(k+2-\sqrt{m^2+k^2})]$

當我們取x $=[(2m+\sqrt{\triangle})/(4+k-\sqrt{m^2+k^2})]$

$x^2=[4m/(4+k-\sqrt{m^2+k^2})]$

$[2m+\sqrt{\triangle}/(4+k-\sqrt{m^2+k^2})]+$

$\frac{4(4+k-\sqrt{m^2+k^2}(4-3\sqrt{m^2+k^2}+k)}{(4+k-\sqrt{m^2+k^2})^2}$

$=[(8m^2+4m\sqrt{\triangle})/(4+k-\sqrt{m^2+k^2})^2]$

$+4-[8-\sqrt{m^2+k^2}/(4+k-\sqrt{m^2+k^2})]$

$r_2=y=-\frac{1}{4}x^2+1=2\sqrt{m^2+k^2}/(4+k-\sqrt{m^2+k^2})$

$-(2m^2+m\sqrt{\triangle})/(4+k-\sqrt{m^2+k^2})^2$

同理取x $=(2m-\sqrt{\triangle})/(4+k-\sqrt{m^2+k^2})$

得$r_3=(2\sqrt{m^2+k^2})/(4+k-\sqrt{m^2+k^2})$

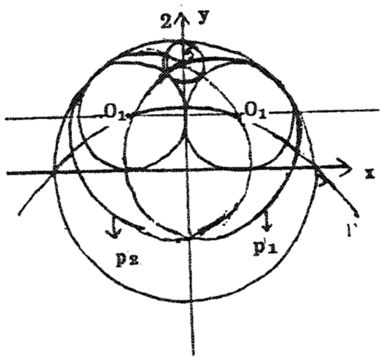
$-(2m^2-m\sqrt{\triangle})/(4+k-\sqrt{m^2+k^2})^2$

∴ $(r_1{}^2+r_2{}^2+r_3{}^2)\pi$即為所求之面積和。

我們可由電腦程式逼近其最大值，其最大值存在於

$O_1(m,k)=(0,1)$時有最大值$\frac{3}{2}\pi$。

<2-3>狀況C.



承（二）今令$O_1(a，b)$，$O_2(c，d)$

$[a=2\sqrt{1-r}，b=r，c=(2\sqrt{1-r}-2\sqrt{2r})/(1+r)，$

$d=(3r-r^2+2\sqrt{2r}\sqrt{1-r})/(1+r)^2]$

則$\Gamma 1$： $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}+\sqrt{x^2+y^2}=b+2$

$\Gamma 2$： $\sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2}+\sqrt{x^2+y^2}=d+2$

化簡：Γ_1：$a^2-2ax-2by-4b-4$

$=-2(b+2)\sqrt{x^2+y^2}$……①

Γ_2：$c^2-2cx-2dy-4d-d$

$=-2(d+2)\sqrt{x^2+y^2}$……②

由①／②→$(d+2)(a^2-2ax-2by-4b-4)$

$=(b+2)(c^2-2cx-2dy-4d-4)$……③

又∵O_1，O_2在Γ：$4y=x^2+4$上，

∴知$4b=-a^2+4$，$4d=-c^2+4$代入③

得$2(a^2-c^2)y=12(a-c)x+ac(a-c)x$

$+8(a-c)(-a-c)$

又∵$a\neq c$

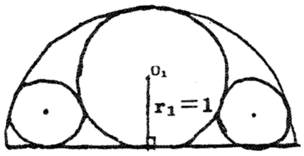
∴$2(a+c)y=(12+ac)x-8(a+c)$ ⇒

$y=[(12+ac)x-8(a+c)]/2(a+c)$代入$\Gamma_1$

→$x^2\{[(\frac{a^2}{2}-2)，(12+ac)/2(a+c)-2a]^2-4(3-a^2/4)^2\}$

$=4(3-\frac{a^2}{4})^2\{(12+ac)/2(a+c)x-4\}^2$

→由此式可解出x隨r變動。



則O_3之(x，y)皆可由r表示，由此可找$r_3=6-4\sqrt{2}$。

最後$(r_1^2+r_2^2+r_3^2)\pi$即爲所求之面積和，則知最大值存在於$r=2\sqrt{2}-2$時，最大面積爲$(92-64\sqrt{2})\pi$平方單位。

⑶由⑵的分析討論結論，比較A，B，C三種狀況之最大值，知當在狀況A時，r=1時（如圖）半圓內三個切入圓之面積和最大$=\frac{3}{2}\pi$。

五、進一步的擴展

空間中，半球內切球的幾何關係和切球體積極值問題：

㈠半球內切球之幾何關係：

1.半球內單一切球：

在半球內放入球面，使與半球之球面、底面均相切，這些球的球心有何特性？

根據平面研究之經驗，我們推測其球心軌跡在某個拋物曲面上。（以T_1表之）

2. 若以r_1爲半徑，C_1爲球心之球面S_1爲一切入球。則所有和球面S底面及球面S_1均相切的球面S_2之球心軌跡C_2在以C，C_1爲兩焦點，$\frac{1}{2}(r+r_1)$爲長軸長所決定之橢圓球T_3上。

3. 兩切球之體積關係

說明：由平面研究所得之觀念知，上半球中和S_1相切之最大球面僅存在所有切半球底面及球面之狀況中，它們形成一條粗細不均之「甜甜圈」。S_3，S_4都是「甜甜圈」中之球。

再取S_2使C，C_1，C_2決定之平面垂直底面，則所有球心在橢圓球上且和S_2等大且符合定義之球面形成一等粗之「甜甜圈」，而其中僅S_2切於上半球，即甜甜圈中所有球之球心所在之平面爲$\overline{AB}$之垂面，於是，順著橢圓球面上A，B之連線，每個S_3均有一S_4與之對應且大於S_3。故之S_2爲切於S_1，半球底面及半球球面的球。

(二)兩個切球之極值問題

1.由解析幾何探討之：

定半球爲以（0，0，0，）爲球心C，2爲半徑，決定之球面S：$x^2+y^2+z^2=4$之上半球。

以C爲焦點，z=2爲準線平面所決定之拋物曲面T_1：$-4z=x^2+y^2-4$，因切入球之球心在T_1上。

取S_1之球心C1爲（i，j，$\frac{4-i^2-j^2}{4}$）

得以C_1爲焦點，$z=\frac{i^2+j^2-4}{4}$爲準線平面所決定之拋物曲面T_2：$(4-i^2-j^2)z=(x-i)^2+(y-j)^2$

→解得T_1，T_2交集所在之平面E_1

$$(8-i^2-j^2)z=-2ix-2jy+i^2+j^2+4$$

而由前幾何關係之推導中，知最大切球之球心在由C_1及z軸所決定之平面E2上

$$E_2: jx-iy=0$$

於是，得E_1，E_2，T_1之交集爲球心C_2之坐標

$$\begin{cases} jx-iy=0 \cdots\cdots ① \\ (8-i^2-j^2)z=2ix-2jy+i^2+j^2+4 \cdots\cdots ② \\ -4z=x^2+y^2-4 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

由①②解得直線：

$$\begin{cases} x=i/jt \\ y=t\cdots\cdots(*) \\ \frac{-2i^2-2j^2}{} \end{cases}$$

$$z=〔(\frac{-2i^2-2j^2}{j})t+i^2+j^2+4〕/(8-i^2-j^2)$$

代入③

$$-4〔\frac{(\frac{-2i^2-2j^2}{j})t+i^2+j^2+4}{8-i^2-j^2}〕=\frac{i^2}{j^2}t^2+2t-4$$

整理得：

$$\underbrace{(\frac{i^2-j^2}{j^2})}_{a}t^2+4\underbrace{〔\frac{(\frac{2i^2-2j^2}{j})}{8-i^2-j^2}〕}_{b}t+\underbrace{\frac{8i^2-8j^2+16}{8-i^2-j^2}}_{c}=0$$

得$t=(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})/2a$

由前之幾何推論知，t之兩解，分別是切球體積最大及最小情況。不失一般性，令$[i,j,(4-i^2-j^2)/4]$在第一卦限，欲得最大之球，則取$t=(-b-\sqrt{b^2-4ac})/2a$將t代入（＊）式，求出x，y，z之值，再把兩球之z值平方，

得$2\sqrt{2}-2=(4-i^2-j^2)/4$

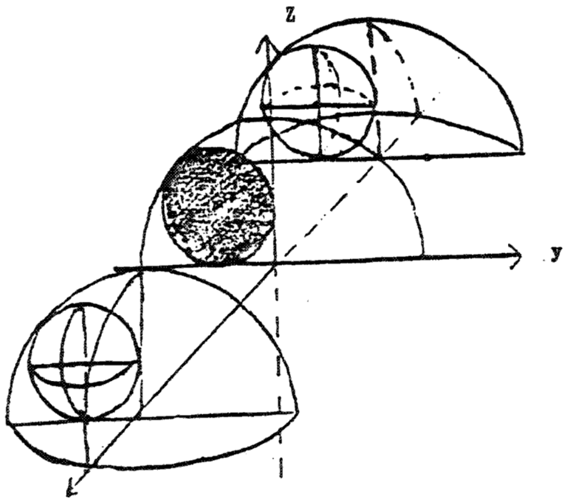
當i，j符合上式時，球體積有最大值存在。

2. 但事實上，並不需要用如此複雜之方程式。因有時候，這些球心之關係數字對我們並不重要。而希望將空間中的東西，利用平面的一些關係，直接推出其性質。

因此，我們可把半球中的狀況，對應回半圓內之狀況，因球本身爲對稱的，故僅得出一狀況討論，其餘相對位置，均可援例解釋！

如下圖，取球心位置在y－z平面上，取出半球和y－z平面交集之半圓，則可在此半圓中討論其面積最大值。

至於其他狀況，則可由坐標旋轉，改爲此種狀況。由此，將平面研究之結果引入，平面中以兩圓等大而相切時面積最大。對應至空間，當兩球球心和半球球心決定之平面垂直底面且兩球等大而相切時，有最大體積和爲$\frac{4}{3}(80\sqrt{2}-112)\pi=(\frac{320}{3}\sqrt{2}-\frac{448}{3})\pi$。

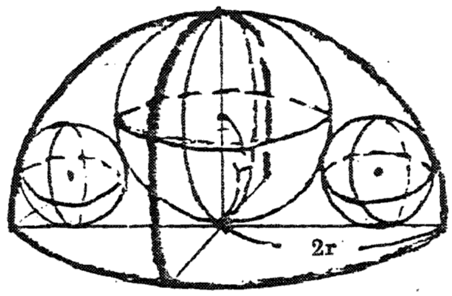


㈢半球中的三個切球

1. 由半球中兩個切球之概念，我們可由坐標解析法解出半球中之三個切球。

但由平面研究之結果及半球中兩切球之探討結果，歸納討論出最大值僅存於 A，B兩種狀況。

A.



狀況A

S_1體積: $\frac{4}{3}\pi r^3$

S_3體積：$\because [(r+r^3)^2-(r-r_3)^2]+r_3$

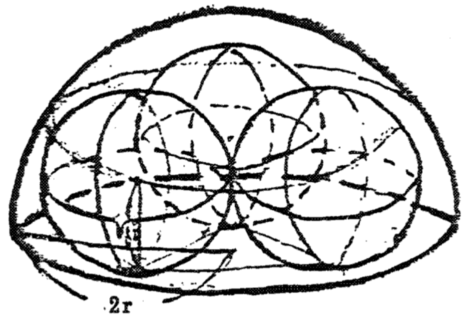
$= (r-r_3)^2$

$\Rightarrow r^3=\frac{1}{2}r$

於是S_3體積$=\frac{1}{6}\pi\ r^3=S_2$體積

即（$S_1+S_2+S_3$）體積和$=\frac{5}{3}\pi r^3$

B.



狀況B

$r_1{}^2+(\frac{2}{3}\sqrt{3r_1})^2=(2r-r_1)^2$

$\Rightarrow r_1=\sqrt{21}-3)\ r/2$

$\therefore S_1$體積$=\frac{4}{3}\pi(6\sqrt{21}-27)r^3$

$\therefore$（$S_1+S_2+S_3$）之體積和

$=4\pi(6\sqrt{21}-27)r^3$

比較A、B兩狀況

A：$\frac{5}{3}\pi\ r^3 \fallingdotseq 1.67\pi r^3$

B： $4\pi\ r^3$（$6\sqrt{21}\text{-}27$）$\fallingdotseq 1.98\pi r^3$

故知半球中切入三球時，以三球彼此對稱相切而等大時，有最大體積。

2. 進一步探討這兩種狀況。則在狀況A時，C_1是嵌於半球中之最大球，此時，C_2，C_3可沿一“甜甜圈”之軌跡滾動而體積處處相等。

當滾至C_2，C_3彼此相切時，可發現，狀況B即此時的特殊狀況。

六、結論與展望

㈠結　語

本研究探討半圓與半球內放入不相割之圓及球面，求其面積及體積和之最大值。在研究過程中，利用古典幾何法分析討論，並引入圓錐曲線的幾何特性與解析方

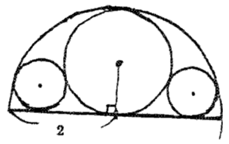
程式來確定面積與體積函數，並透過電腦作圖與微分分析法，最後利用切割的方法將平面上圓的問題延伸來探討空間中半球內放入球的體積問題。過程艱困繁雜，是不可避免的。然而這種研究方法和分析能力之培養，也是我以後想從事數學研究應及早建立之習慣。

(二)結　論

若設半圓及半球之半徑均為2，則得：

1. 半圓內切入兩個圓時，其最大面積和之情況存於兩圓等大時，此時，其值為 $(24-16\sqrt{2})\pi$。

2. 半圓內切入三個圓，其最大面積和存於如右之情況，其值為 1.5π。



3. 在半球中切入二個球時，當兩球之球心和半球球心形成之平面垂直底面，有最大體積和為 $\frac{4}{3}(80\sqrt{2}-112)\pi$。

4. 在半球中切入三個球時，其最大體積和存於三球兩兩相切且等大時，其值為 $12\pi(2\sqrt{21}-9)$。

(三)展　望

1. 希望以更嚴密之討論，證明半球中放入二及三個球面之體積和極大值。

2. 希望以有系統的找到半圓內更多個不相割圓之面積和極大值。

七、參考資料

(一)高中數學競試專集（台大數學系編著）

(二)高中數學第三冊（國立編譯館出版）

(三)高中理科數學上冊（國立編譯館出版）

評語

此作者探討在已知半圓或半球，找出三圓或三個球使它們的面積或體積最大，作者考慮所有可能發生情況，然後找出在什麼情況下有最大面積及體積，此作者處理此問題方法很細密有創意。