鑲嵌問題－－從平面到空間到球面

高中組數學科第二名

臺灣省立彰化女子高級中學

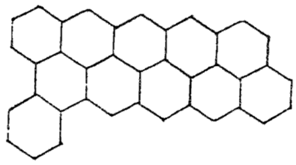
作　　者：林玲誼、趙巧惠、陳雅華

指導教師：王文惠

一、研究動機

在日常生活中，我們到處可見許多磁磚、壁紙，都是利用邊長相同的正多邊形組合而成。甚至大自然界的蜂窩形狀（如圖）亦正是正六邊形鑲嵌而成。

到底那些正多邊形的組合可鑲嵌成一個面呢？依此問題，平行類推，到底那些正多面體（或「半正多面體」）的組合可鑲嵌整個空間呢？這個問題，引起我們的興趣。

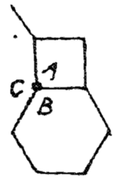


二、研究內容及結果

㈠平面上的鑲嵌

可以確定的是，任何正多邊形的組合，若可以鑲嵌成一個正，則頂點必須可拼在一起，如圖，則∠A＋∠B＋∠C＝360°。我們依此原則，做以下討論：

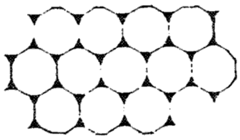
1. 頂點由三個正多邊形所拼合：



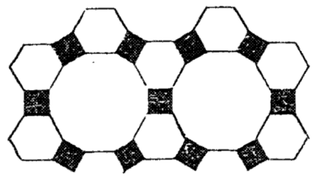
設此三個正多邊形為正n_1邊形、正n_2邊形、正n_3邊形，則

$$\frac{180^\circ(n_1-2)}{n_1}+\frac{180^\circ(n_2-2)}{n_2}+\frac{180^\circ(n_3-2)}{n_3}=360^\circ$$

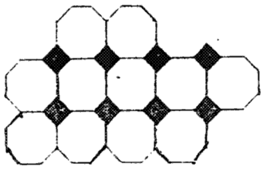
討論結果，有（3，12，12）、（4，6，12）、（4，8，8）、（6，6，6）四型，圖形如下



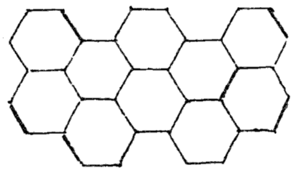
(圖一)



(圖二)



(圖三)



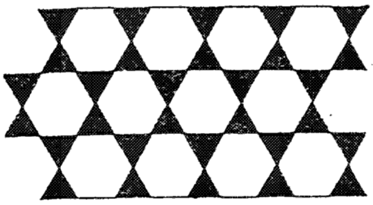
(圖四)

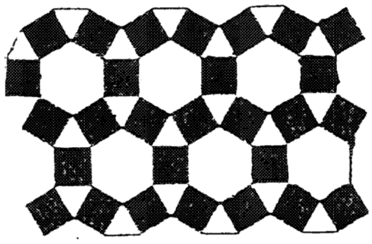
2. 頂點由4個正多邊形所拼合：

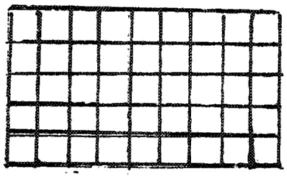
設此4個正多邊形爲正n_1邊形、正n_2邊形、正n_3邊形、正n_4邊形則

$$\frac{180^\circ(n_1-2)}{n_1}+\frac{180^\circ(n_2-2)}{n_2}+\frac{180^\circ(n_3-2)}{n_3}+\frac{180^\circ(n_4-2)}{n_4}=360^\circ$$

討論結果，有（3，6，3，6）、（3，4，6，4）、（4，4，4，4）三型，圖形如下：


(圖 五)


(圖 六)

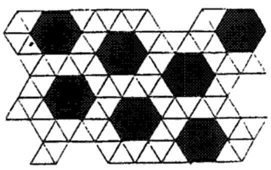

(圖 七)

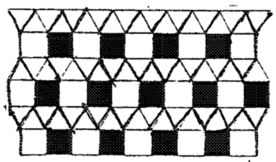
3. 頂點由5個正多邊形所拼合：

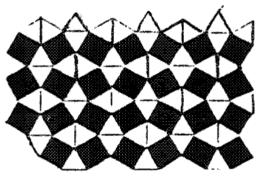
設此5個正多邊形爲正n_1邊形、正n_2邊形、正n_3邊形、正n_4邊、正n_5邊形則

$$\frac{180^\circ(n_1-2)}{n_1}+\frac{180^\circ(n_2-2)}{n_2}+\frac{180^\circ(n_3-2)}{n_3}+\frac{180^\circ(n_4-2)}{n_4}+\frac{180^\circ(n_5-2)}{n_5}=360^\circ$$

討論結果，有（3，3，3，3，6）、（3，3，3，4，4）、（3，4，3，4，3）三型，圖形如下：


(圖八)


(圖九)

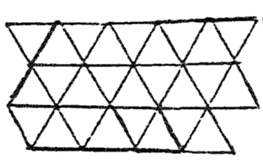

(圖十)

4. 頂邊由6個正多邊形所拼合：

設此6個正多邊形爲正n_1邊形、正n_2邊形、正n_3邊形、正n_4邊、正n_5邊、正n_6邊形則

$$\frac{180^\circ(n_1-2)}{n_1}+\frac{180^\circ(n_2-2)}{n_2}+\frac{180^\circ(n_3-2)}{n_3}+\frac{180^\circ(n_4-2)}{n_4}+\frac{180^\circ(n_5-2)}{n_5}+\frac{180^\circ(n_6-2)}{n_6}=360^\circ$$

討論結果，有（3，3，3，3，3，3）一型，圖形如下：


(圖十一)

5. 不必再討論頂點由7個或7個以上正多邊形所拼合的情形，因爲正多邊形中，內角最小者爲正△60°，而60°×6＝360°，60°×7＞360°，所以不可能有任一頂點是由7個或7個以上正多邊形拼合而成。

6. 總結：

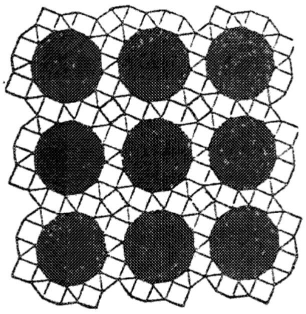
將各類正多邊形加以組合，而可鑲成一個面的，共有如上圖（一）～圖（十一）所示。11型圖案，若任取一型，則此型內的每個頂點編排方式都相同。

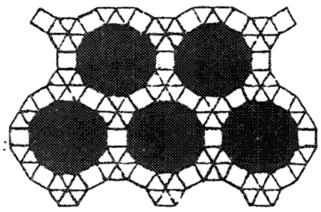
㈡應用

1. 以上的討論，我們著眼於「頂點編排」方式都須相同。如果，沒有此限制，則我們可從剛才所得的解中，尋找兩組解配合。亦可造出漂亮的鑲嵌圖案。例如：

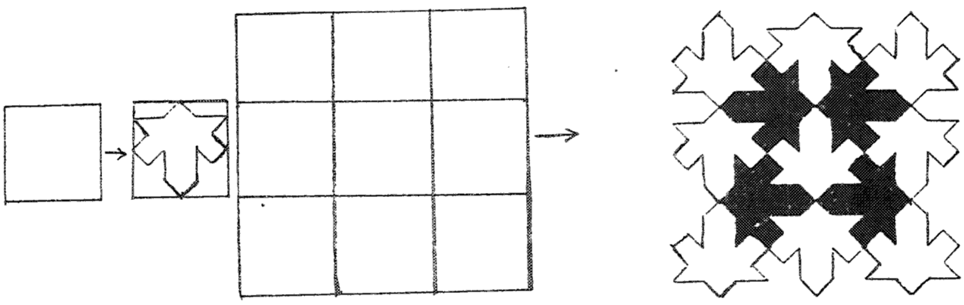
⑴將（3，4，3，3，4）與（3，3，4，12）兩組解配合，可得右圖之一。

⑵將（3，3，3，3，3，3）與（3，3，4，12）兩組解配合，可得右圖之二。





2. 以上的討論，都是正多邊形的鑲嵌。至於非正多邊形的鑲嵌，雖不在我們討論範圍，但我們卻發現了一件有趣的事，可讓正多邊形的鑲嵌轉成「流線型」，使圖案更豐富。例如下圖，在每個正方形裡加上曲線，可造成如右的曲線鑲嵌圖。



㈢空間上的鑲嵌

對日常生活的磁磚、壁紙拼排及藝術圖案而言，都是屬於平面的鑲嵌問題。但在自然界中，例如晶體原子的排列，應該就是屬於空間的鑲嵌了。所以，我們從二維推到三維，探討正多面體及半正多面體在空間上的鑲嵌問題。

1. 衆所皆知，正多面體僅5種，所以我們再加入13種「半正多面體」（又稱：阿基米德立體）。探討這18種多面體，在空間上的鑲嵌問題。

2. 在平面鑲嵌時，我們專注於一個頂點，使所有正多邊形拼合時，內角總和須360°，同樣觀念，用於空間鑲嵌時，我們將專注於一個稜邊，使所有正（或半

正）多面體在此拼合時，二面角總和爲360° 。因此我們先將這18個多面體之二面角算出，再加以討論。

多　面　體	二面角（個數）
正四面體	70° 32' (6個)
正立方體	90° (120個)
正八面體	109° 28' (12個)
正十二面體	116° 34' (30個)
正二十面體	138° 11' (30個)
截四面體	70° 32' (6個)' 109° 28' (12個)
截立方體	90° (12個)' 125° 16' (24個)
截八面體	109° 28' (12個)' 125° 16' (24個)
截十二面體	116° 34' (30個) 109° 28' (60個)
截二十面體	138° 11' (30個) 142° 36' (60個)

多　面　體	二面角（個數）
立方八面體	125° 16' (24個)
菱形立方八面體	135° (24個) 144° 44' (24個)
大菱形立方八面體	125° 16' (24個) 135° (24個) 144° 44' (24個)
二十十二面體	142° 36' (60個)
菱形二十十二面體	148° 17' (60個) 159° 05.5' (60個)
大菱二十十二面體	142° 36' (60個) 148° 17' (60個) 159° 05.5' (60個

3. 由上表所列二面角，我們不難看出，能形成360° 的組合，只有五大類：

⑴90° ×4：也就是我們熟知的正立方體堆積可鑲嵌整個空間。

⑵125° 16'×2＋109° 28'＝360° ：

∵125° 16'可來自「截八面體」或立方八面體或「截立方體」而109° 28'可來自「正八面體」或「截四面體」或「截八面體」。

故共3×3＝9種情形，須討論：

ㄅ、2個截八面體與一個正八面體：

對某條稜邊而言，會正好是「截八面體」的125° 16'二面角×2＋「正八面體」的109° 28'＝360° ，但對某些稜邊而言，必無可避免有（「截八面體」的另一個二面角109° 28'×2＋「正八面體」的109° 28'≠360° ）

∴此種必不能鑲嵌整個空間。

ㄆ、2個截八面體與截四面體不能鑲嵌整個空間。（理由同①）

ㄇ、2個立方八面體與截四面體不能鑲嵌整個空間。（理由同①）

ㄈ、2個立方八面體與截八面體不能鑲嵌整個空間。（理由同①）

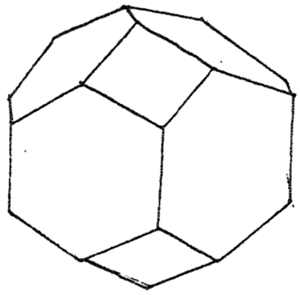
ㄉ、2個立方八面體與1個正八面體：

其二面角皆僅一種。∴每個接合的稜線都可形成360° ，密切接合。故可無限延伸，鑲嵌整個空間。

ㄊ、2個截八面體與1 個截八面體：

也就是3個截八面體。不過稜邊的接合，是採（2個125° 16'的二面角）＋（1個109° 28'的二面角）。如右圖是截八面體，我們注意到，剛好有36條稜線，形成24個125° 16'的二面角及12個109° 28'的二面角。換句話而言（125° 16'的個數）：（109° 28'的個數）＝2：1，如此接合，恰可完全「用完」。

∴可鑲嵌整個空間



ㄋ、2個截立方體與1個正八面體：

雖然截立方體的二面角有二種，但另一爲90° ，只要4個可自行環繞成360° ，所以此鑲嵌很特殊，對某些稜線而言，是4個截立方體環繞，另某些稜線，則是2個截立方體（125° 16'）與1個正八面體（190° 28'）的環繞。不算是單一型鑲嵌（我們將在以下的（四）討論到）。

ㄌ、2個截立方體與1個截四面體→不可能。（理由同①）

ㄍ、2個截立方體與1個截八面體→不可能。截立方體是12個90° 的二面角與24個125° 16'的二面角。截八面體是24個125° 16'的二面角與12個109° 28'的二面角。當我們爲125° 16'×2＋109° 28'＝360° 。以2：1的比例「用完」了截立方體的125° 16'及截八面體旳109° 28'時，將可發現截八面體的125° 16'「過剩」，無其他角度可與之配合成360° 。∴不可能鑲嵌整個空間。

※本來125° 16'亦可來自大菱形立方八面體，但因此多面體另有二面角144° 44'，即使可鑲嵌，必有另一種稜邊編排方式是144° 44'×2＋70° 32'＝360° 。∴若限定稜邊編排方式爲同一型，則不可能由大菱形立方八面體與其他任何多面體配合鑲嵌整個空間。

⑶（70° 32'＋109° 28'）×2＝360°

∵70° 32'可來自「正四面體」或「截四面體」。109° 28'可來自「正八面體」或「截四面體」或「截八面體」。

故共有2×3＋1＝7種情形，須討論：（＋1的原因在⑥說明）

ㄅ、2個正四面體與2 個截八面體→不可能。

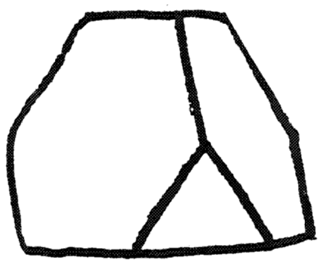
∵此時截八面體的另一個二面角125° 16'無法與正四面體配成

2×（70° 32'＋125° 16'）＝360°

ㄆ、2個截四面體與2 個正八面體→不可能（理由同①）

ㄇ、2個截四面體與2 個截八面體：

也就是4個截四面體，不過稜線的結合，是採（2個70° 32'的二面角）＋（2個109° 28'的二面角）。如右圖是截四面體，我們注意到，共有12個109° 28'的二面角及6個70° 32'的二面角。換句話而言，（70° 32'的個數）：（109° 28'的個數）＝1：2，如此以2：2結合，必不能完全「用完」。∴不可以！



ㄈ、2個截四面體與2 個截八面體→不可能（理由同①）。

ㄉ、2個正四面體與2 個截四面體：

稜線的結合爲（正四面體的70° 32'×2個）＋（截四面體的109° 28'×2個），但因截四面體另有70° 32'的二面角，必定有時會形成（正四面體的70° 32'×2個）＋（截四面體的70° 32'×2個）≠360° 。∴不可能。

※但由 ④ ⑤ 使我們想到另一種可能→

ㄊ、1個正四面體與（70° 32'）與1個截四面體（70° 32'）與2 個截四面體(109° 28'），此時仍維持了70° 32'×2＋109° 28'×2＝360° ，而由④，我們知（70° 32'的個數）：（109° 28'的個數）＝1：2依此安排，剛好完全「用完」。∴可鑲嵌整個空間。

ㄋ、2個正四面體與2 個正八面體：

其二面角皆僅一種。∴每個接合的稜邊都可依此排列形成360° ，密切接合。

尙有2類可形成360° 的爲：

⑷135° ×2＋90° ＝360°

⑸144° 44'×2＋70° 32'＝360°

但我們依上面方法試過，所造成的鑲嵌皆非「稜邊編排」方式單一型。至於非單一型稜邊邊編排方法所造成的空間鑲嵌，我們將在以下的（四）討論到。

4.總結：將正或半正多面體加以組合，而可鑲嵌整個空間的，共有5種：

⑴正立方體（由4個正立方體環繞每條稜邊）。

⑵由2個立方八面體與1個正八面體環繞每條稜邊。

⑶由3個截八面體環繞每條稜邊。

⑷由2個正四面體與2個正八面體環繞每條稜邊。

⑸由1個正四面體與3個截四面體環繞每條稜邊。

㈣空間鑲嵌之應用

1. 以上的討論，我們著眼於「稜邊的編排」方式，皆爲同一型式，若摒除此限制，而尋找多組解加以配合亦可造成豐富的鑲嵌圖案。

2. 將正或半正多面體加以組合，使其可鑲嵌整個空間，「稜邊編排」方式不限於單一型，共有5種：

⑴由截立方體、截四面體和大菱形立方八面體三種組合鑲嵌而成。

⑵由截四面體、截八面體、立方八面體三種組合鑲嵌而成。

⑶由菱形立方八面體、立方體和立方八面體三種鑲嵌而成。

⑷由正四面體、正八面體二種組合鑲嵌而成。

⑸由截立方體和正八面體二種組合鑲嵌而成。

三、再推廣（球面上）

從平面到空間的推廣時，我們只討論了18種多面體。其實單從這每一個多面體的表面來看，它亦正是正多邊形的鑲嵌所組合。這使我們想到球表面的鑲嵌問題——「球表面可以是那些正多邊形的鑲嵌呢？」這個「再推廣」引起我們莫大的興趣，尤其是在我們兒時記憶中的小皮球不正是△在球面的鑲嵌？

但是，對我們而言，曲面的東西所學太少。所以我們打算從較熟悉的「球面三角」出發。稍微改變探討的問題，改成——探討哪種△（不限定正△）可在球面上造成鑲嵌圖案？

㈠設此球面△的三角度數爲A、B、C，因爲僅用單一型△鑲嵌，由對稱觀點知，A、B、C必皆是180°的公因數。

可設$A=\dfrac{180^\circ}{m}$,$B=\dfrac{180^\circ}{n}$,$C=\dfrac{180^\circ}{k}$

㈡球面△面積公式爲$\pi r^2\times\dfrac{A+B+C-180^\circ}{180^\circ}$（r爲球半徑）

1. 能在球面上造成單一型鑲嵌圖案的球面△共四類：

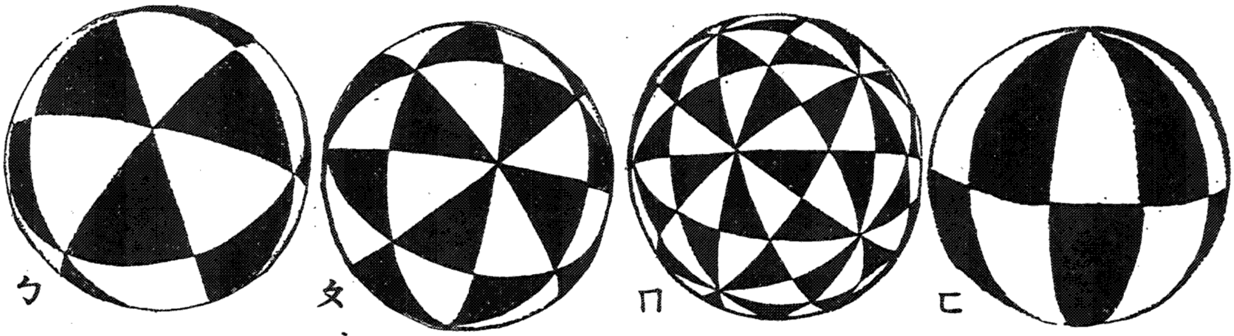
ㄅ、90°－60°－60°　　ㄆ、90°－60°－45°

ㄇ、90°－60°－36°　　ㄈ、90°－90°－$\dfrac{180^\circ}{n}$（$n\geqq 2$）

在日常生活中所見到的皆不出此4型。

2. 因爲所學有限，而無法繼續推廣下去，否則討論其他多邊形，在球面上的鑲嵌，

應是一件很有意義的事，也許這將是我們下回努力的目標。



四、參考資料

㈠對稱（正中書局）

㈡九章數學

㈢數學傳播

㈣寓數學於遊戲

㈤球面三角術

評語

鑲崁問題在一般數學教科書中，均因簡易而繁瑣以致語焉不詳。作者詳細就各種可能狀況作了數學的計算加以整理。主要有平面正多邊形（一種、多種），立體正多面體（一種、多種），球面多邊形（一種）三種，同時製作了很好的模型來表現。整件作品很完整。