定周長包含定點所圍三角形最大面積之理論研究

高中組數學科第一名

國立華僑實驗高級中學　　　　作　　者：董展宏、施啓文、吳培毅、陳冠宏

指導教師：詹世忠、曾政清

一、研究動機

坊間的一些數學書籍中皆曾提及「定周長」問題的敘述，引起我們對該問題的注意與興趣，因此想嘗試將條件予以限制，增加包含定點的規定，於是我們便開始著手研究第一主題。

二、研究目的

(一)給一定周長求包含二定點之三角形最大面積。

(二)給一定周長求包含三定點之三角形最大面積。

(三)給一定周長求包含n定點之三角形最大面積。（$n\geqq 4$）。

三、研究設備器材

紙、筆、32位元AT個人電腦、列印表機。

四、研究過程

(一)我們先從幾個關於三角形的等周問題談起。

引理1.周長一定的所有三角形中，正三角的面積最大。

證明：已知三角形三邊長a、b、c，根據海龍公式$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，

其中$s=\dfrac{a+b+c}{2}$，則由算術平均數≧幾何平均數得

$\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{3}\geqq\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$，當$s-a=s-b=s-c$時，

$(s-a)(s-b)(s-c)$有最大值。即周長固定時，正三角形面積最大。

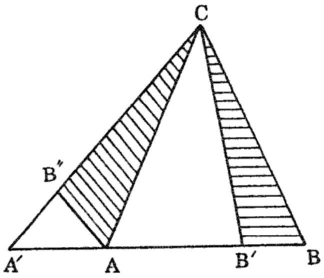
引理2.頂角及兩側邊和給定的三角形中，以等腰三角形的面積最大。

證明：設$\triangle A'B'C'$及$\triangle ABC$滿足所給之條件。而$\triangle ABC$為等腰三角形。

$\because \overline{AC}=\overline{BC}$，$\overline{A'C}>\overline{B'C}$；$\angle A'CA=\angle B'CB$（如圖1-1）

$\therefore$在$\overline{A'C}$上取一點B''使$\triangle AB''C\cong\triangle BB'C$，即得$\triangle ABC$之面積>$A'B'C$之面積，得證。

圖1-1



引理3. 底邊及頂角給定之三角形中，以等腰三角形面積最大。

證明：以給定之底邊$\overline{AB}$爲弦做圓弧BCA使其所成的圓周角等於給定的頂角∠BCA。且由C到底邊$\overline{AB}$引垂線$\overline{CD}$（如圖1-2）。則當C爲圓弧BCA中點時，△ABC的面積有最大值，即△ABC爲等腰三角形，得證。

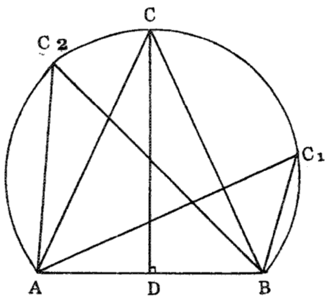


圖1-2

引理4. 底邊及兩側邊和給定之三角形中，以等腰三角形面積最大。

證明：設底邊長c，兩側邊和爲a＋b，且a＋b＋c＝2ℓ

由海龍公式可得$\triangle=\sqrt{\ell(\ell-a)(\ell-b)(\ell-c)}=\sqrt{\ell(\ell-c)}\sqrt{(\ell-a)(\ell-b)}$

$$\leq\sqrt{\ell(\ell-c)}\cdot\frac{(\ell-a)+(\ell-b)}{2}$$

當a＝b時，△有最大值，即等腰三角形面積最大。

引理5. 周長爲2s的三角形中，給定一頂θ，所圍三角形最大面積爲 $S^2\cdot\tan\frac{\theta}{2}\cdot\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)$，且發生於腰長$\frac{S}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$之等腰三角形。

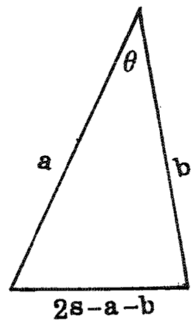


圖1-3

證明：⑴設頂角θ之兩夾邊爲a、b（如圖1-3）

由餘弦定理可得$[2s-(a+b)]^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$

$$\therefore b=\frac{2s-(s-a)}{2s-a-a\cos\theta}$$

⑵則三角形面積$A(a)=\frac{1}{2}\sin\theta=a\cdot\frac{s(s-a)}{2s-a(1+\cos\theta)}\cdot\sin\theta$

⑶令$1+\cos\theta=t$，則$A(a)$之最大值發生於$M(a)=\frac{a(s-a)}{2s-at}$爲最大值時

$\frac{d}{da}M(a)=\frac{2s^2-4as+ta^2}{(2s-ta)^2}$，令 $\frac{d}{da}M(a)=0$得

$$a=\frac{2s\pm s\sqrt{2(2-t)}}{t}=\frac{2s(1\pm\sin\frac{\theta}{2})}{1+\cos\theta}$$

則最大值發生在$a=2s\cdot\frac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{1+\cos}=\frac{s}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$時。

$$又b=\frac{2s-(s-a)}{2s-a(1+\cos\theta)}=\frac{2s-(s-\frac{s}{1+\sin\frac{\theta}{2}})}{2s-\frac{s(1+\cos\theta)}{1+\sin\frac{\theta}{2}}}=\frac{2s^2(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}})}{2s(1-\frac{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}})}$$

$$=\frac{s\cdot(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}})}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{s}{1+\sin\frac{\theta}{2}}=a$$ ∴最大值發生在等腰三角形時

$$則A(a)=\frac{2s-\sin\theta}{4}\cdot\frac{\frac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\cdot 2s(2s-4\cdot\frac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\cdot s)}{[2s-2\cdot\frac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{1+\cos\theta}\cdot s\cdot(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{s\cdot\sin\theta}{2}\cdot\frac{4\cdot\frac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\cdot s^2\cdot(\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-1+\sin\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}})}{2\cdot s\cdot\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{s^2\cdot\sin\frac{\theta}{2}(1-\sin\frac{\theta}{2})^2}{\cos^3\frac{\theta}{2}}$$

$$(\because\tan\ =\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta})=s^2\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=s^2\cdot\tan\ [\frac{1-\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2})}]^2=s^2\cdot\tan\frac{\theta}{2}\cdot\tan^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4})$$

引理6. $A(\theta)$表周長為2s，頂角θ之等腰三角形面積，則$A(\theta)$在〔0，$\frac{\pi}{3}$〕為遞增函數，〔$\frac{\pi}{3}$，π〕為遞減函數，即頂角愈接近$\frac{\pi}{3}$之等腰三角形面積愈大。

證明：由引理5可知$A(\theta)=\frac{1}{2}(\frac{s}{1+\sin\frac{\theta}{2}})^2\cdot\sin\theta=s^2\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{(1+\sin\frac{\theta}{2})^2}$ $(0<\theta<\pi)$

令$\sin\frac{\theta}{2}=x\ (0<x<1)$故$A^2(\theta)=s^4\cdot\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}{(1+\sin\frac{\theta}{2})}=s^4\cdot\dfrac{x^2(1-x^2)}{(1+x)^4}$

令$B(x)=\dfrac{x^2(1-x^2)}{(1+x)^4}=\dfrac{x^2-x^4}{(1+x)^4}$

$$\frac{d}{dx}B(x)=\frac{1}{(1+x)^8}[(2x-4x^3)(1+x)^4-4(1+x)^3(x^2-x^4)]=\frac{1-2x(2x-1)}{(1+x)^4}$$

當$0<x<\frac{1}{2}$時$\frac{d}{dx}B(x)>0\rightarrow B(x)$爲一遞增函數

當$X=\frac{1}{2}$時$\frac{d}{dx}B(x)=0\rightarrow B(x)$有最大值

當$\frac{1}{2}<x<1$時$\frac{d}{dx}B(x)<0\rightarrow B(x)$爲一遞減函數

又$0<x<1\rightarrow B(x)=\dfrac{-2x(2x-1)}{(1+x)^4}\ \ \geqq 0$　即$A(\theta)=s^2\sqrt{B(x)}$

$\therefore A(\theta)$在〔0，$\frac{\pi}{3}$〕爲遞增函數，在〔$\frac{\pi}{3}$，π〕爲遞減函數

引理7. 已△ABC，其周長爲2S，則此三角形面積爲 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\cdot s^2$

證明：令三角形三邊長a、b、c且$a+b+c=2s$（R爲外接圓半徑），由正弦定理知

$$2s=2R(\sin A+\sin B+\sin C)$$

$$\rightarrow R=\frac{s}{\sin A+\sin B+\sin C}\text{，又}\triangle=\frac{abc}{4R}=\frac{8R^3\sin A\ \sin B\ \sin C}{4R}$$

$$=\frac{2s^2\sin A\ \sin B\ \sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}$$

$$(\because \sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2})$$

$$=\frac{16s^2\cdot\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\ \sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{16\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}$$

故$\triangle=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\cdot s^2$得證

引理8.　已知△OCD周長＝△OBE周長＝△OAF周長，則$\overline{AF}$，$\overline{BE}$，$\overline{CD}$不能共點。(如圖1-4)

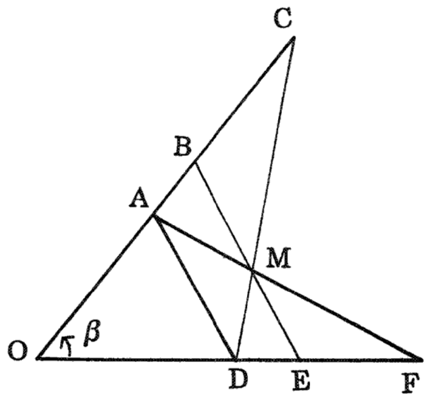


圖1-4

證明：利用歸謬證法，證$\overline{AF}$，$\overline{BE}$，$\overline{CD}$交於M，令$\overline{OA}=a$，$\overline{OB}=b$，$\overline{OC}=c$，又由引理5

可知$\overline{OF}=\dfrac{S(S-a)}{2[S-(1+COS^3\ )a]}$

令$\overline{OF}=f(a)$同理$\overline{OE}=f(b)$，$\overline{OD}=f(c)$。

可得A、B、C坐標分別爲$(a\cos\beta\ ,a\sin\beta)$，$(b\cos\beta\ ,b\sin\beta)$，$(c\cos\beta\ ,c\sin\beta)$

且D、E、F坐標分別爲$(f(c),0)$、$(f(b),0)$、$(f((a),0)$

則$\overline{AF}$：$y=\dfrac{a\sin\beta}{a\cos\beta-f(a)}(x-f(a))\rightarrow a\sin\beta x+(f(a)-a\cos\beta)\ y-f(a)a\sin\beta=0$

同理$\overline{BE}$：$b\sin\beta x+(f(b)-b\cos\beta)y-f(b)b\sin\beta=0$

$\overline{CD}$：$c\sin\beta x+(f(c)-c\cos\beta)y-f(c)\sin\beta=0$

三點共線$\rightarrow\begin{vmatrix} a\cdot\sin\beta & f(a)-a\cos\beta & -f(a)\cdot a\sin\beta \\ b\cdot\sin\beta & f(b)-b\cos\beta & -f(b)\cdot b\sin\beta \\ c\cdot\sin\beta & f(c)-c\cos\beta & -f(c)\cdot c\sin\beta \end{vmatrix}=0\rightarrow\begin{vmatrix} a & f(a) & af(a) \\ b & f(b) & bf(b) \\ c & f(c) & cf(c) \end{vmatrix}=0$

$$\rightarrow\begin{vmatrix} a, & \dfrac{s\cdot(s-2a)}{2[s-(1+\cos\theta)a]}, & a\cdot\dfrac{s(s-2a)}{2[s-(1+\cos\theta)a]} \\ b, & \dfrac{s\cdot(s-2b)}{2[s-(1+\cos\theta)b]}, & b\cdot\dfrac{s(s-2b)}{2[s-(1+\cos\theta)b]} \\ c, & \dfrac{s\cdot(s-2c)}{2[s-(1+\cos\theta)c]}, & c\cdot\dfrac{s(s-2c)}{2[s-(1+\cos\theta)c]} \end{vmatrix}=0$$

$$\rightarrow\begin{vmatrix} sa, & s-2a, & a(s-2a) \\ sb, & s-2b, & b(s-2b) \\ sc, & s-2c, & c(s-2c) \end{vmatrix}-(1+\cos\theta)\begin{vmatrix} a^2 & s-2a & a(s-2a) \\ b^2 & s-2b & b(s-2b) \\ c^2 & s-2c & c(s-2c) \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow 2s\begin{vmatrix} a & s-2a & a^2 \\ b & s-2b & b^2 \\ c & s-2c & c^2 \end{vmatrix}-(1+\cos\theta)\begin{vmatrix} a^2 & s & as \\ b^2 & s & bs \\ c^2 & s & cs \end{vmatrix}+2(1+\cos\theta)\begin{vmatrix} a^2 & a & as \\ b^2 & b & bs \\ c^2 & c & cs \end{vmatrix}=0$$

$$\rightarrow -s^2(3+\cos\theta)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}=0$$

但 $-s^2(3+\cos\theta)(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$（$\because a<b<c$）$\therefore$三線不共點

(二)探討給一定周長包含二定點所圍三角形最大面積問題：

在不失一般性的情況下給定一周長爲 2ℓ，二定點A、B距離爲2k，且令 $A(-k，0)$，$B(k，0)$ 則本主題可分下列三種情況研究。

(A) $2\ell\leqq 4k$　(B) $4k<2\ell<6k$　(C) $6k\leqq 2\ell$

1. 第(A)部份 $2\ell\leqq 4k$：

因二點距離 $\overline{AB}$ 大於等於周長之一半（$\ell\leqq 2k$），則顯然可得原周長無法包含A、B二點形成三角形，故此部份無法求三角形。

2. 第(B)部份 $4k<2\ell<6k$：

(1)討論所給的二定點A、B分別位於所求三角形之同一邊。

ㄅ首先將A點向左移X單位得 $A'(-k-X，0)$；將B點向右移X單位得 $B'(k+X，0)$，由引理4可知底邊 $\overline{A'B'}$ 固定之最大角形積爲等腰三角形。(如圖2－1)

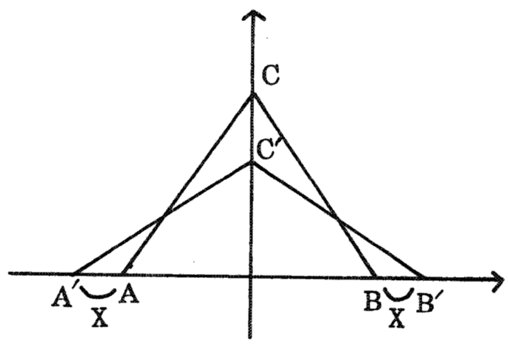


圖 2-1

ㄆ則欲求x值何時△A' B' C' 面積有最大值，首先由三角不等式得 $\overline{A'C'}+\overline{B'C'}>\overline{A'B'}$ $(\overline{A'B'}=\overline{B'C'}=\frac{2\ell\ (2k+2x)}{2}=\ell-k-x)\rightarrow 2(\ell-k-x)\geqq(x+k)$

$\rightarrow x<\frac{\ell-2k}{2}$，又 $\because$ x爲0時A和A' 合，B和B' 重合 $\therefore x\geqq 0$

即得 $0\leqq x<\frac{\ell-2k}{2}$。

ㄇ△A' B' C' 面積由海龍公式可得

$\triangle=\sqrt{\ell\cdot[\ell-(\ell-k-x)][\ell-(\ell-k-x)][\ell-(2k+2x)]}$

$=\sqrt{\ell(x+k)^2(\ell-2k-2x)}$

令$f(x)=\ell(x+k)(\ell-2k-2x)$　$f''(x)=2\ell(x+k)(\ell-3k-3x)$

$f''(x)=2\ell(\ell-6k-6x)$

當$f'(x)=0\rightarrow x=-k$或$x=\dfrac{\ell-3k}{3}$

又$f''(-k)=2\ell(\ell-6k+6x)=2\ell^2>0$，$f''(\dfrac{\ell-3k}{3})=2\ell(\ell-6k-6\cdot\dfrac{\ell-3k}{3})=-2\ell^2<0$

可知$x=-k$時有極小值，$x=\dfrac{\ell-3k}{3}$時有極大值（$\because 4k<2\ell<6k$

$\therefore -k<\dfrac{\ell-3k}{3}<0<\dfrac{\ell-2k}{3}$）得函數圖形（如圖2－2）

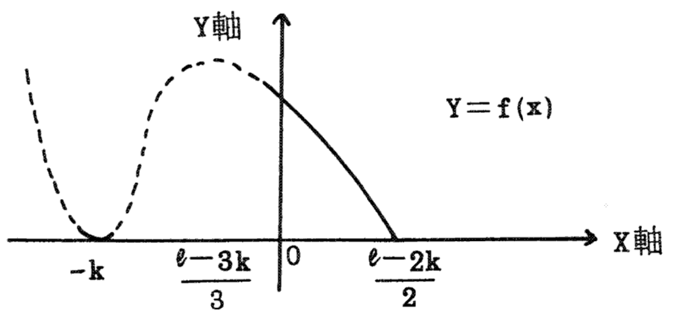


圖2-2

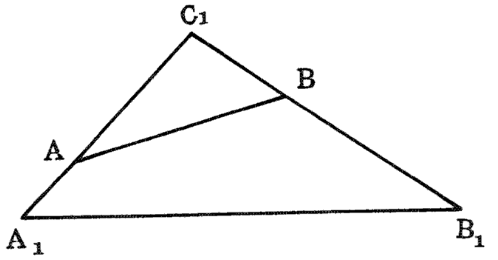
故當$0\leqq x<\dfrac{\ell-2k}{2}$範圍內$x=0$有最大值，即△A' B' C' 之最大面積爲$\sqrt{\ell\cdot k^2(\ell-2k)}$

由討論之結果可得定理一：若周長固定，且A、B二點在所求三角形之同一邊上，則最大面積發生於以A、B爲底邊之兩端點所圍出的等腰三角形。

⑵討論所給定的二定點A、B分別位在所求三角形之二邊。

設△A' B' C' 包含$\overline{AB}$符合上述條件，則$\triangle A_1B_1C_1$中必有一邊大於$\overline{AB}$。又設$\overline{A_1B_1}>\overline{AB}$而不失一般性；如此以$\overline{A_1B_1}$爲底邊所成之定周長三角形中，由引理4可推得以$\overline{A_1B_1}$爲底邊之等腰三角形面積最大，即$\triangle A_1B_1C'$之面積>$\triangle A_1B_1C_1$之面積（其中$\overline{A_1C'}=\overline{B_1C'}$）。如圖2－3，2－4

圖2-3



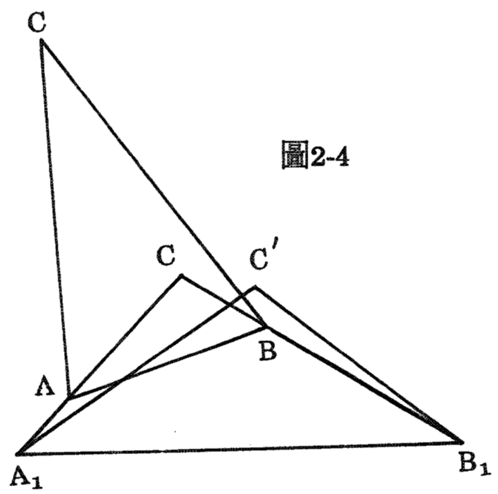


圖2-4

$\because \overline{A_1B_1}>2k$，故由定理一得以$\overline{AB}$爲底的等腰三角形面積最大，即△ABC之面積

＞$\triangle A_1B_1C'$ 之面積＞$\triangle A_1B_1C_1$之面積。

⑶討論至少有一點在所求三角形之內部。

所給的二定點至少有一點在三角形內部，則稍加移動三角形形成(2)的結果，如此亦可得同一結論。

3. 第(c)部份$6k \leqq 2\ell$

因$6k \leqq 2\ell$，故如此的周長必可圍成一正三角形句含A、B二定點，又由引理1可推得正三角形面積最大。

㈢探討給一定周長包含三定點所圍三角形最大面積問題：

在不失一般性情況下給一周長2ℓ，三定點A、B、C，其中$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=2k$，令$\overline{AB}=2C$，$\overline{BC}=2a$，$\overline{AC}=2b$，且$a \geqq b \geqq c$，又三角形中三內角爲$\alpha \geqq \beta \geqq r$。

1. 首先當$2\ell < 2k$（即周長小於三定點的距離和）則無法圍三角形。

2. 其次討論給定的已知三點圍成正三角形所需的最小周長值。

⑴討論任給的三點共線：因三點共線，討論如同二定點。

⑵討論任給的三點，有二點在三角形的同一邊上，另一點在三角形的另一邊上：

ㄅ第二大角$\beta > 60°$，即$\alpha > \beta > 60° > r$：

則由圖形3－1，只能於$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CA}$上作出以$\overline{CE}$，$\overline{FC}$，$\overline{CD}$爲邊之正三角形，故有下列三種狀況

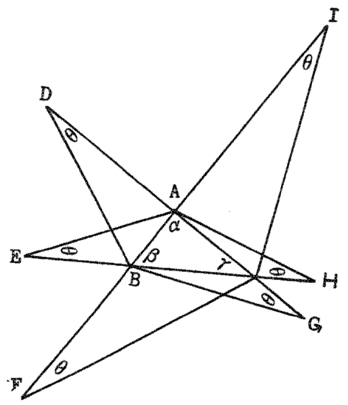
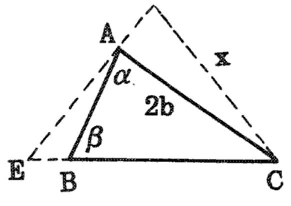


圖3-1

(ㄅ) (s_1)

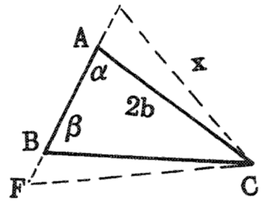


$$\frac{2b}{\sin 60°}=\frac{x}{\sin(60°+r)}$$

$$x=\frac{4b}{\sqrt{3}}\sin(60°+r)$$

故周長$=4\sqrt{3}\,b\sin(60°+r)$

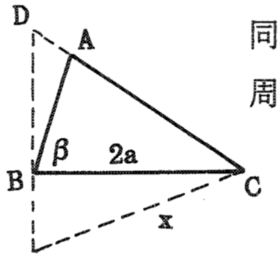
(ㄆ) (S_2)



同理得

周長$=4\sqrt{3}\,b\sin\alpha$

(ㄇ)(S_3)



同理得

周長$=4\sqrt{3}\,a\sin(60^\circ+r)$

又$s_3-s_1=4\sqrt{3}\sin(60^\circ+\gamma)(a-b)>0$ $\therefore s_3>s_1$(即取較小周長s_1)

$$s_1-s_2=4\sqrt{3}b(\cos\frac{60^\circ+\gamma+\alpha}{2}\cdot\sin\frac{60^\circ+\gamma-\alpha}{2})$$

得$\alpha\geqq 60^\circ+\gamma$時，$s_1\leqq s_2$(取最小周長值)。

$\alpha<60^\circ+\gamma$時，$s_1>s_2$ (取s_2之值爲最小周長值)。

ㄆ.當第二大角$\beta=60^\circ$：

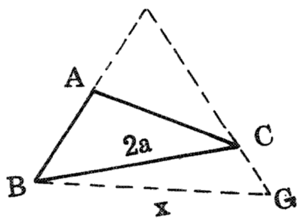
則以$\overline{BC}$爲邊之正三角形，得周長爲6a。

ㄇ.第二大角$\beta<60^\circ$時，即$\alpha>60^\circ>\beta>\gamma$：

則由圖3－1可知只能於$\overline{BA}$，$\overline{CA}$上作出以$\overline{BI}$，$\overline{CD}$爲邊之正三角形，故有下列二種情形。

(ㄅ)

(S_1)

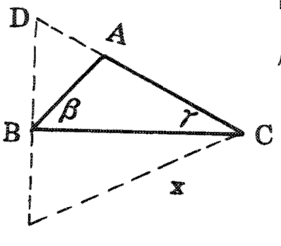


$$\frac{x}{\sin(60^\circ+\beta)}=\frac{2a}{\sin 60^\circ}$$

$$x=\frac{4}{\sqrt{3}}\,a\sin(60^\circ+\beta)$$

周長$=4\sqrt{3}\,a\sin(60^\circ+\beta)$

(ㄆ)(S_2)



同理得

周長$=4\sqrt{3}\,a\sin(60^\circ+\gamma)$

$$\text{又}s_1-s_2=4\sqrt{3}\,a(2\cos\frac{120^\circ+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2})$$

得$\beta+\gamma\geqq 60^\circ\rightarrow\alpha\leqq 120^\circ$時，$s_1\leqq s_2$ (取最小周長值)

$\beta+\gamma<60^\circ\rightarrow\alpha>120^\circ$時，$s_1>s_2$ (取s_2之值爲最小周長值)。

⑶討論任給三點分別在三角形的三邊：

ㄅ $\alpha\leqq 120^\circ$，不失一般性，只需討論下列情況：

$\angle BO_1A<\angle EO_1A<180^\circ$，$\therefore\overline{EA}>\overline{BA}$

$\angle AO_2D < \angle AO_2F < 180^\circ$ ，$\therefore \overline{AF} > \overline{AD}$

$\therefore \overline{EF} > \overline{BD}$（其$\overline{EF}$，$\overline{BD}$為兩正三角形之邊長）

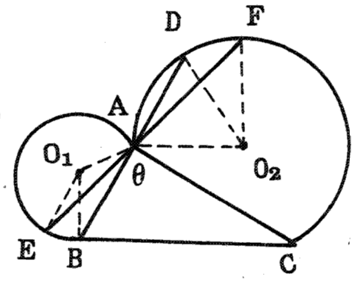


圖3-2

夊 $\alpha > 120^\circ$

令R_1為圓O_1之半徑，R_2為圓O_2之半徑，且$\overline{CD} < \overline{BE}$(由⑵之討論可得）

故只需證$\overline{FG} > \overline{CD}$ $=$ $\overline{AG} - \overline{AC} > \overline{AD} - \overline{AF}$

$$\because \frac{\overline{AC}}{\sin 60^\circ} = \frac{\overline{AG}}{\sin(\theta + 60^\circ)} = 2R_1 = k_1，$$

$$\frac{\overline{AD}}{\sin(\alpha - 60^\circ)} = \frac{\overline{AF}}{\sin(240^\circ - \alpha - \theta)} = 2R_2 = k_2$$

$\therefore \overline{AG} - \overline{AC} = 2k_1 \cos\frac{\theta + 120^\circ}{2} \sin\frac{\theta}{2}$ ，$\overline{AD} - \overline{AF} = +2k_2 \cos\left(240^\circ - \alpha - \frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\frac{\theta}{2}$

又$\left(240^\circ - \alpha - \frac{\theta}{2}\right) - \frac{\theta + 120^\circ}{2} = 180^\circ - (\alpha + \theta) > 0$

$\therefore 120^\circ > 240^\circ - \alpha - \frac{\theta}{2} > \frac{\theta + 120^\circ}{2}$

即 $\cos\left(240^\circ - \alpha - \frac{\theta}{2}\right) < \cos\frac{\theta + 120^\circ}{2}$

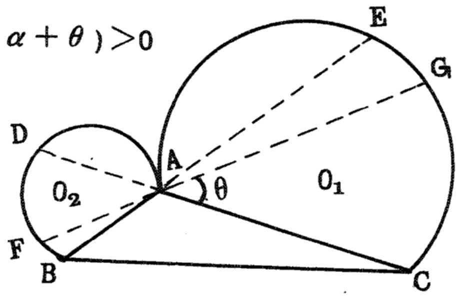


圖3-3

又 $\frac{\theta + 120^\circ}{2} < 90^\circ = \cos\frac{\theta + 120^\circ}{2} > 0$，且$\because$ $R_1 > R_2$ $\therefore k_1 > k_2$

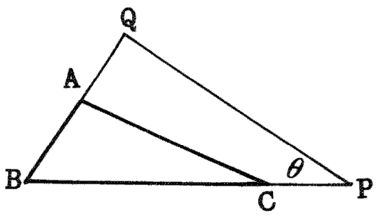
$\therefore \overline{AG} - \overline{AC} > \overline{AD} - \overline{AF} \Rightarrow \overline{FG} > \overline{CD}$

3.討論$2\ell > 2k$且無法包含三點圍正三角形所成三角形之最大面積：

⑴探討任給三點，二點在三角形之一邊上，另一點在三角形的另一邊上。

首先在$\overrightarrow{BC}$上取一點P，在$\overrightarrow{BA}$上取一點Q使△BAQ之周長為2ℓ，令∠BPQ=O（如圖3－4），而此種三角形有三種（因每固定一角即有一種三角形）。

圖3-4



接著求出分別以α、β、r為頂角之最小等腰三角形周長值。（如圖3－5）

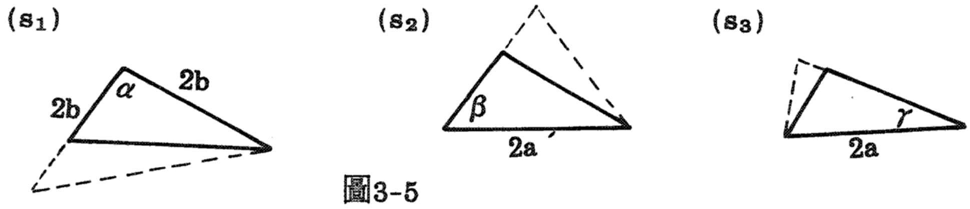


圖3-5

$S_1=4b+4b\ \sin\frac{\alpha}{2}$，$s_2=4a+4a\ \sin\frac{\beta}{2}$

$s_3=4a+4a\ \sin\frac{\gamma}{2}$

因s_1，s_2，s_3之大小無法直接比較，藉電腦的幫助得其大小關係有六種情形。又若所給周長可以α角作等腰三角形，則由引理5可知此種三角形面積最大，若所給周長小於s_1，則以圖3－6之情形最大（其中AD＜AC）。

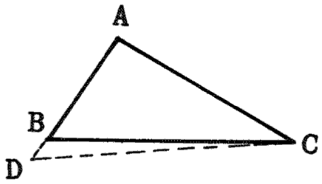


圖3-6

ㄅ求周長為2ℓ時，分別以α、β、γ為頂角無法圍等腰三角形之最大面積。

圖3－6中，由引理5可得$\overline{AD}=\dfrac{\ell-(\ell-2b)}{\ell-(1+\cos\alpha)b}$，

又$\triangle\alpha N=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AC}\sin\alpha=\dfrac{\ell-b(\ell-2b)}{\ell-(1+\cos\alpha)b}\cdot\sin\alpha$

同理$\triangle\beta N=\dfrac{\ell\cdot a(\ell-2a)}{\ell-(1+\cos\beta)a}\cdot\sin\beta$；$\triangle\gamma N=\dfrac{\ell\cdot a(\ell-2a)}{\ell-(1+\cos r)a}\cdot\sin\gamma$

ㄆ求周長為2ℓ時，分別以α、β、γ為頂角可圍成等腰之最大面積。由引理5

可得$\triangle\alpha Y=\ell^2\cdot\tan\dfrac{\alpha}{2}\cdot\tan^2(\dfrac{\pi-\alpha}{4})$；$\triangle\beta Y=\ell^2\cdot\tan\dfrac{\beta}{2}\cdot\tan^2(\dfrac{\pi-\beta}{4})$；

$\triangle\gamma Y=\ell^2\cdot\tan\dfrac{\gamma}{2}\cdot\tan^2(\dfrac{\pi-\gamma}{4})$，又由引理6可知$\triangle\beta Y$最大（因$\beta$最接近60°）。

ㄇ令$s_3<s_1<s_2$，而求其每一區間之最大面積。

(ㄅ)當$2\ell<s_3$，即皆無法以三頂角作等腰三角形：

首先證$\triangle\beta N$，$\triangle\alpha N$之大小，

$$\triangle\beta N-\triangle\gamma N=\frac{ab\ell r(\ell-2a)}{\ell-(1+\cos\beta)a}-\frac{ab\ell r(\ell-2b)}{\ell-(1+\cos\alpha)b}$$

(其中 $\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}=\frac{1}{2R}=\gamma$)

$\rightarrow\frac{1}{\triangle\beta N}-\frac{1}{\triangle\gamma N}=\frac{1}{ab\ell\gamma}\left[\frac{\ell-(1+\cos\beta)a}{\ell-2a}-\frac{\ell-(1+\cos\alpha)b}{1-2b}\right]$

$=\frac{[\ell-(1+\cos\beta)a]\ (\ell-2b)-[\ell-(1+\cos\alpha)b](\ell-2a)}{ab\ell r(\ell-2a)(\ell-2b)}$

僅討論分子→ $\ell(a-b)+\ell\ (b\ \cos\alpha-a\ \cos\beta)-2ab(\cos\alpha-\cos\beta)$

$=\ell(a-\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot a)+\ell\ (\frac{\sin\beta\ \cos\alpha}{\sin\alpha}-a-a\ \cos\beta)+2a\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot a(\cos$
$\beta-\cos\alpha)$

$=\frac{a}{\sin\alpha}$ 〔 $\ell\cdot(\sin\alpha-\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta+\sin\beta\cos\alpha)+2a^2\sin\beta$
$(\cos\beta-\cos\alpha)$]....①

討論 $\sin\alpha\ (1-\cos\beta)-\sin\beta\ (1-\cos\alpha)\rightarrow\sin^2\alpha\ (1-\cos\beta)^2-\sin^2$
$\beta\ (1-\cos\alpha)^2$

$=-2(\cos\beta-\cos\alpha)(\cos\alpha-1)(\cos\beta-1)<0$

又①式得 $-2a\cdot\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\sin\alpha}[\ell(\cos\alpha-1)(\cos\beta-1)-a\sin\beta]$

若 $2\ \ell=2k$ 則 $\frac{1}{\triangle\beta N}=\frac{1}{\triangle\alpha N}$ 即①式爲0→ $\ell\cdot(\cos\alpha-1)(\cos\beta-1)$
$=a\ \sin\beta$ (其中 $a\ \sin\beta$ 爲定値)

若 $2\ell>2k$ 則 $\ell\ (\cos\alpha-1)(\cos\beta-1)>a\ \sin\beta$ ，即上式 <0 ，

則 $\frac{1}{\triangle\beta N}<\frac{1}{\triangle\alpha N}$ $\therefore\triangle\beta N>\triangle\alpha N$

其次證 $\triangle\beta N$ 、 $\triangle\gamma N$ 之大小，

$\triangle\beta N-\triangle\gamma N=\frac{ab\ell r(\ell-2a)}{\ell-(1+\cos\beta)a}-\frac{ac\ell r(\ell-2a)}{\ell-(1+\cos r)a}\rightarrow\frac{1}{\triangle\beta N}-\frac{1}{\triangle rN}$

$=\frac{1}{abr(\ell-2a)}\left[\frac{\ell-(1+\cos\beta)a}{b}-\frac{\ell-(1+\cos r)a}{c}\right]$

$=\frac{c\cdot[\ell-(1+\cos\beta)a]-b[\ell-(1+\cos r)a]}{a\ell\gamma\cdot(\ell-2a)bc}$

僅討論分子→ $\ell\cdot(c-b)-a\cdot(c-b)-a(c\ \cos\beta-b\ \cos r)$

$=(\ell-a)(c-b)-a(c\ \cos\beta-b\ \cos r)$ (由投影定理 $a=b\ \cos r+c\ \cos$
β)

$=(\ell-a)(c-b)-c^2\cos^2\beta+b^2\cdot\cos^2 r<(b+c)(c-b)+b^2\cos^2 r-c^2$

$\cos^2\beta$

$=(c\ \sin\beta-b\ \sin r)\cdot(c\ \sin\beta+b\ \sin r)=0$，即分子$<0$

$\rightarrow\dfrac{1}{\triangle\beta N}-\dfrac{1}{\triangle\gamma N}<0\triangle.\therefore\triangle\beta N>\triangle\gamma N$，故綜合所得$\triangle\beta N$最大

(ㄆ)$s_3<2\ell<s_1$，即無法以α、β作等腰三角形而γ可以：由(ㄅ)知$\triangle\beta N>\triangle\alpha N$，故只需證$\triangle\beta N$，$\triangle\gamma Y$，當$2\ell=s_3$，即$\triangle'\beta N>\triangle'\gamma N=\triangle'\gamma Y$（$\because$此時$\triangle'\gamma Y$為$\triangle'\gamma N$之一例，而$\triangle\beta' N$，$\triangle'\gamma N$，$\triangle'\gamma Y$為周長為$s_3$時）。

又$2\ell>s3$時，$\dfrac{4\ell^2}{{s_3}^2}\triangle\beta' N>\dfrac{4\ell^2}{{s_3}^2}\triangle'\gamma Y=\triangle\gamma Y$，又所有無法圍成等腰三角形之情形以圖3-6之情形最大，故以$\triangle\beta N$為最大。

(ㄇ)$s_1<2\ell<s_2$，即無法以α作等腰三角形，而β、γ可以：$\because\triangle\beta Y$為所有可成等腰及不可成等腰三角形之最大情況，故此區間中以$\triangle\beta Y$為最大。

而其餘五種s_1，s_2，s_3之大小關係的各區間存在的最大面積均可以上法討論，故可得下表：

大小 / 最大面積 / 區間	VI III II I 2k s_3 s_2 s_1 正△	VI III II I 2k s_3 s_1 s_2 正△	VI III II I 2k s_1 s_3 s_2 正△	III IIs_1 I 2k s_3 s_2 正△	III IIs_2 I 2k s_y s_3 正△	II I 2k $s_1=s_2=s_3$ 正△
I	$\triangle\beta Y$	$\triangle\beta Y$	$\triangle\beta Y$	$\triangle\beta Y$	$\triangle\beta Y$	$\triangle\beta Y$
II	$\triangle\beta Y$	$\triangle\beta N$	$\triangle\beta N$	$\triangle\beta N$	$\triangle\beta N$	$\triangle\beta N$
III	$\triangle\beta N$	$\triangle\beta N$	$\triangle\beta N$	$\triangle\beta N$	$\triangle\beta N$	
VI	$\triangle\beta N$	$\triangle\beta N$	$\triangle\beta N$			

(令上列表格所得之三角形為△1)

最後我們討論在$\overrightarrow{PQ}$上取一點D，在$\overrightarrow{CB}$上取一點E，使D、A、E三點共線，且△PDE之周長為2ℓ，又由引理8.可知此種三角形必唯一。（如圖3－7）

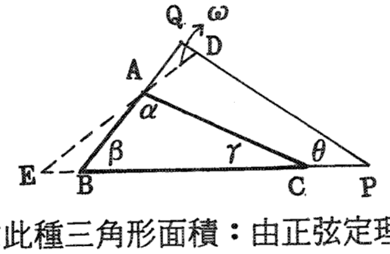


圖3-7

求此種三角形面積：由正弦定理

得$\dfrac{2C}{\sin(\omega-\theta)}=\dfrac{\overline{BE}}{\sin(\beta+\theta-\omega)}=\dfrac{\overline{AE}}{\sin\beta}$，$\dfrac{\gamma}{\sin\omega}=\dfrac{\overline{QD}}{\sin(\beta+\theta-\omega)}$

$$=\frac{\overline{CD}}{\sin(\beta+\theta)}$$

又$\overline{ED}+\overline{BE}=\overline{AE}+\overline{AD}+\overline{BE}=\overline{QD}+\overline{QB}$，其中$\overline{QB}=t$，$\overline{QA}=\gamma$

得$$\frac{2c\sin\beta}{\sin(\omega-\theta)}+r\cdot\frac{\sin(\beta+\theta)}{\sin\omega}+2c\cdot\frac{\sin(\beta+\theta-\omega)}{\sin(\omega-\theta)}$$

$$=\gamma\cdot\frac{\sin(\beta+\theta-\omega)}{\sin\omega}+t$$

$$\rightarrow 2c\cdot\frac{\sin\beta+\sin(\beta+\theta-\omega)}{\sin(\omega-\theta)}-\frac{\sin(\beta+\theta)-\sin(\beta+\theta-\omega)}{\sin\omega}$$

$$=t\ (\frac{\sin(\beta+\theta-\omega)}{\sin\omega}-\frac{\sin(\beta+\theta)}{\sin\omega}+1)$$

$$\rightarrow 2c[\sin(\beta+\frac{\theta}{2}-\frac{\omega}{2})]\cos\frac{\omega}{2}-\sin(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{2})\cos(\beta+\theta-\frac{\omega}{2})]$$

$$=2\cdot t\cdot\sin(\frac{\beta}{2}+\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\beta}{2}+\frac{\theta}{2}-\frac{\omega}{2})$$

$$\rightarrow 2c\ \cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin(\beta+\theta-\omega)$$

$$=2t\ \sin(\frac{\beta}{2}+\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\beta}{2}+\frac{\theta}{2}-\frac{\omega}{2})\sin(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{2})$$

$$\rightarrow 2c\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{2})$$

$$=\sin(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{2})[t\sin(\frac{\beta}{2}+\frac{\theta}{2})-2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\omega}{2})]$$

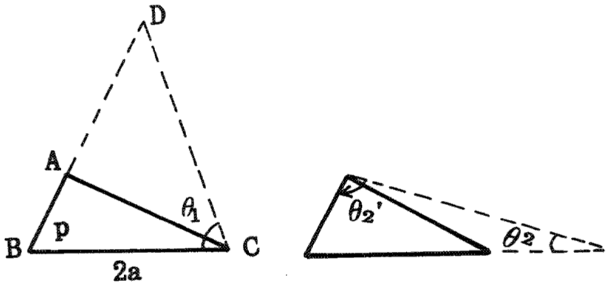
$$\rightarrow\cot(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{2})=\frac{t\cdot\sin(\frac{\beta}{2}+\frac{\theta}{2})-2c\ \cos\frac{\beta}{2}\ \sin\frac{\theta}{2}}{2c\cdot\cos\frac{\beta}{2}\ \cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{t}{2c}\ \tan\frac{\beta}{2}+\frac{t}{2c}\ \tan\ \frac{\theta}{2}-\tan\frac{\beta}{2}=k$$

$$\cot\omega\frac{\omega}{2}=\cot\ (\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2})=\frac{\cot(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{2})\cdot\cot\frac{\theta}{2}-1}{\cot(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{2})+\cot\frac{\theta}{2}}=\frac{k-x}{kx-1}$$

(其中$\tan\frac{\beta}{2}=x$)

又令$\tan\frac{\beta}{2}=P$，則$t=\frac{x\cdot\ell\cdot(1+p^2)}{x+P}$ $\quad\therefore k=\frac{x\cdot\ell\cdot(1+p^2)}{2c}-P$



由引理7得三角形面積爲$\ell^2\cdot\tan\frac{\theta}{2}\cdot\tan(\frac{\pi-\omega}{2})\cdot\tan(\frac{\omega-\theta}{2})$

$=\ell^2\cdot\frac{1}{k}\cdot x\cdot\frac{k-x}{kx+1}=\ell^2\cdot\frac{xk-x^2}{k^2x+k}=\triangle_2$

再求x之範圍：如圖3－8，Q_1，Q_2爲Q之最大和最小值，則由正弦定理得$\overline{BC}:\overline{DB}:\overline{DC}=\sin(\pi-\beta-Q_1):\sin Q_1:\sin\beta$，

則$\overline{BC}=\frac{\sin(\beta+Q_1)}{\sin(\beta+Q_1)+\sin\beta+\sin Q_1}\cdot 2\ell$

$=\frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\theta_1}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\theta_1}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\theta_1}{2}}\cdot\ell=(1-\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\theta_1}{2})\ell=2a$

$=\tan\frac{\theta_1}{2}=(1-\frac{2a}{\ell})\cot\frac{\beta}{2}=\frac{\ell-2a}{\ell p}$

又由上可知$\tan\frac{\theta'_2}{2}=(1-\frac{2c}{\ell})\cdot\cot\frac{\beta}{2}$，

則$\tan\frac{\theta_2}{2}=\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}-\frac{Q'_2}{2})$

$=\frac{2c\cdot\tan\frac{\beta}{2}}{\ell\cdot\tan^2\frac{\beta}{2}+(\ell-2c)}=\frac{2cp}{\ell p^2+(\ell-2c)}$，故$\frac{2cp}{\ell p^2+(\ell-2c)}<x<\frac{\ell-2a}{\ell p}$

因$\triangle_2$之値無法求最大値，故利用電腦求此値。又每固定一角即有兩個此種面積，（如圖3－9）故共有六個此種三角形，籍求電腦求出六個中之最大値$\triangle_2$，再將$\triangle_1$，$\triangle_2$作比較，即可得最大三角形面積。

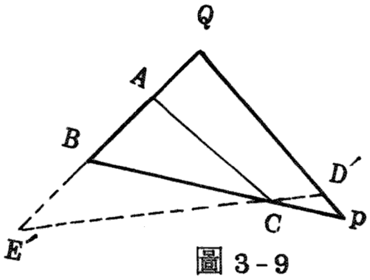


圖 3-9

⑵探討任給三點分別在三角形之三邊上及至少有一點在三角形內部之情形。

因此部份之作法相當困難，目前僅能用電腦找出此部份之最大值，希望能尋找出一個方法幫助我們求出最大面積。

五、討　　論

(一)本文的研究方法是先利用〞幾何直觀性的比較方法〞來處理有關於定周長包含二定點的問題，然後再嘗試嚴密地利用數學方式證明包含三定點的問題。

(二)我們首先著手討論許多相關性的定周長三角形面積問題，其次再利用各種已學過的數學方法（包含幾何，解析幾何，代數，三角函數微分等），嘗試加以嚴密證明八個重要的相關引理。

(三)在討論的過程中，我們先利用幾何作圖探討了許多不同的狀況，由於推測例子過少，因此便想使用電腦做爲研究方向上的參考，藉助電腦的幫助，解決許多繁冗的面積數值計算及大量的模擬測試，並以此導引研究理論的發展過程，由於電腦高效率的計算，使得整個研究過程判斷及臆測的正確性及周全性大爲提高。

(四)在研究問題的過程中，我們儘可能提昇形成數學問題的能力，藉由一般化與特殊化的方法，從檢驗許多的特例，再從特例中臆測問題的部份結果。再將此結果加以驗證及推廣證明，再一步一步找到最後一般性，最佳之答案。

(五)定周長包含n定點所圍三角形最大面積（$n\geq 4$）。是極富思考的挑戰性問題，我們希望經過鍥而不捨的努力及反覆研究，能夠將本研究早日完成。

六、結　　論

(一)定周長包含二定點所圍三角形最大面積之結果如下:

若給二定點$A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$（令$\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=2k$）且給定周長爲$2\ell$，則

1. $2\ell\leq 4k$時，無法圍成三角形。

2. $4k<2\ell<6k$，則以$\overline{AB}$爲底邊所圍成的等腰三角形面積最大。此時三角形面積爲$\sqrt{\ell}$ $\sqrt{\ell k2(\ell-2k)}$

3. $6k\leq 2\ell$，則最大面積爲正三角形而面積爲$\frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{2\ell}{3})^2$

(二)定周長包含三定點所圍三角形最大面積之結果如下：

1. $2\ell<2k$時，無法形成正三角形。

2. 過三點能圍成正三角形的最小周長值如下表：

第二角大β	$\alpha\gamma$ 之關係	最小正三角形之周長值
$\beta > 60^\circ$	$\alpha \geqq 60^\circ + \gamma$	$4\sqrt{3}\ b\ \sin(60^\circ + \gamma)$
	$\alpha < 60^\circ + \gamma$	$4\sqrt{3}\ a\ \sin\beta$
$\beta = 60^\circ$	α，γ 無關	6a
$\beta < 60^\circ$	$\alpha \geqq 120^\circ$	$4\sqrt{3}\ a\ \sin(60^\circ + \gamma)$
	$\alpha > 120^\circ$	$4\sqrt{3}\ a\ \sin(60^\circ + \beta)$

3. 討論任給三點，二點在三角形的同一邊，另一點在三角形的另一邊上之步驟：

(1)給定三點求出其最小正三角形之周長。

(2)給定周長比較其與步驟一之大小。

(3)判別s_1，s_2，s大之大小關係並視所給周長位於那一個區間。

(4)求出此區間中最大三角形面積$\triangle_1$。

(5)藉由電腦求出$\triangle_2$之最大值。

(6)比較$\triangle_1$和$\triangle_2$之大小。

七、參考資料

(一)高中基礎數學統合下冊　師大科教中心

(三)微積分　陳昭地，顏啓麟等著協進圖書公司

(四)等周問題　諸明嘉、黃武雄編著　人間文化事業公司（民68年）

評語

這是一個很難妥善處理的問題必須分成很多狀況，而且還要提防考慮夠不夠週密，所以學生用電腦來指點研究得方向。在主要問題，即定點有了點的狀況中，作者作了嚴密的處理，對4點的狀況作者作了如何歸結爲三點狀況的考察，題目的確定有創意且有數學意義，是高中研究的良好典型。