天馬行空——象棋中馬的走法及其研究

高小組數學科第三名

苗栗縣信德國民小學　　作　　者：黃必超

指導教師：莊廣凱

一、研究動機

有一天，同學教我下棋，覺得馬走的方法很奇妙：它是走日字型的；但是也產生了一些問題：馬是不是能走到棋盤上的每一點？如果可以的話，那又要怎麼走呢？於是帶著棋盤，和老師一起研究。

二、研究目的

(一)馬是不是能從格子上一點走到任意的另一點？

(二)要找出馬到另一點的走法。

三、研究設備

方格紙、筆、粉筆、黑板、電腦、簽字筆、尺。

四、研究過程

(一)先訂出一個指出位置的工具——座標。

1. 將馬所在的格子稱作原點，寫作(O,O)
2. 將橫軸稱做 X 軸，直軸稱作 Y 軸，一個格子代表一個刻度，一個點在 X 軸上的刻度是△，在 Y 軸上的刻度是□，則將那點用（△，□）來表示。
3. X 軸在原點右邊是正的方向，Y 軸在原點上邊是正的方向，其餘的方向就是負的方向。

(二)用座標來分析馬走的途徑：

1. 將馬在原點上所有能走的方向畫出：（如圖一）可以看出有八種走法，每一步都有和它正好相反的走法。我們訂定 a、b、c、d 四種步法，而－a、－b、－c、－d 則代表與 a、b、c、d 相反的步法。
2. 可以發現走了一個 a 就等於 X 軸上座標加 2，Y 軸上加1。走了一個 b 就等於 X 軸上座標加 1，Y 軸上加 2。走了一個 c 就等於 X 軸上座標加－1，Y 軸上座標加 2。走了一個 d 就等於 X 軸上座標加－2，Y 軸上座標加

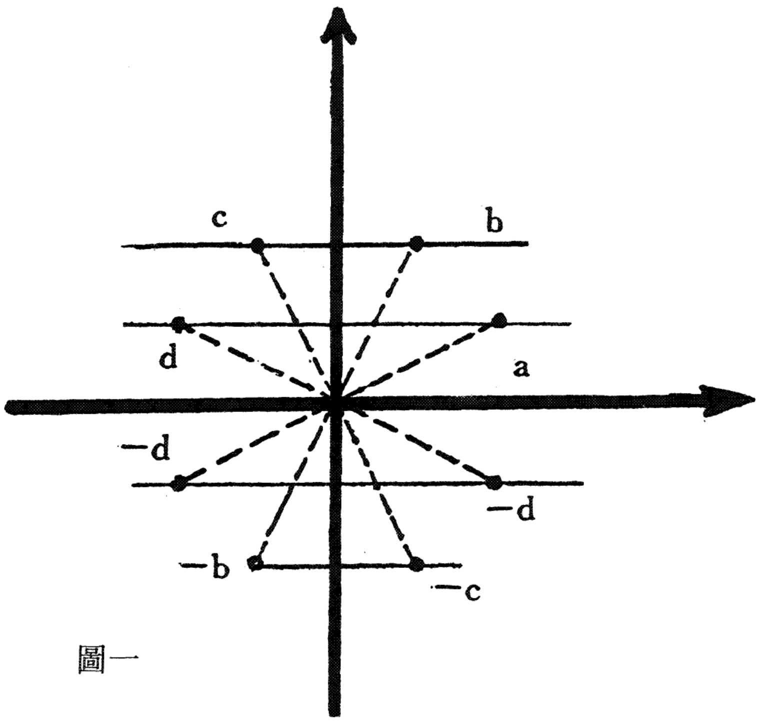
1。其餘類推。

3. 我們將用下面方式表示：

a＝(2、1)　　b＝(1、2)　　c＝(－1、2)

d＝(－2、1)　　－a＝(－2、－1)　　－b＝(－1、－2)

－c＝(1、－2)　　－d＝(2、－1)



圖一

㈢用 a、b、c、d 來表示馬走的途徑實在太複雜，試試看有沒有辦法用 a、b、c 代替 d：

1. 如果 a 走了甲次，b 走了乙次、c 走了丙次、d 走了丁次能走到（△，□）這點，可以用下列方法表示：

甲 a＋乙 b＋丙 C＋丁 d＝（△，□）

甲（2、1）＋乙(1、2)＋丙(－1、2)＋丁(－2、1)＝（△，□）

得：2 甲＋乙－丙－2 丁＝△

甲＋2 乙＋2 丙＋丁＝□

2. 上面的式子－a 用－1 乘 a 來表示，因爲他代表 a 的相反，乘號我們也省略了，這樣式子比較清楚明瞭。

3. 計算看看 a、b、c 可不可以代替 d。

甲 a＋乙 b＋丙 c＝（△，□）

甲(2、1)＋乙(1、2)＋丙(－1、2)＝(－2、1)

得 2 甲＋乙－丙＝－2……(1)式

甲＋2 乙＋2 丙＝1……(2)式

消去丙：5 甲＋4 乙＝－3……(1)式乘 2 加(1)式

找一組解：甲＝1，乙＝－2，代入(1)式，得　丙＝2

可以知道 a－2b＋2c 可以代替 d。

㈣證明馬可以走到任一點（△，□）：如果馬可以用 a、b、c、d 走到那一點，則 d 用 a、b、c 代替後，a、b、c 也可以到那一點；因此，我們祇需要證明 a、b、c 能走到任一點

1. 如果 a、b、c 能走到點（△，□）：

甲 a＋乙 b＋丙 c＝（△，□）

可以得到：2 甲＋乙－丙＝△……(3)式

甲＋2 乙＋2 丙＝□……(4)式

消去丙：5 甲＋4 乙＝2△＋□……(3)式乘 2 加(4)式

上面 2△＋□可能是任意數，假設它是○，則找出

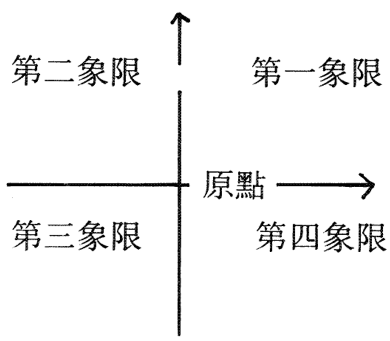
5 甲＋4 乙＝○ 的一組解：甲＝○　乙＝－○

所以5 甲＋4 乙對任何意數都有解，再由(3)式可以知道丙＝○－△

2. 任一點（△，□）可以用 2△＋□個 a，－2△－□個 b，△＋□個 c 到達。我們不但證明了 a、b、c 能到座標上任一點，也找出了一種到（△，□）的方法。

㈤上面的結果我們並不滿意，因爲沒有用到 d。如果用到 d 應該會使走的步驟減少，試著用另外一種方法找找看到（△，□）的方法：

1. 將座標分成四個象限（如圖二），並且固定原點，旋轉幾個 90 度之後，每個象限都可以轉到第Ⅰ象限；所以我們只討論第Ⅰ象限。



圖二

2. 在第一象限中，馬必需向右或向上走；因此只有 a、b 才是最省事的走法，其它的走法不是包括向下，就是含有向左的成份。

3. 看看 a、b是否能到第一象限中的點（△，□）：

甲 a＋乙 b＝（△，□）

甲（2、1）＋乙(1、2)＝（△，□）

2 甲＋乙＝x……(5)式

甲＋2乙＝y……(6)式

計算後得到：甲＝2（△－□）/3……(7)式

但是甲、乙應該都是整數，可是(7)式却有可能是分數。如果2△－□不是3 的倍數，則 甲 的解必定是個分數，那麼馬就不可能用 a、b 走到（△，□）這點。

老師指導我們用△÷3的餘數來討論(7)式：

(1)當△＝3 的倍數加 1 時，□必需等於 3 的倍數加 2。

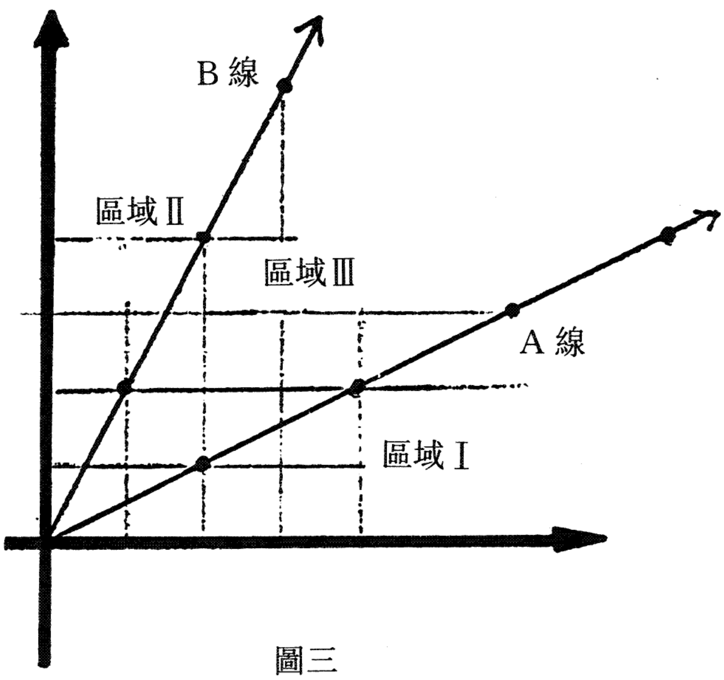
(2)當△＝3 的倍數加 2 時，□必需等於 3 的倍數加 1。

(3)當△＝3 的倍數時，□必需等於 3 的倍數。

也就是說□＋△等於 3 倍數時，(7)式剛好等於整數，所以用 a、b可以到達（△，□）這點。

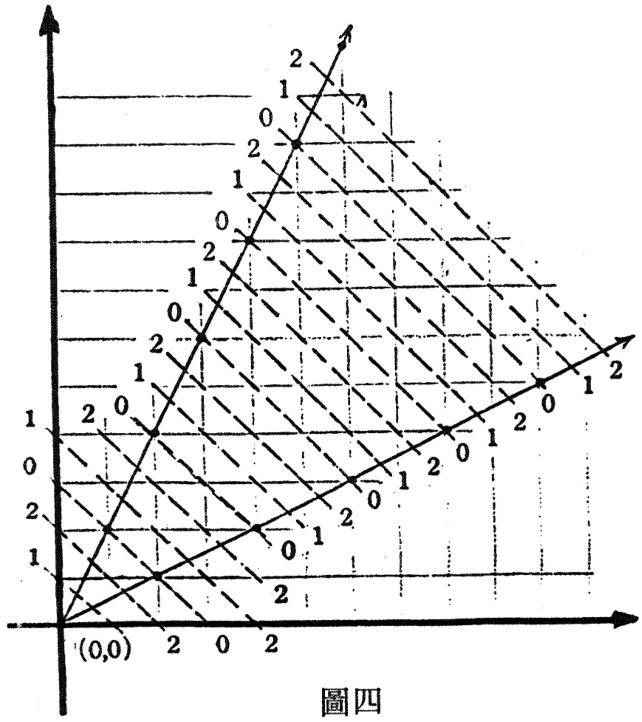
4. 在座標上我們將上面的結果劃出來：（圖三）

A 線表示只用 a 就可以到達的點。B 線表示只用 b 就可以到達的點，A、B 線分割了三個區域：只有區域Ⅲ的點才有可能用 a、b 到達。



圖三

圖四中，將點（△，□）裏△＋□ 除 3 的餘數用線連起來，我們叫它「餘數線」，餘 0 的叫 0 餘數線、餘 1 的叫 1 餘數線，餘 2 的叫 2 餘數線。



圖四

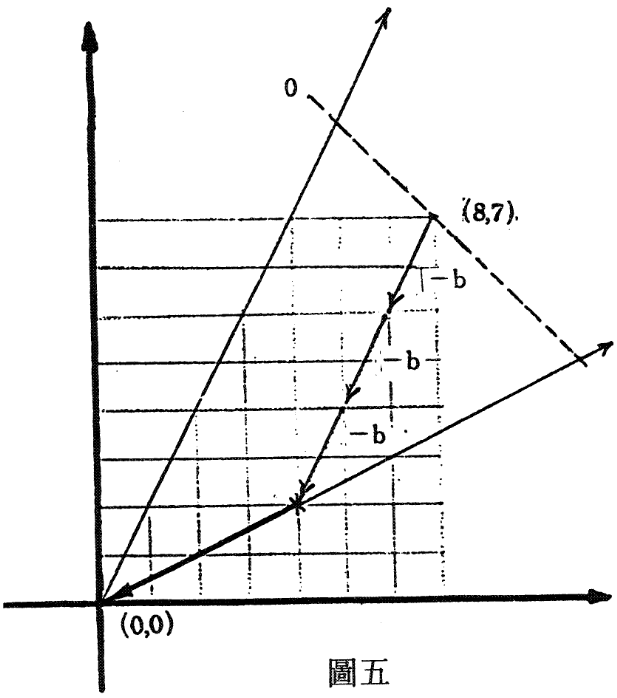
5. 找出區域Ⅲ中每一點的走法：

(1)若（△，□）被 3 整除。則沿著 −b 的方向劃一條線與 A 線相交，再沿著 A 線回到原點。（見圖五）

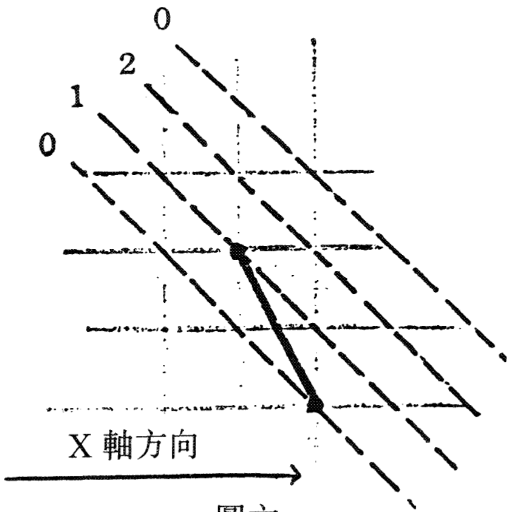
(2)若（△，□）在 1 餘數線上，則從圖六～圖八可以走到 0 餘數線上。

(3)若（△，□）在 2餘數線上，則從圖九～圖十一可以走到 0 餘數線上。

我們也發現了區域Ⅲ中每一點所需要的步數不會超過△＋□除 3 的商加 3。

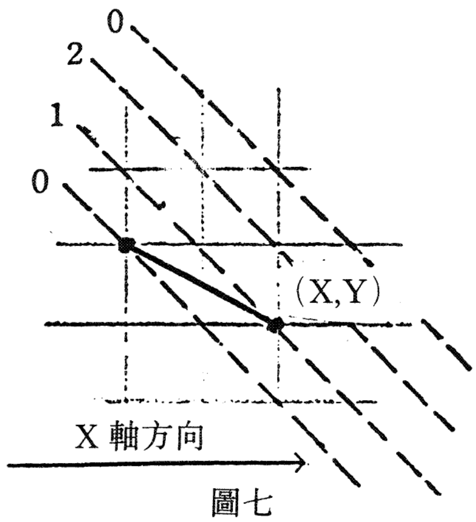


圖五



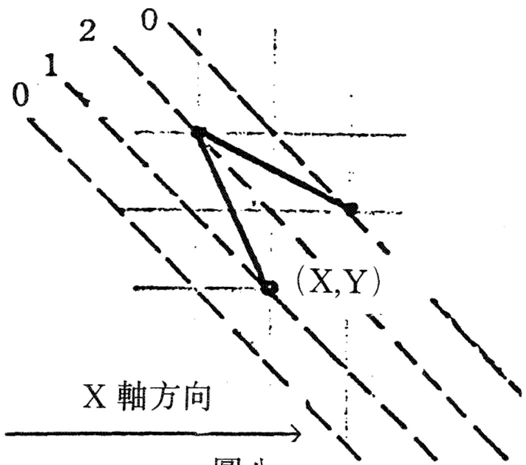
圖六

走一c步



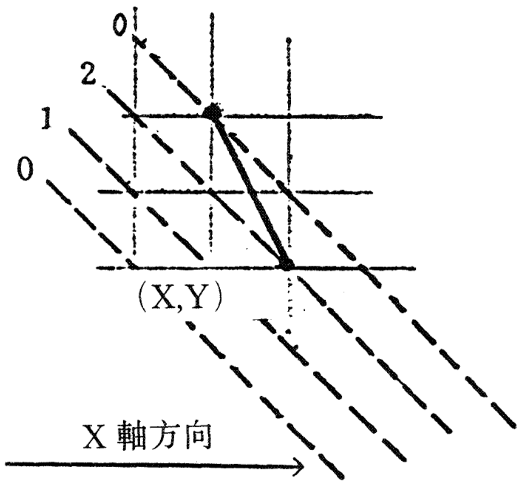
圖七

走d步



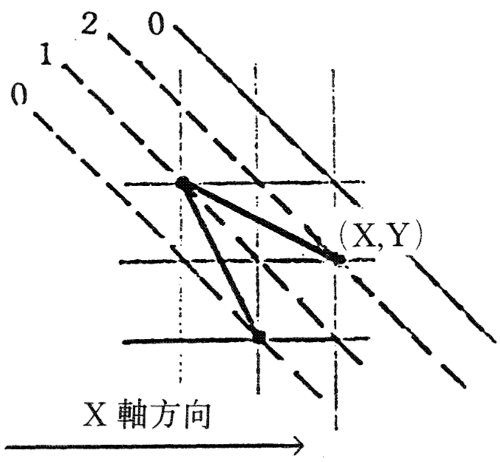
圖八

走c−d步



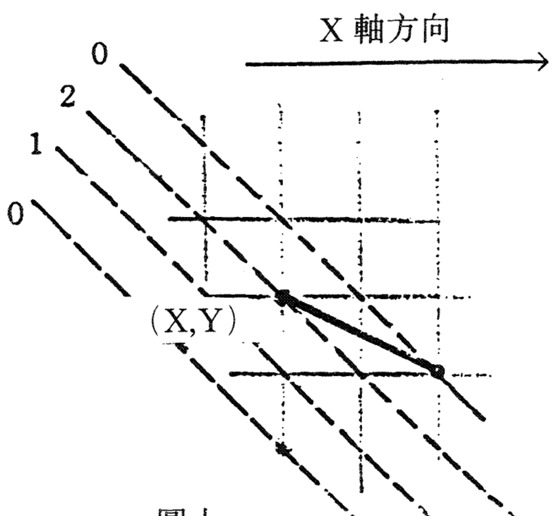
圖九

走c步



圖十

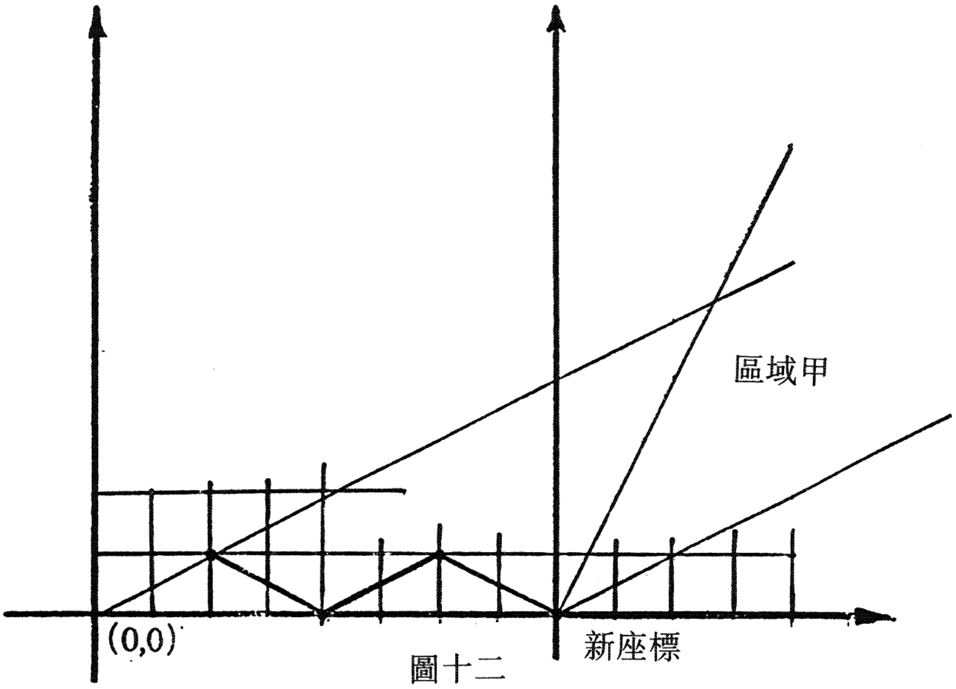
走d−c步



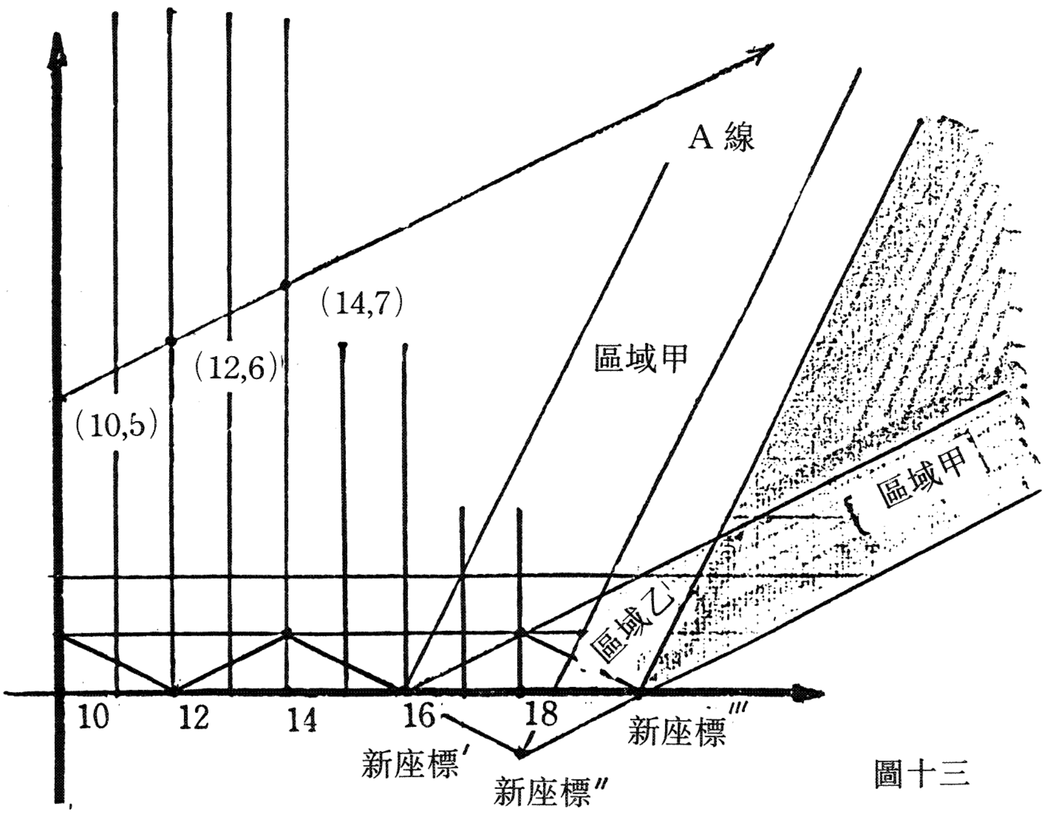
圖十一

走 −d步

6. 找出區域Ⅰ中每一點的走法：馬向右移動幾個 a－d，並以移動後的點作新座標的原點，則有些點會落入新座標的區域Ⅲ中，（圖十二的區域甲），剩下的點則可以用幾個 a－d 後，再加一個－d，使點落入新座標的區域Ⅲ中（圖十三的區域乙）。



圖十二



圖十三

7. 要找出區域Ⅱ的走法，可以用 b+c 的方法來模仿 6. 中的方式討論。

五、研究結論

㈠我們用座標來分析棋盤與馬走的路徑，發現可以用計算代替畫圖表示。

㈡這顯然和真正的棋盤不一樣，沒有一個棋盤是無限大的，至少有四個邊界的限制。

㈢在平面上的馬可以走到任意的格子上面，而且我們還找出兩種計算“怎麼走”的方法。

㈣經過了這次研究，我覺得去解決一個問題比知道答案還要難太多了。

評語

對一個小學生而言，有號有序對的加法運算和平面坐標的參照是相當難的，此生顯然瞭解這種運算的意義。表達能力不錯。