

填填看

高小組數學科第二名

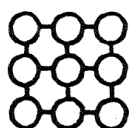
台北市龍山國民小學

作者：葉容君、駱彥宏

指導教師：江丕振、翁進勳

一、研究動機

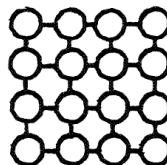
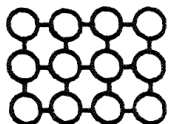
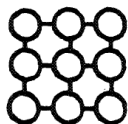
我們很喜歡做報紙上有關數學的益智題目。不過，答案大多亂猜的。有一次，我們看到一個題目如下方，心想：除了胡亂猜之外難道沒有其他的方法？是不是可以像課本上的題目一樣，把答案計算出來？從最簡單的 2 個正方形開始吧！不過我們的能力有限，只研討到 3 層正方形為止。



把 1 到 9 的數字填入左圖小圓圈中，使每一個小正方形 4 個數字的和都成為相等。

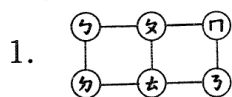
二、研究題目

- (一) 正方形只有 1 層時怎樣去找答案？
- (二) 正方形有 2 層時怎樣去找答案？3 層呢？
- (三) 有沒有比較簡單快速的方法？



三、研究經過與討論

(一) 1 層 2 個正方形： 使用數字：1~6



左圖： $(7+4) + 2+5 = 2+5 + (1+3)$ ， $2、5$

二數為兩個正方形共有，因此， $7+4 = 1+3$

2. 從 $ㄅ + ㄆ = ㄇ + ㄘ$ ，我們想出下面 3 種解答的方法：

◆第一種方法：

(1) 從 1 到 6 的數中找出 2 數的和相等的組合 2 個，分別填入 (ㄅ、ㄆ) 及 (ㄇ、ㄘ) 中。填的時候那一組填那一直行，那一數填上或填下都可以。

(2) 最後餘下的 2 數填入中間直行 (ㄊ、ㄋ) 中。

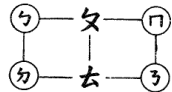
1—○—2	→	1—③—2	或	1—⑥—2
5—○—4		5—⑥—4		5—③—4

(3) 從 1 到 6 的數中取出 2 數和相等的組合 2 組時，和最大為 9，最小為 5，中間的 8、7、6 都可以應用。

◆第二種方法：

(1) 從 1 到 6 的數中找出奇、偶數各 1 個，填入中間直行 (ㄊ、ㄋ) 中。

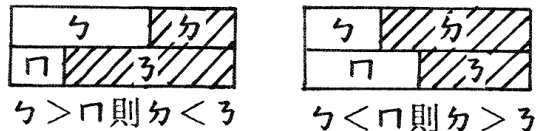
(2) 餘下 4 數拚成 2 數和相等的 2 組數，分別填入兩邊直行 (ㄅ、ㄆ) (ㄇ、ㄘ) 中。



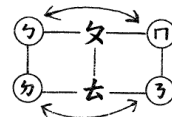
(3) 如果餘下 4 數不能拚成和相等的 2 組數，也就沒有答案。

◆第三種方法：

(1) 已知 $ㄅ + ㄆ = ㄇ + ㄘ$ ，因此 (ㄅ、ㄇ) 與 (ㄆ、ㄘ) 2 數的差也相等，同時大小關係相反。



(2) 根據這個道理，我們想出的解答步驟如下：



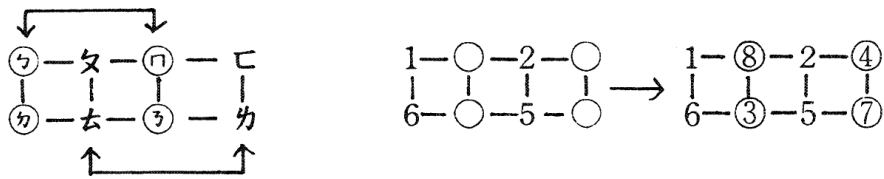
ㄅ · 從 1 到 6 數中找出 2 數差相等的組合 2 個，分別填入 (ㄅ、ㄇ) 及 (ㄆ、ㄘ) 中。那一組填 (ㄅ、ㄇ)，那一組填 (ㄆ、ㄘ) 都可以，但是要留意 $ㄅ$ $ㄇ$ 2 數與 $ㄆ$ $ㄘ$ 2 數的大小排列方向要相反。

ㄊ · 再把餘下 2 數填入 (ㄊ、ㄋ) 中便可以得到答案。

ㄇ · 1 到 6 的數中，2 數差最大為 5，但只能取 1 組；如果同時要取 2 組，差最大為 4，以下 3、2、1 都可以應用。


(二) 1 層 3 個正方形： 使用數字 1~8

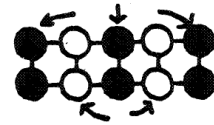
1. 小正方形 4 個數字的和都是 18。
2. 從前面的討論可以推知： $ㄅ + ㄆ = ㄇ + ㄊ$ ， $ㄋ + ㄌ = ㄍ + ㄎ$ 。因此，可以應用類似前面的第一種方法去求答案：



- (1) 從 1 到 8 的數中找出 2 數的和相等的組合 2 個，分別填入 (ㄅ、ㄆ) (ㄇ、ㄊ) 中，那一組先填都可以。
- (2) 餘下 4 數拚成 2 數的和相等的 2 組數，分別填入 (ㄋ、ㄌ) (ㄍ、ㄎ) 中。
- (3) 從 1 到 8 的數中取 2 數和相等的組合 2 組時，和最大為 13，最小為 5，中間的 12、11、9、8、7、6 都可以應用。
- (4) 如果餘下的 4 數不能拚成和相等的 2 組數，也就沒有沒有答案。

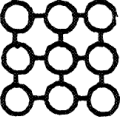
3. 又因為 $ㄅ + ㄆ = ㄇ + ㄊ$ ， $ㄋ + ㄌ = ㄍ + ㄎ$ ，也可以應用類似前面的第三種方法去找答案，不過麻煩些。

(三) 1 層 4 個正方形：  使用數字 1~10

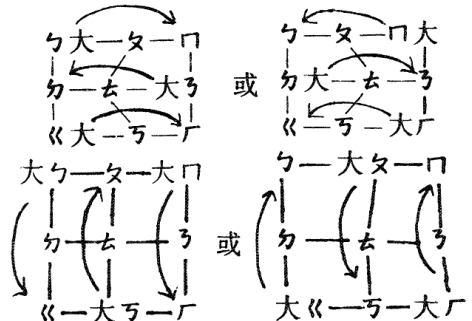


1. 前面的兩種方法都可以應用，不過第一種方法比較簡單：
 - (1) 從 1 到 10 的數中拚出 2 數和相等的組合 3 個，分別填入奇數直行中。
 - (2) 餘下 4 數拚成和相等的 2 組數，填入偶數直行中。
 - (3) 從 1 到 10 的數中找出 3 組 2 數和相等的組合時，和最大為 15，最小為 7，中間的奇數和 13、11、9 等都可以應用。

2. 正方形在 5 個以上時也可以應用第一種方法去求解答。

(四) 2 層 4 個正方形： 

1. 使用數字：1~9
2. 前面的第一、二兩種方法都不能應用，只能採用第三種方法。
3. 根據前面的討論，我們可以推知：

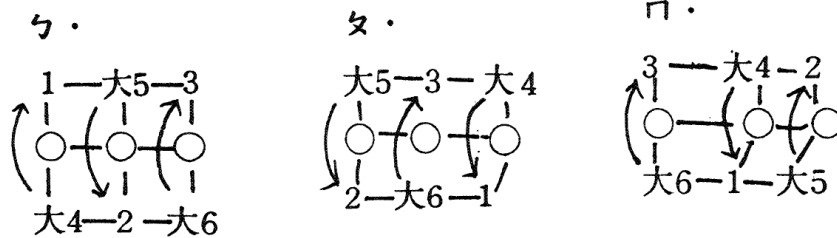
- (1) $\left\{ \begin{array}{l} \text{如果 } ㄅ > ㄇ, \text{ 則 } ㄆ < ㄊ \text{ 而 } ㄅ - ㄇ = ㄊ - ㄆ \\ \text{如果 } ㄅ < ㄇ, \text{ 則 } ㄆ > ㄊ \text{ 而 } ㄇ - ㄅ = ㄆ - ㄊ \end{array} \right.$

- (2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{如果 } ㄆ > ㄊ, \text{ 則 } ㄅ < ㄇ \text{ 而 } ㄆ - ㄊ = ㄇ - ㄅ \\ \text{如果 } ㄆ < ㄊ, \text{ 則 } ㄅ > ㄇ \text{ 而 } ㄊ - ㄆ = ㄅ - ㄇ \end{array} \right.$

4. 因此，解答的步驟如下：

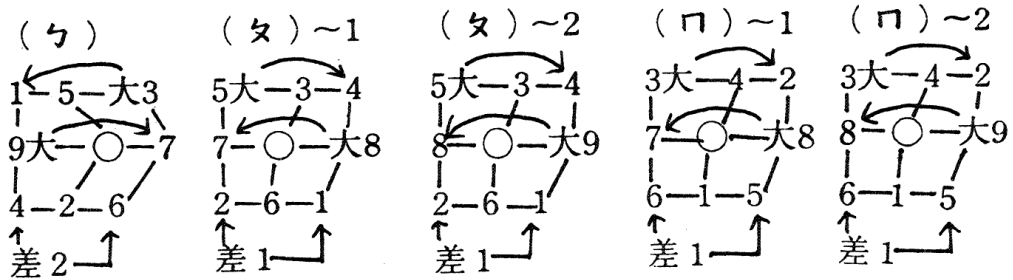
- (1) 從 1 到 9 的數中找出 2 數差相等的組合 3 個，分別填入 (ㄅ、ㄆ) (ㄇ、ㄊ)

、5) (11、7) 中。也可以填入 (4、11) (4、3) (8、7) 中。

譬如採用了差 3 的 (1、4) (2、5) (3、6) 等 3 組數時，如果只考慮兩端 2 數的差，有下面 3 種填法：

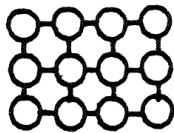


(2) 將餘下 3 數填入中橫行。填的時候要配合上下二行兩端 2 數的差以及大小關係。本題餘下 3 數為 7、8、9，差的組合有 1(7、8)，1(8、9)，2(7、9) 3 種；而前面 ㄅ、ㄆ、ㄇ 兩端 2 數的差異是 ㄅ~2、ㄆ~1、ㄇ~1；因此有如下的配合：



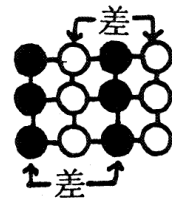
(3) 從 1 到 9 的數中取出 2 數差相等的 3 組數時，最大為 6，以下 5、4、3、2、1 都可以應用。

(五) 2 層 6 個正方形：



1. 使用數字：1~2

2. 大致上可以沿用前面的方法，不同的地方是：



(1) 差相同的組合要同時取 4 個，差最大是 8，以下到 1 都可以用。

(2) 將餘下 4 數填入中橫行時，第 1、3 直行 2 數的差，第 2、4 直行 2 數的差以及大小關係都要配合上下兩行。

ㄅ · 譬如取用了差 6 的 4 組數，(12、6)(11、5)(10、4)(9、3) 時，奇偶數直行間 2 數差的組合有：

(ㄅ) (6、4)(5、3)……差(2、2)

(ㄆ) (6、5)(4、3)……差(1、1)

(ㄇ) (6、3)(5、4)……差(3、1)

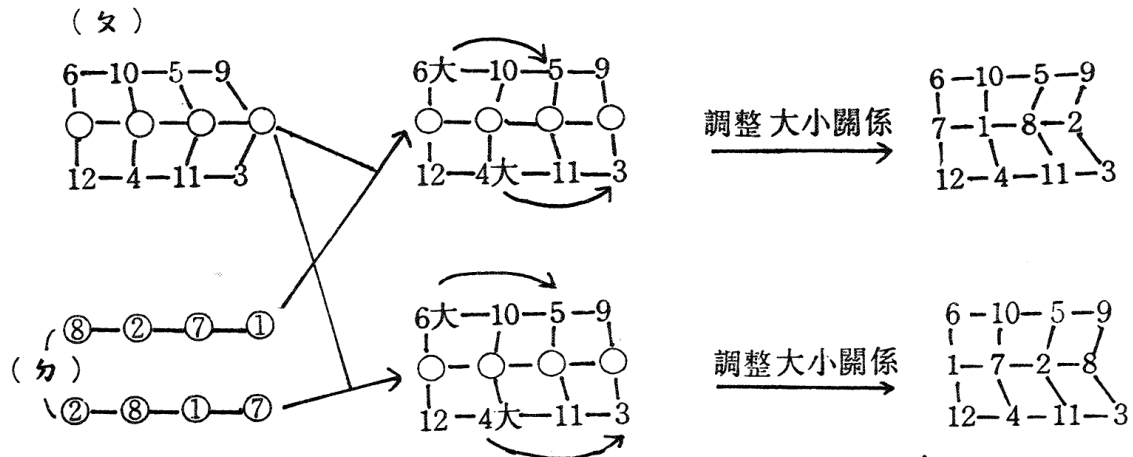
ㄆ · 餘下 4 數(1、2、7、8)的差的組合有：

(ㄉ) (8、7) (2、1) …… 差 (1、1)

(ㄊ) (8、2) (7、1) …… 差 (6、6)

(ㄊ) (8、1) (7、2) …… 差 (7、5)

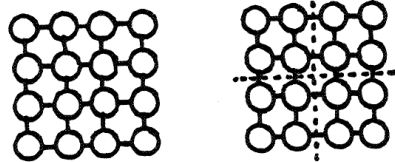
□ · 前面兩項差的組合中可以配合的只有差 (1、1) 一種，就是 (ㄊ) 與 (ㄉ)，答案如下：



(六) 3 層 9 個正方形：

1. 使用數字：1~16

2. 小正方形 4 個數字的和都是 34



3. 可應用類似前面的方法，12 以下的差都可以使用，組合非常多。不過，有不少的組合沒有答案。(差 12、8、4、2、1 等比較容易找出答案) 為避免填好之後才發現各行間的差數不合，可在填答之前先做一次“差的組合”的比較，看看那些組合可以彼此配合。舉例如下：

(1) 譬如第一次採用了 (16、4) (15、3) (14、2) (13、1) 等差為 12 的 4 組時，直行間的差的組合有下面 3 種：

A：(1、2) (3、4) …… 差 (1、1)

B：(1、3) (2、4) …… 差 (2、2)

C：(1、4) (2、3) …… 差 (1、3)

(2) 餘下 8 數 5、6、7、8、9、10、11、12，可拚成差為 1、2、4 的 3 種組合：

差 1：(5、6) (7、8) (9、10) (11、12)

差 2：(5、7) (6、8) (9、11) (10、12)

差 4：(5、9) (6、10) (7、11) (8、12)

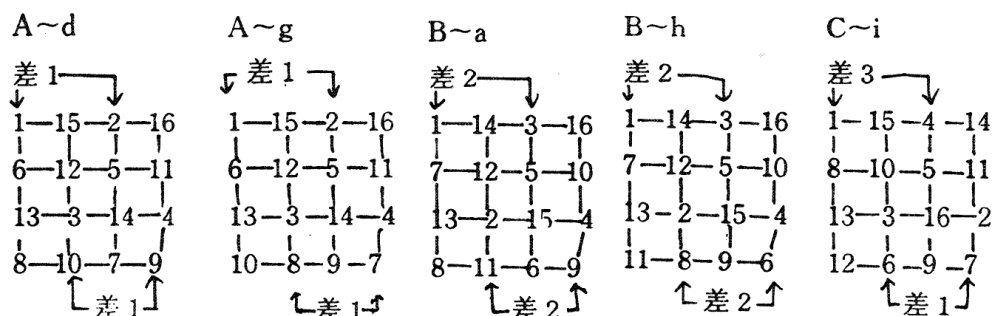
每一種組合，各直行間 2 數的差的組合又各有 3 種：

差 1：a：(5、7) (9、11) …… 差 (2、2)

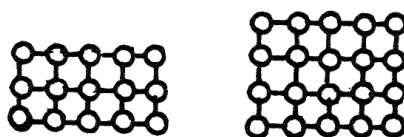
b：(5、9) (7、11) …… 差 (4、4)

- c : (5、11)(7、9)……差(6、2)
 差 2 : d : (5、6)(9、10)……差(1、1)
 e : (5、9)(6、10)……差(4、4)
 f : (5、10)(6、9)……差(5、3)
 差 4 : g : (5、6)(7、8)……差(1、1)
 h : (5、7)(6、8)……差(2、2)
 i : (5、8)(6、7)……差(3、1)

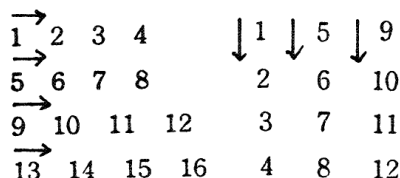
(3)前 4 組與後 4 組，因直行差數相同而可以彼此配合的共有 5 種，經過調整大小後的答案如下：



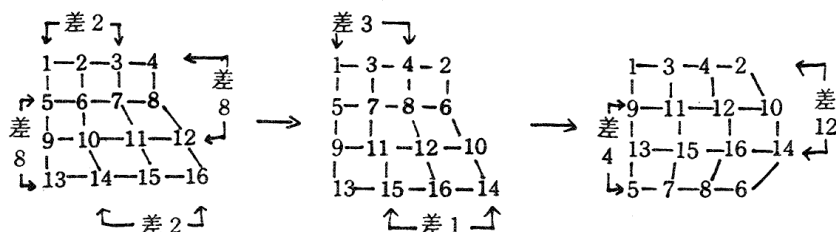
(七)比較簡單的方法：



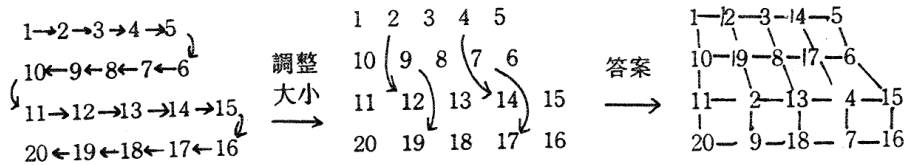
1. 正方形的數目增加，使用的數字也跟著增多，數的組合以及大小關係也更加複雜。2 層 8 個正方形、3 層 12 個正方形等題目也可以使用前面的方法去求解答，但是所費時間、精力也不少。有沒有比較簡單的方法呢？
2. 如果我們把連續數，由左而右、由上而下或由上而下，由左而右依次寫出來，只要行數相同，無論上下左右，相鄰 2 數的差都相等。不但如此，任何直（橫）行在同一橫（直）行上的 2 數，彼此間的差也相等。



3. 這樣寫出來的圖形，無論是直行或橫行，如果是整行的對調位置，調整後的圖形也保留了“差數相等”的特性。

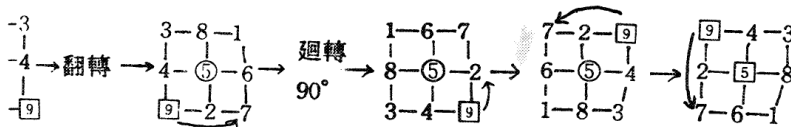


4. 這些圖形再經過大小關係的調整就得答案。
5. 如果把上面連續數的寫法改為奇數行順向、偶數行逆向而寫，還可以省去一次調整大小關係的手續。



(八)使用快速的方法，能求出所有的答案嗎？

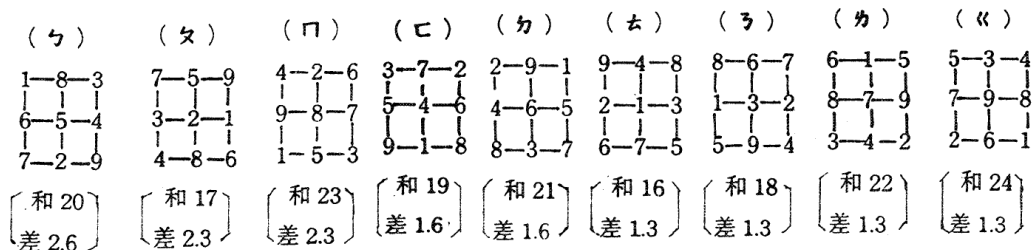
1. 我們引用 2 層 4 個正方形的例子來驗證。為了簡化圖形的種類，將某一種圖形翻轉後以及迴轉 90° 後的圖形都當做同一種。



2.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

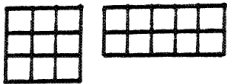

 如果把左邊圖形的直、橫行整行的對調，可得 9 種不同的圖形，再經過大小關係的調整後就得下面 9 個答案：

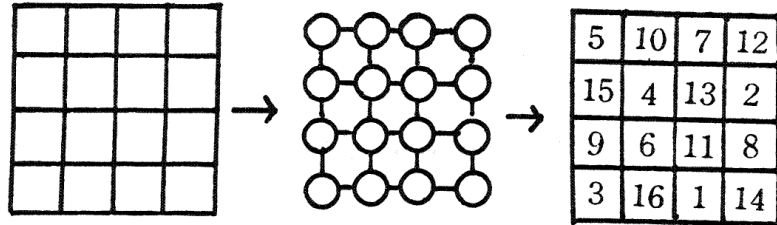


3. 上面 9 個答案具有下面幾個特點，好像包括了所有的答案：
- (1) 中間一數，從 1 到 9，輪流各出現一次。
 - (2) 外圍的 8 個位置也同樣，每一個位置，從 1 到 9 輪流各出現一次。
 - (3) 每 1 個小正方形 4 個數的和，從 16 到 24 共 9 種，剛等於該答案中間的數加 15。
4. 其實上面 9 個答案中還未出現的差 5、差 4 等的組合仍能組出不少答案，就是已出現的差 3、2、1 等也還能組出許多不同的答案。可知：使用快速的方法並不能求出所有的答案。

(九)其他的問題：

1. 前面各種題目所使用的數字，都是從 1 開始的連續數。其實，任何數都可以開始，同時只要前後 2 數的“差”相等，任何數列都可以應用。
2. 如下方的題目，也可以應用前面的方法去解答：

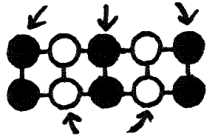

 在左圖小正方形中填入 1 到 10(16) 的數，使每個  中 4 個數字的和都相等。



四、結論

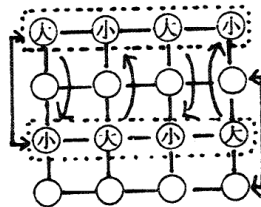
1. 正方形只有 1 層的時候，可先從數列中找出 2 數“和”相等的組合若干個，填入奇數直行中。再把餘下的數拚成 2 數“和”相等的若干個組合，填入偶數直行中便得答案。
2. 正方形有 2、3 層的時候，可先從數列中找出 2 數“差”相等的組合若干個，填入等 1、3 行；餘下的數再拚成 2 數“差”相等的若干個組合，填入等 2、4 行。填好以後的各數，必有如下圖的關係。

上下二數的和相等



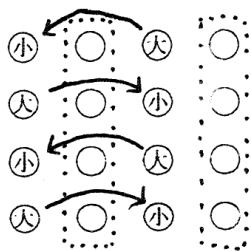
上下二數的和相等

這二行，在同樣直行上的二數，差都相等



這二行，在同樣直行上的二數，差都相等

3. 如果只求 1 個或少數幾個答案，也有比較簡單快速的方法。



評語

表達生動，研究完整。