破解撲克牌魔術

初小組數學科第三名

台北縣立淡水國民小學

作　　者：方殷殷、許嘉銘
林曉楓、李鷺韓
指導教師：陳文龍、謝朝宗

一、研究動機

有一次班級慶生會時，我們邀請陳文龍老師參加，陳老師表演了一種撲克牌魔術，許嘉銘同學很好奇，就想知道為什麼，於是我們和老師一起研究探討。

二、研究目的

㈠希望了解這項魔術的原因。
㈡嘗試是否能研究出其他的魔術變法。
㈢在研究過程中了解研究問題的意義。

三、研究設備器材

撲克牌、筆、紙。

四、說明《魔術的變法步驟》

㈠拿一副牌，（不要鬼牌，共 52 張）先依序翻出 25 張牌。
㈡將 25 張牌放在其他牌下方。

㈢翻出第一張牌，無論是何張，將它數到第 13，例如翻出 5，則邊數邊翻牌，算到第 13。爲第一排。

㈣同前，做第二、三排。

㈤將 3 排的第 1 張數目加起來，例如這裡就是 5+9+9=23。

㈥現在我可以預測手中第 23 張牌是什麼。（表演者說出預測的答案是何張牌。）

㈦翻至第 23 張牌，果然是預測的牌。(此例中，黑桃 12 即爲答案。)

五、研究過程或方法

實驗㈠：破解老師的魔術。

1. 爲了了解爲什麼可以預測，我們將全部的牌都翻開，以便我們探討。我們先翻出 25 張牌。（這裡的例子和說明中的例子是同一例）。
2. 再翻出 3 排，3 排第一張總和爲 23。然後算至第 23 張。（剩餘 8 張，再由翻出的 25 張牌中去數到 23）答案是黑桃 12。
3. 產生假設：我們知道 25 張牌是每次都先翻出來的，而 3 排中的第一張牌，卻是不固定的，因此我們設立了假設，假設第一排翻出的第一張牌是ㄅ，（也就是例中的方塊 5）則第一排翻出的張數爲（13－ㄅ＋1）張，假設第二排、第三排翻出的第一張牌是ㄆ、ㄇ，則第二、三排的張數分別是：（13－ㄆ＋1）、（13－ㄇ＋1）張。例如第一排翻 5，則翻出的張數爲(13－5＋1)＝9。
4. 則 3 排的張數總和是（13－ㄅ＋1）＋（13－ㄆ＋1）＋（13－ㄇ＋1），而我們要預測 3 排第一張總和的牌，也就是第（ㄅ＋ㄆ＋ㄇ）張牌，則我們翻出的牌張數爲：（13－ㄅ＋1）＋（13－ㄆ＋1）＋（13－ㄇ＋1）＋（ㄅ＋ㄆ＋ㄇ）＝13－~~ㄅ~~＋1＋13－~~ㄆ~~＋1＋13－~~ㄇ~~＋1＋~~ㄅ~~＋~~ㄆ~~＋~~ㄇ~~＝42。則我們手上的牌張數爲 52－42＝10 張。
5. 很意外的我們發現假設的ㄅ、ㄆ、ㄇ都消去了，而成爲一個數目字。因此，我們知道我們手上的牌，不管翻出來的是什麼牌，最後都會剩下 10 張。
6. 手上的牌是 10 張，前一張就是答案（即倒數第 11 張）也就是步驟㈠翻出 25 張牌的第 15 張。

〔討論㈠〕：

我們知道破解後，想試試看如果翻出來的不是 3 排，而是 1 排、2 排、4 排、5 排呢？它可不可行？於是我們做了實驗㈡。

實驗㈡：翻出排數的增減可行嗎？

1. 做 4 排的實驗：假設 4 排翻出的第一張牌分別是ㄅ、ㄆ、ㄇ、ㄈ，則由前面過程中我們知道手中的牌張數爲：52－〔（13－ㄅ＋1）＋（13－ㄆ＋1）＋（13－ㄇ＋1）＋（13－ㄈ＋1）＋（ㄅ＋ㄆ＋ㄇ＋ㄈ）〕＝52－〔13－ㄅ＋1＋13－ㄆ＋1＋13－ㄇ＋1＋13－ㄈ＋1＋ㄅ＋ㄆ＋ㄇ＋ㄈ〕＝52－56➡不能成立。因此我們知道，4 排以上是不能變的。
2. 做 2 排的實驗：假設 2 排翻出的第一張排分別是ㄅ、ㄆ，則手上剩下的牌張數爲：52－〔（13－ㄅ＋1）＋（13－ㄆ＋1）＋（ㄅ＋ㄆ）〕＝52－28＝24➡手上會剩 24 張牌。答案也就是倒數第 25 張，也就是步驟㈠翻出的第一張。
3. 做 1 排的實驗：假設翻出的第一張牌是ㄅ，則我們手上剩下的牌張數爲：52－〔（13－ㄅ＋1）＋ㄅ〕＝52－14＝38，手上剩下的牌有 38 張，答案是倒數第 39 張，而我們在步驟㈠中只翻出 25 張，倒數是第 39 張答案牌，已超出能預知的 25 張牌，因此 1 排的魔術是不能變的。

〔討論㈡〕

在做 1 排的實驗中，我們知道答案是倒數的第 39 張，仍是找得到答案牌的位置，而不像做 4 排的實驗中，超出了 52 張牌而不能成立，因此我們大膽的改變了前面的變法，將步驟㈠翻出的 25 張牌，放在其他牌的上方（原本放在下方）看看是不是可以成立。➡實驗㈢

實驗㈢：將 25 張牌放在上方也能變嗎？

1. 如說明步驟㈠中，將牌先數 25 張，然後置於其他牌上方。
2. 如實驗㈡～3 中，推算答案是倒數第 39 張牌，從頭數則是 52－39＋1＝14➡在前一步驟數出 25 張牌中的第 14 張牌就是答案。

〔討論㈢〕

在前面的實驗中，我們都是以整副牌來做的，如果少了一張或二張就不能變了嗎？我們想試著推算看看，於是我們做了實驗㈣。

實驗㈣：牌的張數增減會如何？

1. 先以 51 張牌做實驗，則如實驗㈠～4 中，我們知道翻出來的牌有 42 張，手上的牌就有 51－42＝9 張，前一張（倒數第 10 張）也就是步驟㈠翻出 25 張牌的第 16 張即是答案。
2. 依此類推，一副牌若每減一張，則答案就是第 15 張再加一張，倒如 51 張牌答案是第 16 張，50 張牌答案是第 17 張……。但因翻出的牌有 42 張，因此最少不能少於 42 張牌。

3. 同前面的道理，我們也可增加張數，一副牌若每增加一張，則答案就是第 15 張再減一張，例如 53 張答案是第 14 張，54 張牌答案是第 13 張……。至 64 張牌時答案是第一張，所以最多不能多過 64 張牌。

〔討論㈣〕

我們在前面的實驗中，發現這個魔術真是不可思議，同時也發現了數學的千變萬化，更引起我們繼續研究的興趣，我們再大膽的嘗試：如果用 2 副牌、3 副牌、4 副牌……，會是什麼樣的呢？它可以變嗎？於是我們做了實驗㈤。

實驗㈤：多副牌可以變嗎？

1. 做 2 副牌的實驗：

ㄅ、在 2 副牌 104 張牌中，我們將每個將步驟的牌都加 1 倍，原來步驟㈠數 25 張，現在數 50 張，翻出的牌則 3 排都數到 26(13×2)。

ㄆ、同實驗㈠～3、4 步驟中，我們翻出的排張數為：（26－ㄅ＋1）＋（26－ㄆ＋1）＋（26－ㄇ＋1）＋（ㄅ＋ㄆ＋ㄇ）＝81，手上的牌則有 104－81＝23 張➡答案是倒數第 24 張，也就是數 50 張時的第 27 張牌(50－24＋1＝27)。

2. 做 3 副牌的實驗：

ㄅ、同前，3 副牌有 52×3＝156 張，數牌要數 75 張(25×3)，翻出的牌 3 排都數到 39(13×3)。

ㄆ、同前，手上的牌張數為：156－〔（39－ㄅ＋1）＋（39－ㄆ＋1）＋（39－ㄇ＋1）＋（ㄅ＋ㄆ＋ㄇ）〕＝156－120＝36➡答案是倒數第 37 張，也就是數 75 張時的第 39 張牌(75－37＋1＝39)。

〔討論㈤〕

做 2 副牌、3 副牌的實驗中，有趣的發現了一個現象，如下表：

牌數(副)	1	2	3	推論	4
每排所要數的數目	13	26	39	➡	52
答案牌	15	27	39		51

我們發現很有趣的是，每增加 1 副牌的話，答案牌就是再加上 12 的那張牌，因此我們推論，做 4 副牌的話，答案就是 39＋12＝51➡第 51 張牌，在下一步驟中，我們的推論得到了解答。

3. 做 4 副牌的實驗：

ㄅ、同前，4 副牌有 52×4＝208 張，數牌要數 100 張(25×4)，翻出的牌 3 排都數到 52(13×4)。

ㄆ、同前，手上的牌數為：208－〔（52－ㄅ＋1）＋（52－ㄆ＋1）＋（52－ㄇ＋1）＋（ㄅ＋ㄆ＋ㄇ）〕＝208－159＝49➡答案是倒數第 50 張，也就是數 100 張時的第 51 張牌（100－50＋1＝51）。

〔討論㈥〕

我們的推論獲得了證實，知道了每增加一副牌，答案就增加 12 張，而 1 副牌時答案牌是第 15 張，以此為基數，假設有 A 副牌的話，答案牌數是：15＋（A－1）×12，套入此公式後，牌數可無限的增加，但是牌數太多的話，在展示此魔術時，反而顯得雜亂，不過我們推算出這個公式，給了我們很大的鼓勵，就好像發現了寶藏一般，這種心情是很難形容的。

六、結論

㈠我們破解了老師的魔術，知道第 3 排的魔術中，答案一定是步驟㈠翻出的第 15 張，只要記住那張牌是什麼就可以了，不知道的人看起來很玄，以為我們能把 25 張牌都背起來呢！

㈡我們不但破解了 3 排的變法，還推算出 2 排的變法，在翻 25 張牌時，記住第 1 張牌就可以了。而原本 1 排的魔術是不能變的，我們在實驗㈢中，改變了原來的變法，研究出 1 排的變法。

㈢牌的張數增減後，答案牌的位置也產生了變化，我們製成了下表，可以看得更清楚：

張　數	42	…	49	50	51	52	53	54	55	…	64
答案牌	25	…	18	17	16	15	14	13	12	…	1

㈣實驗㈤中，我們嘗試看看多副牌可以變嗎？結果不但可以變，還推算出在多副牌的情況下，推算答案牌的公式：

15＋（A－1）×12　A 代表幾副牌，在多副牌的情況下，代入此公式，就可以立刻算出答案牌的位置。下表，我們可以看得更清楚。

牌數（副）	1	2	3	4	5	A
步驟㈠翻出的牌數	25	50	75	100	125	25×A
每排所要數的數目	13	26	39	52	65	13×A
答案牌	15	27	39	51	63	15＋（A－1）×12

㈤所謂「戲法人人會變，各有巧妙不同」，我們在這個實驗中，了解了魔術必定有它破解的方法，小朋友：不要太容易上當哦！

㈥這次的研究討論中，發現數學就在我們的日常生活中，在一副 52 張牌的撲克牌中，包含了許許多多有趣的數學問題，使我們不再對數學產生畏懼及厭惡，反而覺得相當有趣，使我們對數學及科學研究更感興趣。

㈦思考及假設是解決問題的好方法，大膽的假設後，所推算出來的，有的即是令人驚奇的結果，而有了假設，才有頭緒的簡化問題，而加以解決，並且有助於對問題做更深入的了解，在這個實驗中，使我們知道在做研究時所應有的態度及方式，小朋友：你是否也有所收穫呢！

七、參考資料

㈠控制變因及操縱變因在實驗中的觀念及運用：國民小學四下第八册自然科學課本第一課；國立編譯館編印。

㈡假設未知數來代表具體的數值（代數）的觀念及運用：國民小學六上第十一册第二單元“怎樣解題”；國立編譯館編印。

評語

此項作品實在是撲克牌之一個有名的遊戲，而作者卻能將它推廣成許多不同情形，例如二付牌，三付牌，……等，而且解說之同學相當清楚，表達能力亦佳。實為一個不錯的作品。