

從加到乘看魔方再變

初小組數學科第二名

台南縣崑山國民小學

作者：林玉玲、賴冠宏

蘇鈺棻、陳佳嬪

指導教師：徐世和、林瑞成

一、研究動機

去年以九方格加法的研究，作品參加全國科展比賽，蒙評審的嘉許鼓勵，我們除了高興所付出的辛苦，獲得了肯定，也更堅定我們由興趣投入研究的信念。現在把加法研究的部分結論摘錄如下：

- (一)凡具有特定規則排列的整數，就可用來填入九方格，使每直、橫、斜的和相等。
- (二)排九方格有八種型式，是按左旋（右旋），互換的規律。
- (三)每直、橫、斜的和是中數的 3 倍，與中數所成之線去掉中數之和，必為中數的 2 倍。

一年來我們持續著加法研究的結論，不斷的研究、探討，進一步的發現，九方格既然可以用加的，使直、橫、斜的和相同，那麼是否也有乘法的關係，能使各直、橫、斜的積相同呢？減法及除法是否也能應用於九方格遊戲中呢？這些有趣的問題，都是我們很想去瞭解的。

二、研究目的

- (一)研究為使九方格各直、橫、斜的積相同，須滿足那些性質？
- (二)是否任何整數都可當中數？以使九方格各直、橫、斜的積均相同？
- (三)如何以中數來造數，以使九方格每直、橫、斜的積均相同？
- (四)能任意造數，使九方格的每直、橫、斜的積均相同？
- (五)推廣應用加、減、乘、除。

三、研究過程

(一)九方格的各直、橫、斜積相同，要何特質？

1. 數的定義：

造數：造出九方格各直、橫、斜和（積）相同的數。

中數：造數中的第五位數，也就是填入九方格的中央數。

基準數：可當中數的數，且是造數的基本數。

非基準數：可當中數，且為基準數的倍數。

2. 參考資料：

在研究歷程中，我們也翻閱了許多相關的書，其中有一題列出一個九方格其各直、橫、斜的積相同，列舉如下：

3	36	2
4	6	9
18	1	12

3. 分析上述九方格特性：

①各直、橫、斜的積有八式，每式乘積均相同。

$$3 \times 36 \times 2 = 216, 3 \times 6 \times 12 = 216, 18 \times 1 \times 12 = 216, 18 \times 3 \times 4 = 216, \\ 1 \times 6 \times 36 = 216, 9 \times 12 \times 2 = 216, 9 \times 6 \times 4 = 216, 18 \times 6 \times 2 = 216$$

各直、橫、斜的積均為 216

②各直、橫、斜的積(216)，恰為中數(6)的三次方

$$216 = 6 \times 6 \times 6 = 6^3$$

③各直、橫、斜(與中數所成之線)線去掉中央數，其餘二數的積恰為中數的二次方

$$36 \times 1 = 36 = 6^2, 4 \times 9 = 36 = 6^2, 3 \times 12 = 36 = 6^2, 18 \times 2 = 36 = 6^2$$

4. 簡易造數法：

依上述九方格之特性，參考去年作品三、(五)之方法可按如下步驟

①定中數：(10)

②設兩組數：其積為中數的平方(100)，一組為(1,100)，另一組為(2,50)。分別填於九方格內。如圖(一)

③求 A、B、C、D 值(各直、橫、斜積為 $10^3 = 1000$)如圖(二)

$$A = 1000 \div 100 \div 2 = 5, B = 100 \div 50 \div 5 = 4, C = 1000 \div 4 \div 10 = 25, D = 1000 \div 2 \div 25 = 20$$

④填入 A、B、C、D 值到九方格。如圖(三)

2	100	
	10	
	1	50

(一)

2	100	A
C	10	B
D	1	50

(二)

2	100	5
25	10	4
20	1	50

(三)

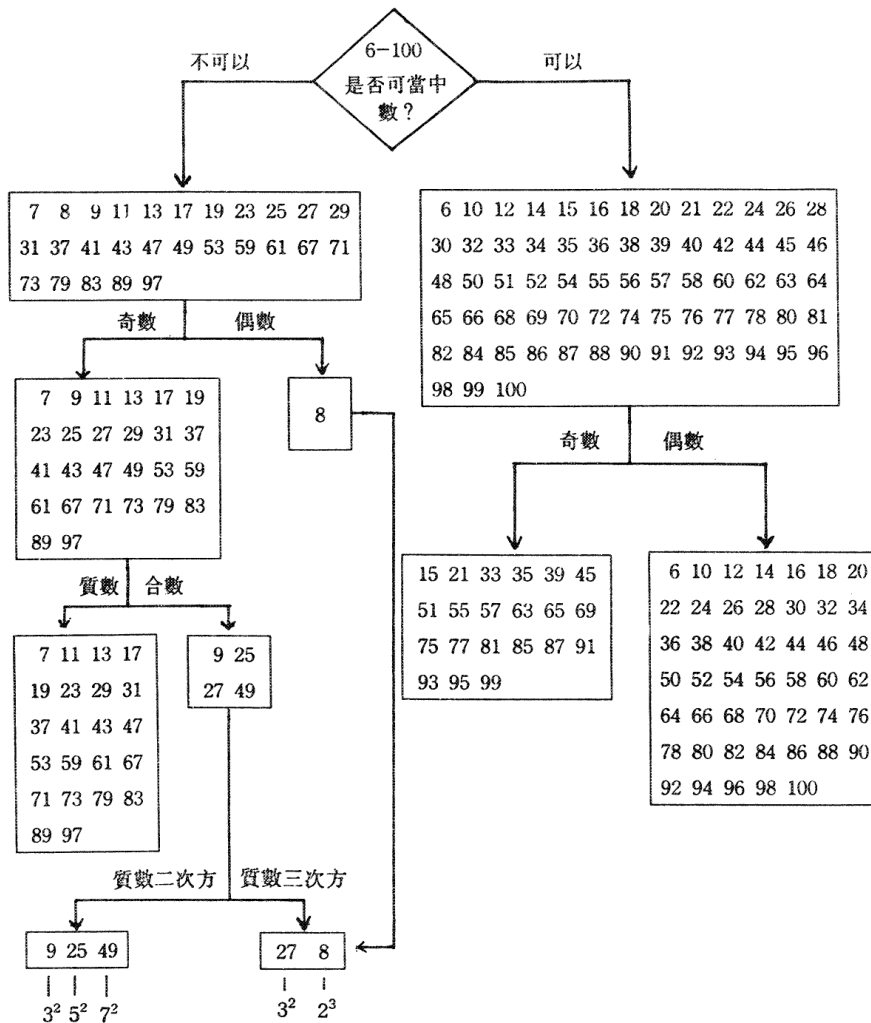
驗算：各直、橫、斜的積均為 1000

(二)是不是任何數都可當中數？以使九方格各直、橫、斜的積均相同

- 按上述簡易造數方法逐一求 100 以內之各數，檢測其是否能使九方格各直、橫、斜的積相同。(原始資料)。
- 經驗算，發現並非每個數均可當中數來造數，有的數可以，有的數不可以。
- 列出 100 以內，可當中數，以使九方格各直、橫、斜積相同的數(打○者)

1	2	3	4	5	⑥	7	8	9	⑩	11	⑫	13	⑭	⑮	⑯	17
⑱	19	⑳	㉑	㉒	23	㉔	25	㉖	27	㉘	29	㉚	㉛	㉜	㉝	㉞
㉟	㊱	㊲	㊳	㊴	㊵	㊶	㊷	㊸	㊹	㊺	㊻	㊼	㊽	㊾	㊿	51
52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68
69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100		

4. 將 100 以內之各數加以分類



從分類表發現如下結果：

①什麼數可以當中數？

- ㄅ、6 以上的偶數除 8 外，其餘的數都可當中數
- ㄆ、奇數中個位數都是 5 的數，25、(125)外，均可當中數
- ㄏ、可以當中數的必定是合數，並不是全部的合數均能當中數

②什麼數不可以當中數？

- ㄅ、質數
- ㄆ、質數的二次方
- ㄏ、質數的三次方

驗算：找出 100 以內的質數，分別驗證質數、質數的二次方、質數的三次方，是否可當中數來造數，使九方格各直、橫、斜的積相同。

結果：驗算結果，質數、質數二次方、質數三次方均不可當中數來造數。

驗證：任舉非質數、非質數二次方、非質數三次方的數當中數，推算九方格，均能使各直、橫、斜積均相同。

結論：整數中除了質數、質數二次方、質數三次方外，均可當中數來造數，使九方格直、橫、斜的積相同。

(三)如何以中數來造數，以使九方格的每直、橫、斜積相同？

1. 完成造數表：

將 100 以內可以當中數的數，依照(-)4 的方法來造數，並排列

中數	造 數	發 現
6	1 2 3 4 5 6 9 12 18 36	$2 \times 3 = 6$ $2 \times 6 = 12$ $3 \times 6 = 18$ $2 \times 2 = 4$ $3 \times 3 = 9$ $6 \times 6 = 36$ 2, 3 是 6 的因數
...
N	1 A B A ² C B ² AC BC C ²	$A \times B = C$ $A \times C = AC$ $B \times C = BC$ $A \times A = A^2$ $B \times B = B^2$ $C \times C = C^2$ AB 是 C 的因數

由造數表得知：①首數均為 1，中數為 C， $A \times B = C$ ，A、B 是 C 的因素， $A \neq B \neq C$ ， $A \neq 1$ ， $B \neq 1$

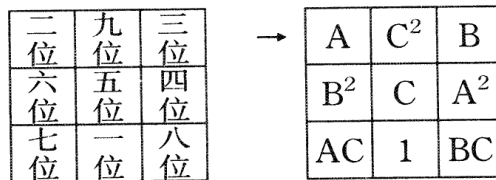
推論：①除 (1. 本數) 一組外，至少還要有一組以上的因素才能當中數，否則不能。

②以 1 為首數的造數，可按此方法，其步驟：

- ㄅ、先確定一中數
- ㄆ、分解中數的二因素
- ㄇ、按 1, A, B, A², C, B², AC, BC, C² 造數排列定位數

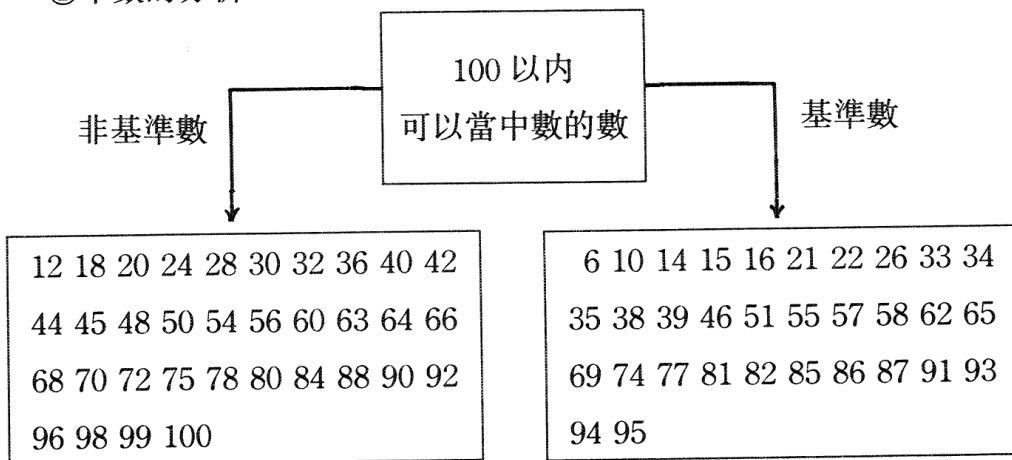
~~~~~  
 一 二 三 四 五 六 七 八 九  
 位 位 位 位 位 位 位 位 位  
 數 數 數 數 數 數 數 數 數  
 ~~~~~

ㄏ、各位數依圖示填入九方格：〔參考去年作品三四ㄨ〕



2. 中數的分析與比較：

①中數的分析：



②因數組數與造數列表

基準數	因數組數	造 數
6	(1, 6)	1 2 3 4 6 9 12 18 36
	(2, 3)	
10	(1, 10)	1 2 5 4 10 25 20 50 100
	(2, 5)	
⋮	⋮	⋮

非基準數	因數組數	造 數
12	(2, 6)	1、2、6、4、12、36、24、72、144
	(3, 4)	1、3、4、9、12、16、36、48、144
⋮	⋮	⋮

③觀察：由觀察②之列表，可得如下結果：

中數 類別	因 數	造 數
基準數	除 1 本身一組外，還有一組因數	1 當首數僅一組造數
非基準數	除 1 本身一組外，至少有二組以上	有二個以上造數

[疑問]：中數（是非基準數）的造數：

①是否還有其他組不同的造數

②除了從 1 開始當首數外，能否由 1 以外的數當首數

3. 中數（非基準數）的造數。

①列舉以基準數當中數所造之數的倍數表：

10	造數	驗算情形
倍數 ×	1 2 5 4 10 25 20 50 100	均能使各直、橫、斜的積相同
20	2 4 10 8 20 50 40 100 200	均能使各直、橫、斜的積相同
30	3 6 15 12 30 75 60 150 300	均能使各直、橫、斜的積相同
⋮	⋮	⋮

②造數與倍數的關係：

ㄅ、基準數造數的倍數，是其倍數的造數？

中數是 30 的造數，除首數可用 1 外，還有首數非 1

ㄆ、中數與首數有何關係？

驗算其他組造數，以中數除以首數都有兩個以上的因數

[推論]中數（非基準數）的造數：甲最少有兩組以上，

乙 除 1 外還有他數可當首數

首數能整除中數，且可分為二個以上的因素。

③綜合上述，可歸納如下的造數法：（固定中數造數法）

ㄅ、先固定中數。ㄆ再去找首數。ㄇ中數除以首數，得商分解為二個因數。ㄏ以因數乘首數依下列步驟完成造數。

ㄏ、以首數（含 1）整除中數ㄆ，得商分解為因數，其因數組數的和，

就是造數的組數。

[推論]以上各造數，經驗算，發現首數不變，變因數，或因數固定，變首數，均能造出使九方格各直、橫、斜積相同的數。確定可用此法任意造數，且任何數均可當首數來造數。

(五)推廣應用：加、減、乘、除。

1. 從加到減：加法 8 種排法的斜線對角二數互換，就可轉換成相對應的減法 8 種排法，每直、橫、斜線的中間數會等於中數。
2. 從乘到除：乘法 8 種排法的斜線對角二數互換，就可轉換成相對應的除法 8 種排法：每直、橫、斜的兩端之積，除以該線中間數，會等於中數。

四、研究結論

(一)整數中除了質數、質數二次方、質數三次方以外的數，均可當中數造數，使九方格直、橫、斜積相同。

(二)固定中數造數法：

1. 先固定中數
2. 再去找首數
3. 中數除首數商分為二因數
4. 以因數首數依特定步驟即可完成造數。

(三)固定中數來造數法的造數：以中數除以首數，得商分解為因數。

(四)任意造數法：1. 取首數位數 2. 任取二數當因數 3. 以因數 \times 首數按特定步驟即可完成造數法。

評語

1. 具有獨立研究能力。
2. 具有獨特觀點。
3. 操作熟習，口才良好。