

# 哪幾克的砝碼最重要

初小組數學科第一名

台北縣新埔國民小學

作者：彭詞萱、廖千儀

吳欣怡、徐唯真

指導教師：楊淑雲、彭仁晃

## 一、研究動機

有一天，我看到國語日報的趣味數學欄裡，有一個問題：叫做「節約尺有獎徵答」，就是在一根沒有刻度的直尺上，畫上最少道刻度，使它量出 1 到最大的連續長度。這個遊戲使我聯想到：「用哪三個整數，本身或經過相加、相減，可排出由 1 到最大的連續整數？」，後來又想到金子店的老板，用天平秤金子時，盒子裡有很多很多的砝碼，那麼「怎樣用最少的砝碼，量出各種的重量呢？」於是我邀請同學，請爸爸、媽媽和老師指導我們做了下面的研究。

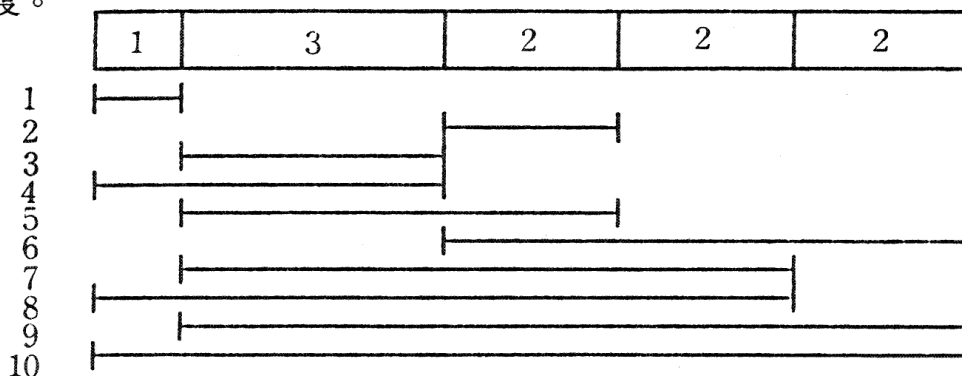
## 二、研究重點

- (一)什麼叫做節約尺？
- (二)用哪三個數，本身或經過相加、相減，可以排出由 1 到最大的連續整數？
- (三)怎樣利用 1 克、3 克和 9 克的砝碼來秤東西？
- (四)怎樣找出第四個砝碼的重量，使這四個砝碼能秤出最多的各種重量？
- (五)利用哪 5 個砝碼、6 個砝碼、7 個砝碼，可量到最多的重量？

## 三、研究經過

- (一)什麼叫做節約尺？

如下圖：在一根 10 公分的直尺上，畫四道刻度，使它能量出 1 到 10 公分的各種長度。



由這個遊戲，使我想到了：我們可以把它剪斷來排，例如用 1 公分、3 公分和 6 公分的紙條，可以量出 1 公分到 10 公分等十種不同的長度，如下圖：

1 公分	☆	3 公分	≡≡≡	6 公分	※※※※※※
1 公分	☆				
2 公分		≡≡≡			(3-1)
3 公分		≡≡≡			
4 公分	☆	≡≡≡			(3+1)
5 公分				※※※※※※	(6-1)
6 公分				※※※※※※	
7 公分	☆			※※※※※※	(6+1)
8 公分		≡≡≡		※※※※※※	(6+3-1)
9 公分		≡≡≡		※※※※※※	(6+3)
10 公分	☆	≡≡≡		※※※※※※	(6+3+1)

(二)用哪三個整數，本身或經過加減法，可量出由 1 到最大的連續整數？

例如：用 1, 3, 6 三數可算出：

1 (本身)	6 (本身)
2(3-1)	7(6+1)
3 (本身)	8(6+3-1)
4(3+1)	9(6+3)
5(6-1)	10(6+3+1)

即：①, ③, ⑥ → 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

我們利用上面的方法，再找其他三個數，它們最多能算出的連續整數如下：

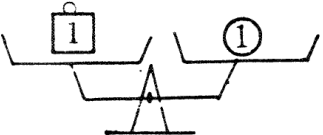
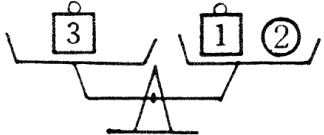
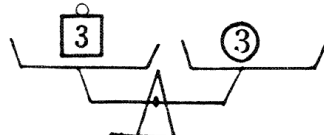
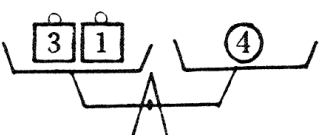
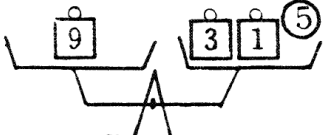
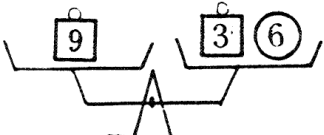
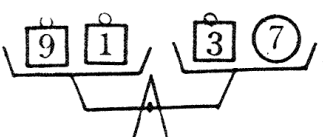
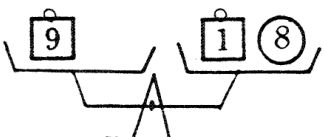
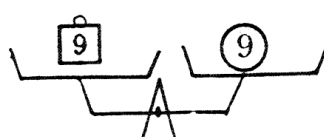
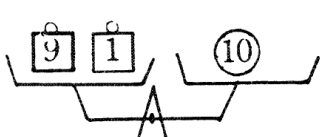
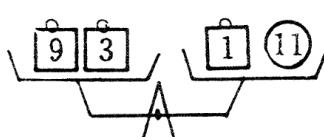
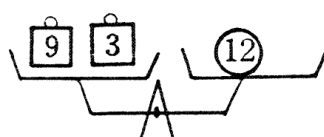
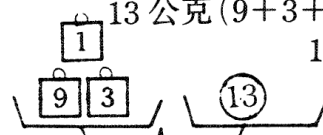
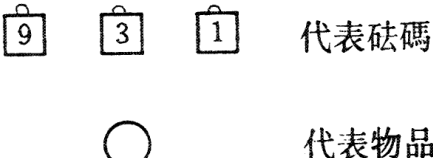
①, ②, ③	1, 2, 3, 4, 5, 6
①, ②, ④	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
①, ②, ⑤	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
①, ②, ⑥	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
①, ②, ⑦	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
①, ②, ⑧	1, 2, 3
①, ③, ⑦	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11
①, ③, ⑧	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
①, ③, ⑨	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13

①, ③, ⑩	1, 2, 3, 4
①, ④, ⑥	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

從上面的計算比較，我們發現用 1, 3, 9 三個數，所排出的連續整數最大，可以由 1 排到 13。

(三) 怎樣利用 1 克、3 克和 9 克的砝碼來秤東西？

從上面的研究，我們想到可以利用 1 克、3 克和 9 克的砝碼來秤 1 克到 13 克的東西。方法如下：

1 公克 	2 公克 (3-1) 	3 公克 
4 公克 (3+1) 	5 公克 (9-3-1) 	6 公克 (9-3) 
7 公克 (9+1-3) 	8 公克 (9-1) 	9 公克 
10 公克 (9+1) 	11 公克 (9+3-1) 	12 公克 (9+3) 
13 公克 (9+3+1) 	 <p>代表砝碼</p> <p>代表物品</p>	

(四)怎樣找出第四個砝碼的重量，使這四個砝碼能秤出最多的各種重量？

1. 當我們取兩個砝碼時，由下表可知道：用 1 克和 3 克最多能量出 4 克，而且用這兩個砝碼最佳。

1, 2	1, 2, 3
1, 3	1, 2, 3, 4
2, 3	1, 2, 3

2. 如果第三個砝碼用 6 克，如左下圖，可以量出 1 到 10 克；如果第三個砝碼用 9 克，如右下圖，可以量出 1 到 13 克，最大的連續整數。

$\begin{array}{r} 1 \quad 3 \quad 6 \\ \diagdown \quad / \\ 1 \end{array}$	$5(6-1)$	$7(6+1)$
2		$8(6+2)$
3		$9(6+3)$
4		$10(6+4)$

$\begin{array}{r} 1 \quad 3 \quad 9 \\ \diagdown \quad / \\ 1 \end{array}$	$8(9-1)$	$10(9+1)$
2		$11(9+2)$
3		$12(9+3)$
4		$13(9+4)$

也就是如下表：

1 克和 3 克可量出	用 9 克去減第一行的數	用 9 克去加第一行的數
1 克	8 克	10 克
2 克	7 克	11 克
3 克	6 克	12 克
4 克	5 克	13 克

再加上 9 克砝碼本身，就能量出由 1 克到 13 克，13 個連續整數的重量，而 9 克的砝碼是由 4+5 來的。

3. 因為由 1、3 和 9 三個數，可以得到最大的整數是 13，那麼 14 可以由  $27-13$  算出來，所以第四個砝碼用 27 克，可以量到最大的重量是 40 克，如下表：

1, 3, 9 克可量出	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
27 克減去第一列的數	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14
27 克加上第一列的數	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

再加上 27 克本身。所以 1 克、3 克、9 克和 27 克可以量出 1 克到 40 克的重量。

(五)用 5 個砝碼、6 個砝碼、7 個砝碼，最多可以量到多少克呢？

1. 因為用 1 克、3 克、9 克和 27 克最多可量到 40 克，所以再加上一個 81 克， $(81=40+41)$  可以測量到 121 克。 $(121=1+3+9+27+81)$ 。
2. 因為用 1 克、3 克、9 克和 27 克和 81 克，最多可量到 121 克，所以再加上一個 243 克， $(243=121+122)$ ，可以測量到 364 克 $(364=1+3+9+27+81+243)$ 。
3. 因為用 1 克、3 克、9 克、27 克、81 克和 243 克，最多可以測量到 364 克，所以再加上一個 729 克 $(729=364+365)$ ，可以測量到 1093 克 $(1093=1+3+9+27+81+243+729)$ 。

#### 四、結論與應用

(一)從上面的研究結果，我們知道：用天平來秤東西時，只要有幾個重要的砝碼，就可以量出物體的重量，那就是 1 克、3 克、9 克、27 克、81 克……等，而且我們發現：後面的數都是前一個數的 3 倍，而且能量出來的重量如下表：

9 3 1	可以量 1 克到 13 克的物品
27 9 3 1	可以量 1 克到 40 克的物品
81 27 9 3 1	可以量 1 克到 121 克的物品
243 81 27 9 3 1	可以量 1 克到 364 克的物品
729 243 81 27 9 3 1	可以量 1 克到 1093 克的物品

(二)要量甲物體的重量時：如果我們在天平的右邊放甲物體及  $\boxed{3}$ ，天平的左邊放  $\boxed{81}$  和  $\boxed{9}$  後，兩邊平衡，那麼就可以知道甲物體的重量是  $81+9-3=87$  克了

(三)我們要量 900 克的東西時，可以算出  $900=729+243-81+9$ ，所以先在天平的左方放  $\boxed{729}$   $\boxed{243}$   $\boxed{9}$ ，在天平的右方放  $\boxed{81}$  後，再加入所要量的東西。

(四)如果要量 0.1 克到 0.9 克的重量，可以再設計  $\boxed{0.1}$ ， $\boxed{0.3}$ ， $\boxed{0.9}$  的砝碼，就可以量出 0.1 到 0.9 克的重量了！

(五)下表可以幫助我們很快的算出各種重量所用的砝碼。

81=81	1= 1	14=27-9-3-1	28=27 +1
162=243-81	2= 3-1	15=27-9-3	29=27 +3-1
243=243	3= 3	16=27-9-3+1	30=27 +3
324=243+81	4= 3+1	17=27-9 -1	31=27 +3+1
405=729-243-81	5=9-3-1	18=27-9	32=27+9-3-1
486=729-243	6=9-3	19=27-9 +1	33=27+9-3
567=729-243+81	7=9-3+1	20=27-9+3-1	34=27+9-3+1
648=729-81	8=9 -1	21=27-9+3	35=27+9 -1
729=729	9= 9	22=27-9+3+1	36=27+9
810=729+81	10=9 +1	23=27 -3-1	37=27+9 +1
892=729+243-81	11=9+3-1	24=27 -3	38=27+9+3-1
972=729+243	12=9+3	25=27 -3+1	39=27+9+3
1053=729+243+81	13=9+3+1	26=27 -1	40=27+9+3+1
		27=27	

例如：100=81+19

$$=81+27-9+1$$

$$300=324-24$$

$$=324-(27-3)$$

$$=324-27+3$$

$$500=486+14$$

$$=486+27-9-3-1$$

哇！真厲害！要量 1 克到 1093 克的物品，只要用七個砝碼就夠了！

## 評語

1. 具創意與完整性。
2. 學生觀念清晰，操作能力良好。
3. 學生發表能力强。
4. 道具與版面均製作精美。