高維空間中的正多面體

國中組數學科第三名

臺北市立和平國中

作　　者：單中杰

指導教師：陳文隆

一、研究動機

無論在平面上或空間中，都存在有一些「正多邊形」或「正多面體」。在解析幾何出現之前，對於這些「正」的幾何形體，已有相當的研究結果。由於解析幾何的發明，四維以上歐氏空間的概念，也逐漸被人們接受。隨之而來的問題是，高維空間中也能找到由若干相同正多面體所組成的「超體」，或是由若干超體所組成的「超超體」嗎？在二度和三度空間中的各項性質，又能夠以怎樣的方法推廣至高維空間呢？

二、研究目的

㈠在高維空間中定義「正多面體」。

㈡將平面中正多邊形和三度空間中正多面體的各項性質推廣至高維空間，並嘗試加以證明。

㈢利用各項基本性質尋找各種高維正多面體。

㈣對高維正多面體的特殊性質進行猜測，並嘗試加以證明。

三、研究設備

㈠IBM PC 相容個人電腦。

㈡Turbo Pascal version 6.0。

四、研究過程及結果

首先我們先定義一些名詞與函數：

〔定義 1〕正多面體：平面上的正多邊形，定義為每一邊皆等長，每一內角均相等的多邊形。$(n+1)$維中的正多面體，則是由若干相同的 n 維正多面體所組成，且每一多面角均相等。

〔定義 2〕單體：平面上的單體，為邊數最少的正三角形。$(n+1)$維中的單體，則是由最少數目的 n 維單體所組成，且每一多面角均相等。

〔定義 3〕若已知一正多面體，則該正多面體在 n 維空間中的組成單位記為

$E(n)$。例如對三度空間中的正十二面體而言，$E(3)=$正十二面體，$E(2)=$正五邊形，$E(1)=$線段，$E(0)=$點。

〔定義 4〕已知一正多面體，則該正多面體中，每個 $E(i)$ 包含的 $E(j)$ 數記作 $N(i, j)$。以正十二面體爲例，$N(2, 1)=5$，$N(3, 2)=12$，$N(3, 0)=20$……。

〔定義 5〕在 $E(i)$ 中，每個 $E(j)$ 同時屬於的 $E(j+1)$ 個數稱爲 $C(i, j)$。仍以正十二面體爲例，$C(3, 0)=3$，$C(2, 1)=1$……。（爲避免混淆起見，排列組合的「$C(x, y)$」寫爲 $C〔x, y〕$）

由以上定義，我們馬上就可導出：

〔定理 1〕對於任意正多面體，

$$N(n, i)=(n, i+1)*N(i+1, i)/C(n, i)。$$

〔證　明〕共有 $N(n, i+1)$ 個 $E(i+1)$，每個 $E(i+1)$ 又包含 $N(i+1, i)$ 個 $E(i)$，但每個 $E(i)$ 共用 $C(n, i)$ 個 $E(i+1)$，所以要除以 $C(n, i)$。故知

$$N(n, i)=N(n, i+1)*N(i+1, i)/C(n, i)。$$

有了定理 1，我們只要知道某個 n 維正多面體所屬的 $E(i)$（其中 $0<i<n$）的 $N(i, i-1)$（即每面的邊數、每邊的頂點數……），以及 $N(n, n-1)$、$C(n, i)$，便能求出 $N(n, i)$。反之，知道 $N(i, i-1)$、$N(n, i)$，便能求出 $C(n, i)$。例如已知正二十面體由 20 個正三角形、30 條邊、12 個頂點組成，正三角形由三條邊組成，每邊又由兩點組成，則 $n=3$，$N(3, 0)=12$，$N(3, 1)=30$，$N(3, 2)=20$，$N(2, 1)=3$，$N(1, 0)=2$，可知 $C(3, 2)=1$，$C(3, 1)=2$，$C(3, 0)=5$。

將 $N(i, j)$ 和 $C(i, j)$ 當作兩個矩陣來看，則它們可以完整地描述一個正多面體。我們觀察 3 維單體的 N 與 C 矩陣，可以看到

$$N=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}，C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

N 矩陣很像是楊輝三角，C 矩陣則是平行「╲」方向的對角線而遞增。事實上，我們可以證明：

〔定理 2〕對於 n 維中的單體，

1. $N(n, i)=C〔n+1, i+1〕$
2. $C(n, i)=n-i$。

〔證　明〕

(1) n 維單體可視爲『連接 $n+1$ 點中的兩點爲一邊，三點爲一面，k 點爲一 $E(k-1)$……』，故

$N(n, i)=C[n+1, i+1]$。

(2)由定理 1：

$N(n, i)=N(n,i+1)*N(i+1, i)/C(n, i)$，

代入以上結果得

$C[n+1, i+1]=C[n+1, i+2]*C[i+2, i+1]/C(n, i)$

即

$$\frac{(n+1)!}{(i+1)!(n-i)!}=\frac{(n+1)!}{(i+2)!(n-i-1)!}\quad\frac{(i+2)}{C(n, i)}$$

約分化簡得 $C(n, i)=n-i$。

由定理 2 的結果，可以進一步用「雙重數學歸納法」來把尤拉公式($V-E+F=2$，即 $V-E+F-1=1$)推廣至高次空間。

〔定理 3〕(推廣的尤拉公式)對 n 維中任意的多面體而言，$N(n, 0)-N(n, 1)+N(n, 2)-\cdots\cdots+(-1)^n N(n, n)=1$。

〔證　明〕

(1)$n=1$ 時，左邊＝右邊＝1，等式成立。

(2)設 $n=k-1$ 時等式成立，則 $n=k$ 時：

(3)若該多面體爲單體，則上式左邊

$$\begin{aligned}&=C[k+1, 1]+C[k+1, 3]+C[k+1, 5]+\cdots\cdots\\&\quad-C[k+1, 2]-C[k+1, 4]-C[k+1, 6]-\cdots\cdots\\&=(C[k, 0]+C[k, 1])+(C[k, 2]+C[k, 3])+\cdots\cdots\\&\quad-(C[k, 1]+C[k, 2])-(C[k, 3]+C[k, 4])-\cdots\cdots\\&=C[k, 0]+C[k, 1]+\cdots\cdots+C[k, k]-C[k, 1]-C[k, 2]-\cdots\cdots\\&\quad-C[k, k]\end{aligned}$$

$=C[k, 0]=1=$右邊，等式成立。

(4)若該多面體非單體，則可任意選取一個 $E(k-1)$，令其「縮爲一點」。在此過程中，損失了 $N(k-1, 0)-1$ 個點，$N(k-1, 1)$ 條線，$N(k-1, 2)$個面……。設新的多面體有 $N'(k, i)$個 $E(i)$，則

$N'(k, 0)=N(k, 0)-N(k-1, 0)+1$，

$N'(k, i)=N(k, i)-N(k-1, i)$，(當 $0<i<k$)

$N'(k, k)=N(k, k)=1$

由此可知

$N'(k, 0)-N'(k, 1)+N'(k, 2)-\cdots\cdots+(-1)\hat{}k*N'(k,k)$

$=N(k, 0)-N(k, 1)+N(k, 2)-\cdots\cdots+(-1)\hat{}k*N(k, k)-(N(k-1, 0)-$

$N(k-1, 1)+N(k-1, 2)-\cdots\cdots-(-1)^k*N(k-1, k-1))+1$ 　　(＊)

但是已知定理在 $n=k-1$ 時成立，故

$N(k-1, 0)-N(k-1, 1)+N(k-1, 2)-\cdots\cdots-(-1)^k*N(k-1, k-1)$

$=1$

代入(＊)式得。

$N'(k, 0)-N'(k, 1)+N'(k, 2)-\cdots\cdots+(-1)^k*2N'(k, k)$

$=N(k, 0)-N(k, 1)+N(k, 2)-\cdots\cdots+(-1)^k*2N(k, k)-1+1$

$=N(k, 0)-N(k, 1)+N(k, 2)-\cdots\cdots+(-1)^k*2N(k, k)$

故等式的左邊在某一 $E(k-1)$「縮爲一點」後，其值不會改變。因此我們可以不斷地進行此操作，直到這個多面體成爲單體，再使用步驟(3)證明等式成立。

(5)由以上(3)、(4)步可知，原等式在 $n=k$ 時亦成立，故由數學歸納法原理知本定理在 n 爲任意自然數時均成立。

由以上的各項定理，我們可以撰寫一電腦程式 POLYSRCH，用來輸入一正多面體的 N、C 矩陣，尋找高一維中可能的各種正多面體。

若我們把定理 3 的左邊最後一項『$(-1)^n N(n, n)$』移到右邊，則右邊便會在 n爲奇數時成爲 2，在 n 爲偶數時成爲 0。這便導致 POLYSRCH 在奇數維中進行尋找時，可以正確地找到所有的正多面體（不多不少），但在偶數維中進行尋找，卻得到含有整參數 x 的結果（例如找尋以正四面體組成的四維正多面體，會得到 $N(4)=(x, 2x, 2x, x, 1)$、$(x, 3x, 4x, 2x, 1)$、$(x, 6x, 10x, 5x, 1)$的結果，其中 x 爲任意正整數。）

我們必須導出高維正多面體 N、C 矩陣的充要條件，才能正確地篩選出高維正多面體。這也就是未來的研究方向。

五、參考資料

一、幼獅數學大辭典，下册　P.3000～3001。

評語

本件作品先定義抽象之正 n—維多面體，並由定義下導致簡單、直接之一些結論，雖有相當之創意，惟似乎尚不夠深入，甚感可惜。