由錯覺與眞實之間——探討疊紋的奧妙

國中組數學科第三名

高雄市立鹽埕國民中學

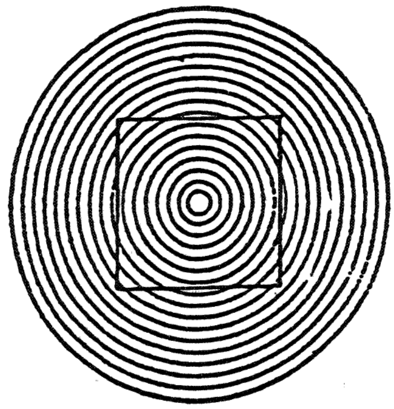
作　　者：葉淑惠、王寶雅

指導教師：林江河

一、研究動機

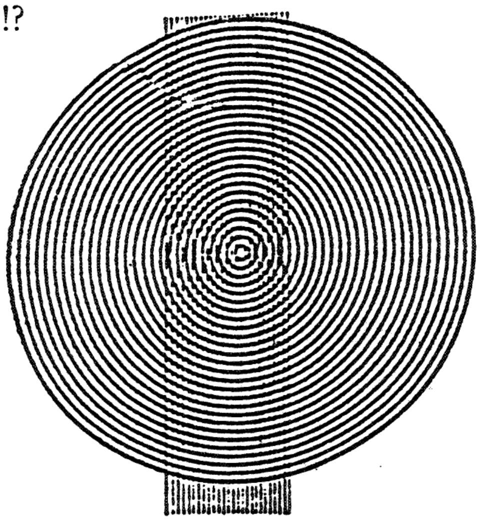
在數學上，圓是有一定的軌跡及方程式表示，而直線也是一樣。但是如果將“同心圓族”與“平行線族”湊合在一起，便產生不同的“視覺感受”。例如我在科學月刊第六卷第 6 期中發現下列圖一、圖二。

圖一：直線在平行線族中有折曲的現象



圖二：*Orbison* 錯覺，正方形在同心圓族中有彎曲的感覺

當我發現此一現象時深感疑惑，並引證於其他同學，結果大家的感覺都相同，我才相信自己的眼睛沒有錯！只是不了解爲什麼會有這種感覺。另外，當這兩片細密間距不同的圖案，稍作移動，便產生一種奇異的“疊紋”。至於其中的道理所在，引起我深入探討的興趣!?



圖三：直線族的中央部分略顯內凹的感覺

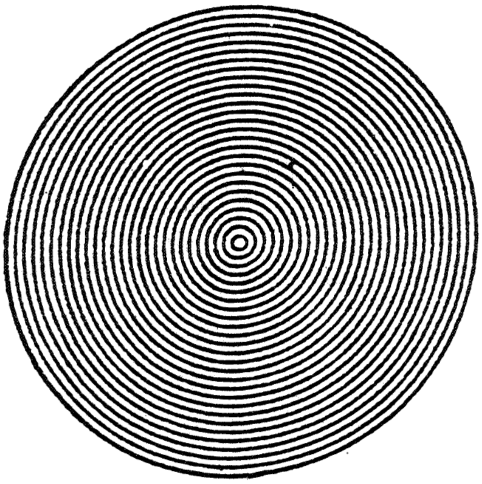
二、研究目的

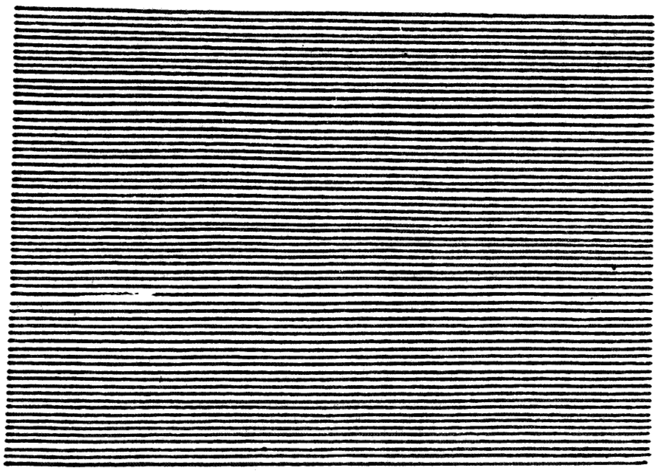
1. 探討將同心圓族與平行線族密合時，在兩者間距相同與不同下，會產生那些不同“疊紋”的變化，疊紋的數學一般化如何表示。
2. 再由兩種間距相同或不同的同心圓族交合時，疊紋又有那些變化？成因如何。
3. 視覺上對直線族彎曲的感覺與疊紋有關聯嗎？

三、研究過程

（甲）準備工作

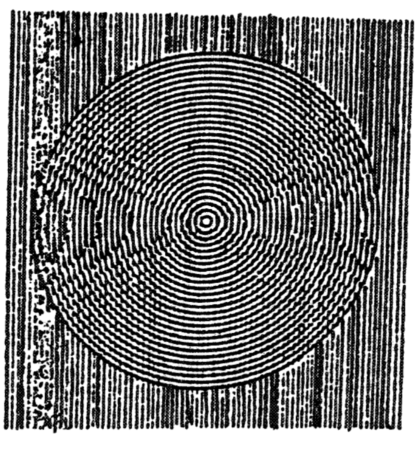
為了讓研究主題更易掌握與操作，我們先用圓規與直尺先行繪製了如下的等距的同心圓族及平行線族，並用透明片經由影印機縮放功能複製了一些間距不同的若干同心圓族及平行線族透明片，以便操作研究。



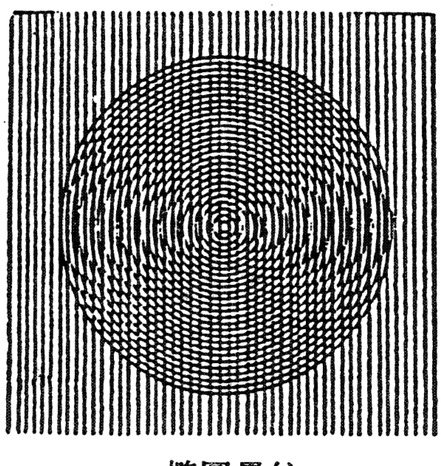


（乙）逐步分析

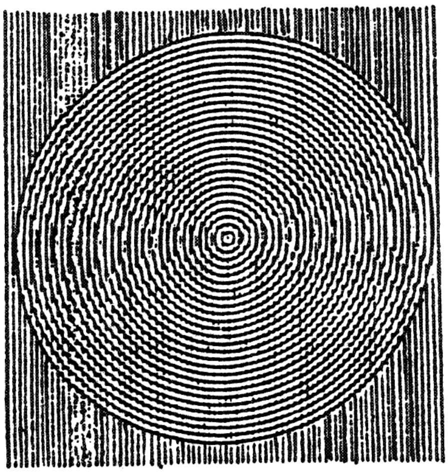
㈠觀察等距同心圓族與平行線族的疊紋。



拋物線疊紋



橢圓疊紋

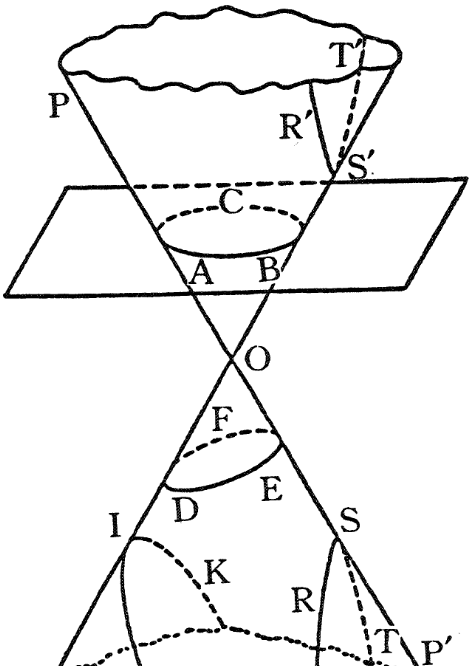


雙曲線疊紋

當我們控制兩者間距的大小因素，來進行交疊實驗，在透明片上呈現出以上三種不同的變化圖形。

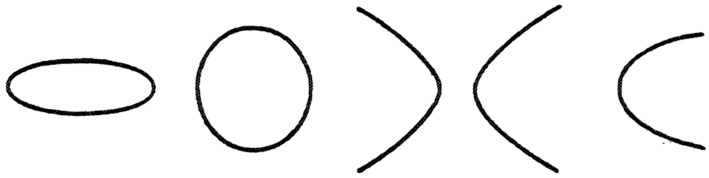
㈡圓錐曲線的認識（註一）

一個圓錐曲面包括兩個部分，由 O 點向兩個互爲相反的方向無窮延伸（如圖四）。一個圓錐曲面與一個平面相交，就能得到一條曲線，其形狀與平面、圓錐曲面間的相關位置有關。如平面只與某個圓錐體相交就得到橢圓（如圖四之 DEF）或圓（圖四之 ABC）如割切平面與整個圓錐曲面相交，得到的曲線有兩部分（圖四之 RST 及 R′S′T′）稱爲雙曲線。



圖四：圓錐曲面及各種截線

最後，如割切平面依平行於某一條圓錐曲面的直線（即母線，如 POP′）則與圓錐曲面可切得一拋物線。（如圖四之 GIK）



圖五：圓錐截（曲）線

㈢數學一般化

假設等距同心圓族的間距爲 a，圓心定爲$(0, 0)$

平行線族的間距爲 b，以垂直 x 軸直線定之

則同心圓族方程式 $x^2+y^2=(ah)^2$，$h=1$，2，3，……

平行線族方程式 $x=bk$，$k=0$，±1，±2，±3，……

$$\begin{cases} x^2+y^2=(ah)^2 \cdots\cdots(1) \\ x=bk \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

由(2)知 $k=\dfrac{x}{b}$

令 $m=h-k$

則 $h=m+k=m+\dfrac{x}{b}$ ……(3)

(3)代入(1)得：$x^2+y^2=a^2(m+\dfrac{x}{b})^2$

$$x^2+y^2=a^2(m^2+\frac{2m}{b}x+\frac{x^2}{b^2})$$

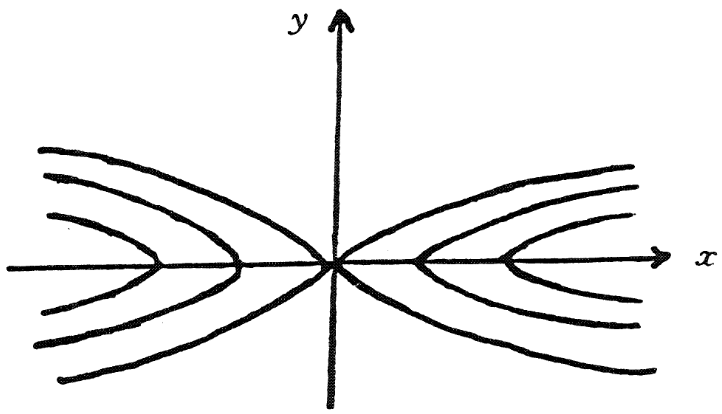
同×b^2 得 $b^2x^2+b^2y^2=a^2b^2m^2+2a^2bmx+a^2x^2$

即$(b^2-a^2)x^2+b^2y^2=a^2b^2m^2+2a^2bmx$

(1)當 $a=b$ 時，$b^2y^2=b^4m^2+2b^3mx$

$y^2=b^2m^2+2bmx$

$y^2=2bm(x+\dfrac{bm}{2})$……拋物線型式



(2)當 $a>b$ 時，$(a^2-b^2)x^2+2a^2bmx-b^2y^2=-a^2b^2m^2$

同÷$a^2b^2m^2$ 得 $\dfrac{(a^2-b^2)x^2+2a^2bmx}{a^2b^2m^2}-\dfrac{y^2}{a^2m^2}=-1$

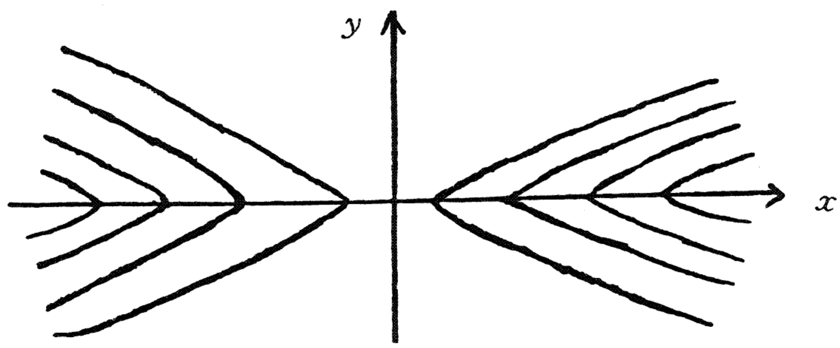
又由配方法 $(a^2-b^2)x^2+2a^2bmx=(a^2-b^2)(x+\dfrac{a^2bm}{a^2-b^2})^2-\dfrac{a^4b^2m^2}{a^2-b^2}$ 代入

得 $\dfrac{(a^2-b^2)(x+\dfrac{a^2bm}{a^2-b^2})^2}{a^2b^2m^2}-\dfrac{a^2}{a^2-b^2}-\dfrac{y^2}{a^2m^2}=-1$

$\therefore \dfrac{(x+\dfrac{a^2bm}{a^2-b^2})^2}{\dfrac{a^2b^2m^2}{a^2-b^2}}-\dfrac{y^2}{a^2m^2}=\dfrac{b^2}{a^2-b^2}$

同×$\dfrac{a^2-b^2}{b^2}$ 得：$\dfrac{(x+\dfrac{a^2bm}{a^2-b^2})^2}{\dfrac{a^2b^4m^2}{(a^2-b^2)^2}}-\dfrac{y^2}{\dfrac{a^2b^2m^2}{a^2-b^2}}=1$

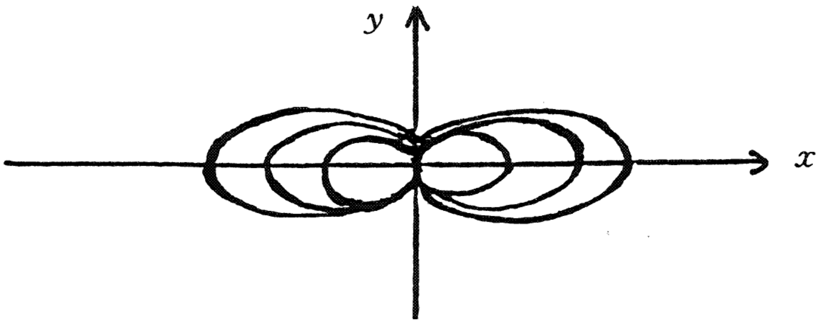
因 $a>b$，故分母兩數均爲正值，上式爲雙曲線型式。



(3)當 $a<b$ 時，$(b^2-a^2)x^2-2a^2bmx+b^2y^2=a^2b^2m^2$

由(2)可得：$\dfrac{(x-\dfrac{a^2bm}{b^2-a^2})^2}{\dfrac{a^2b^4m^2}{(b^2-a^2)^2}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{a^2b^2m^2}{b^2-a^2}}=1$

……橢圓型式



綜合以上分析我們得知一個事實，當兩個間距 a，b 產生變化時，此種疊紋即有不同的形變。

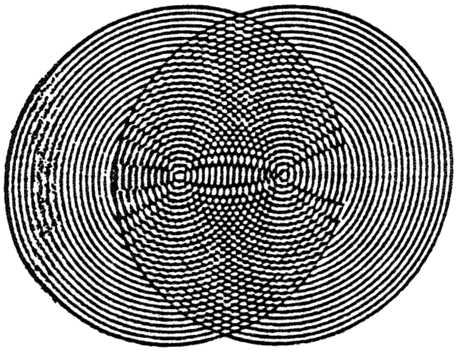
①$a=b$ 時，疊紋呈拋物線系。

②$a>b$ 時，疊紋呈雙曲線系。

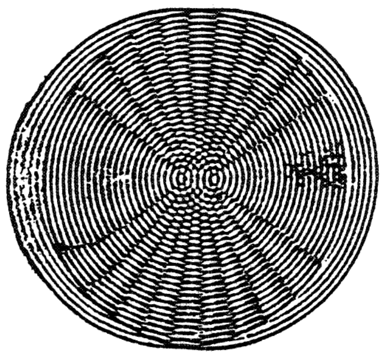
③$a<b$ 時，疊紋呈橢圓系

（丙）追蹤探討

㈠觀察相同的等距同心圓間產生疊紋的變化。



兩圓圓心距較遠，產生橢圓系圖及雙曲線系組合。



兩圓圓心距接近，產生雙曲線漸近線系。

㈡數學一般化

設兩等距同心圓間距皆爲 a，圓心各爲(S, O)及(−S, O)，S>0

$$\begin{cases}(x-s)^2+y^2=(ah)^2\cdots\cdots(1) & h,\ k=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots \\ (x+s)^2+y^2=(ak)^2\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

由(2)：$k=\frac{1}{a}\sqrt{(x+s)^2+y^2}$

又令 $m=h-k$

$\therefore h=m+k=m+\frac{1}{a}\sqrt{(x+s)^2+y^2}\cdots\cdots(3)$

(3)代入(1)中，$(x-s)^2+y^2=(am+\sqrt{(x+s)^2+y^2})^2$

$$(x-s)^2+y^2=a^2m^2+(x+s)^2+y^2+2am\sqrt{(x+s)^2+y^2}$$

$$-4sx-a^2m^2=2am\sqrt{(x+s)^2+y^2}$$

兩邊平方得 $16s^2x^2+a^4m^4+8a^2m^2sx=4a^2m^2[(x+s)^2+y^2]$

同÷$4a^2m^2$：$\frac{4s^2x^2}{a^2m^2}+\frac{a^2m^2}{4}+2sx=(x+s)^2+y^2$

$$x^2+s^2+y^2-\frac{4s^2x^2}{a^2m^2}=\frac{a^2m^2}{4}$$

$$(1-\frac{4s^2}{a^2m^2})x^2+y^2=\frac{a^2m^2}{4}-s^2$$

$$\left(\frac{a^2m^2-4s^2}{a^2m^2}\right)x^2+y^2=\frac{a^2m^2-4s^2}{4}\cdots\cdots(*)\text{式}$$

$$\text{同}\times\frac{4}{a^2m^2-4s^2}\text{得：}\left(\frac{4}{a^2m^2}\right)x^2+\left(\frac{4}{a^2m^2-4s^2}\right)y^2=1$$

$$\text{即}\frac{x^2}{\left(\frac{am}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{am}{2}\right)^2-s^2}=1$$

(1)當 $\left|\frac{am}{2}\right|>s$ 時，則上式 $\underbrace{\frac{x^2}{\left(\frac{am}{2}\right)^2}}_{\text{正值}}+\underbrace{\frac{y^2}{\left(\frac{am}{2}\right)^2-s^2}}_{\text{正值}}=1$ 橢圓疊紋產生

(2)當 $\left|\frac{am}{2}\right|<s$，則上式 $\frac{x^2}{\left(\frac{am}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{s^2-\left(\frac{am}{2}\right)^2}=1$ 雙曲線疊紋產生

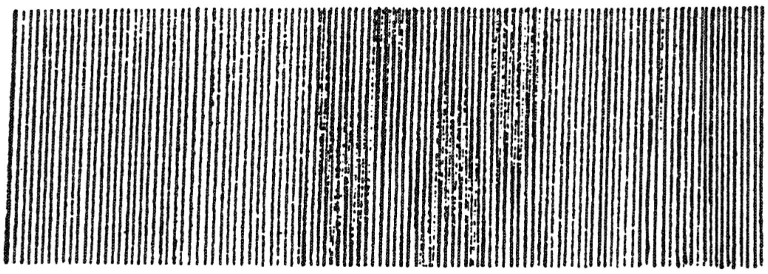
(3)當 $\left|\frac{am}{2}\right|=s$，則 $(*)$ 式即成 $y=0$ 即 x 軸圖形。（但不一定存在）

四、推廣與實驗

有了以上的心得，我們大膽的嘗試，使用這些間距不同的平行線族與同心圓族的透明片，做平移與旋轉的實驗，探討更多疊紋的現象。

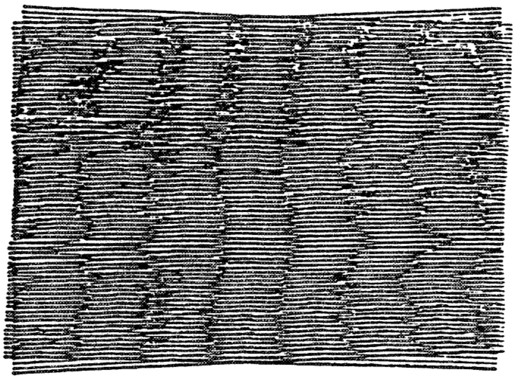
（甲）直線族的動態實驗

(1)首先以間距相同的直線族作“平移”實驗，獲得以下的圖案：



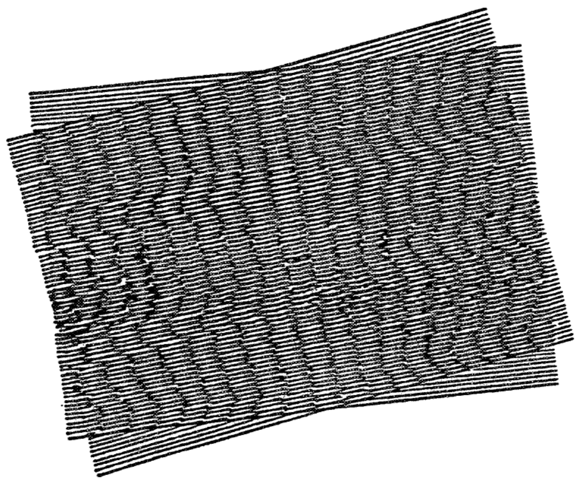
(2)再作“旋轉”實驗，獲得以下的圖案：

設兩平行線族交角 θ，轉動它觀察它的變化。



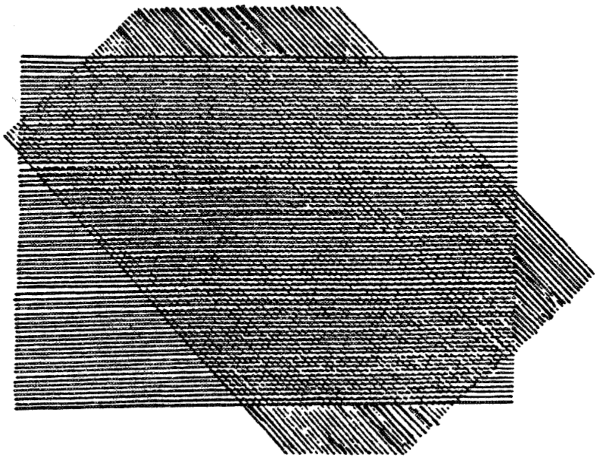
$\theta=10^\circ$

閃動節拍相當明顯。



$\theta = 20^\circ$

閃動條紋細長。



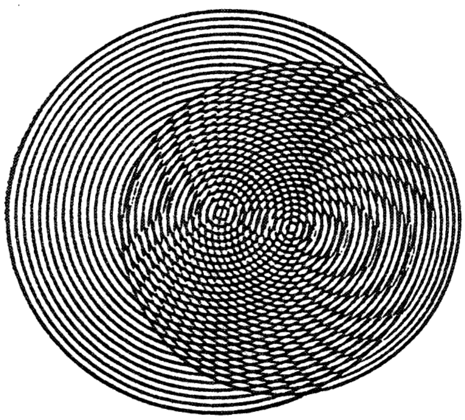
$\theta = 45^\circ$

顯示出平行四邊形狀，

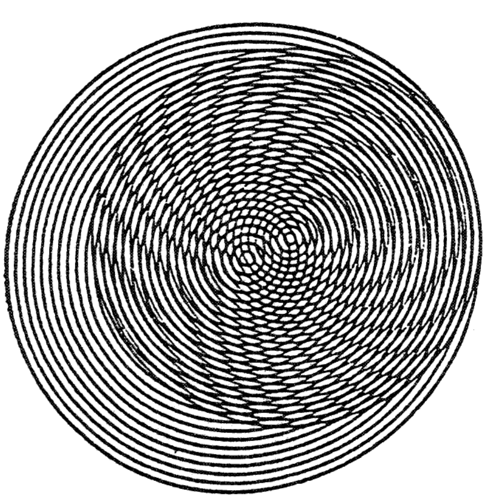
節拍閃動消失。

（乙）圓形族的動態實驗

(1)不同間距的等距同心圓族做<u>平移實驗</u>：



(2)不同間距的等距同心圓族做<u>旋轉實驗</u>：



我們發現在圓形族的動態實驗中，疊紋的變化更趨複雜，紋路更漂亮。

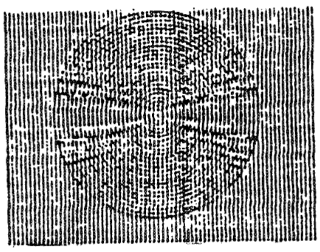
（丙）電腦繪圖觀察驗證

(1)設計同心圓族與平行線族的疊紋交錯程式如下：

```
10 REM: co1
20 CLS: SCREEN 2
30 INPUT A, B
40 FOR I=1 TO 100 STEP A
50 CIRCLE(150, 130), I……1/1
60 NEXT 1
70 FOR J=10 TO 300 STEP B
80 LINE(J, 30)-(J, 250)
90 NEXT J
100 LOCATE 19, 1: PRINT"同心圓族間距 a="; A;"平行線族間距 b="; B
110 IF A>B THEN 140
120 IF A<B THEN 150
130 LOCATE 20, 1: PRINT"＊＊＊拋物線疊紋＊＊＊"：GOTO 160
140 LOCATE 20, 1: PRINT"＊＊＊雙曲線疊紋＊＊＊"：GOTO 160
150 LOCATE 20, 1: PRINT"＊＊＊橢圓疊紋＊＊＊"
160 LOCATE 23, 1: END
```

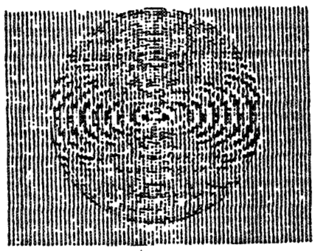
結果：

? 4.4



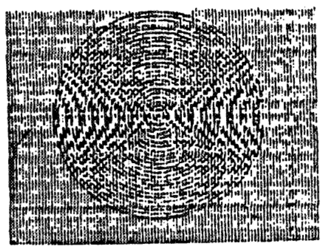
同心圓族間距 a=4
平行線族間距 b=4
＊＊＊拋物線疊紋＊＊＊

? 3.4



同心圓族間距 a=3
平行線族間距 b=4
＊＊＊橢圓疊紋＊＊＊

? 4.3



同心圓族間距 a=4
平行線族間距 b=3
＊＊＊雙曲線疊紋＊＊＊

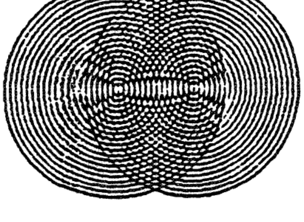
(2)設計兩個同心圓族平移的疊紋交錯程式如下：

```
10 REM: co2
20 CLS: SCREEN 2
30 INPUT "S="; S
40 INPUT"右邊同心圓的間距 A="；A
50 INPUT"左邊同心圓的間距 B="；B
```

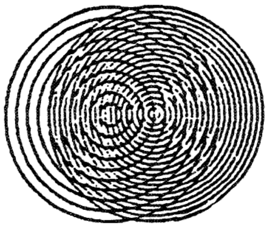
```
60  PRINT"兩圓心的距離 2S=" ; 2*S
70  FOR I=A TO 100 STEP A
80  FOR J=B TO 100 STEP B
90  CIRCLE(160-S, 200), J,,,,1/1: NEXT J
100  CIRCLE(160+S, 200), I,,,,1/1: NEXT I
110  END
```

結果在兩圓心距離 $2s$ 改變時，變化如下：

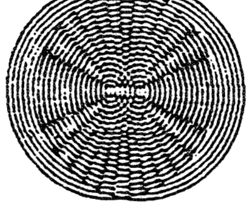
S= ? 35
右邊同心圓的間距 A= ? 5
左邊同心圓的間距 B= ? 5
兩圓心的距離 2S=78
Ok



S= ? 28
右邊同心圓的間距 A= ? 5
左邊同心圓的間距 B= ? 18
兩圓心的距離 2S=48
Ok



S= ? 15
右邊同心圓的間距 A= ? 5
左邊同心圓的間距 B= ? 5
兩圓心的距離 2S=38
Ok



五、結論

1. 兩片透光的細密圖案相疊合，可以產生一組新的圖案，即所謂"疊紋"；疊紋的變化在透光片細密度（即間距）的不同而有差異。
2. 當一等距同心圓族光片間距 a，另一平行直線族光片間距 b，相互密合時，疊紋的變化有三種情形，在解析幾何上各有疊紋的通式：

㈠當 $a=b$ 時，疊紋呈拋物線系

$$\Rightarrow y^2=2am\left(x+\frac{am}{2}\right),\ m=\pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots$$

㈡當 $a>b$ 時，疊紋呈雙曲線系

$$\Rightarrow \frac{\left(x+\dfrac{a^2bm}{a^2-b^2}\right)^2}{\dfrac{a^2b^4m^2}{(a^2-b^2)^2}}-\frac{y^2}{\dfrac{a^2b^2m^2}{a^2-b^2}}=1$$

㈢當 $a<b$ 時，疊紋呈橢圓系

$$\Rightarrow \frac{\left(x-\dfrac{a^2bm}{b^2-a^2}\right)^2}{\dfrac{a^2b^4m^2}{(b^2-a^2)^2}}+\frac{y^2}{\dfrac{a^2b^2m^2}{b^2-a^2}}=1$$

3. 當兩個同心圓光片，間距均是 a，兩圓心是 O(s, O)，O′(−s, O)，s>0，兩光片在 O，O′ 的互動下產生許多奇妙的變化：

(一)當 $\left|\frac{am}{2}\right|>s$ 時，則通式 $\frac{x^2}{(\frac{am}{2})^2}+\frac{y^2}{(\frac{am}{2})^2-s^2}=1$

$m=\pm 1，\pm 2\cdots\cdots$　產生橢圓系疊紋

(二)當 $\left|\frac{am}{2}\right|<s$ 時，則通式 $\frac{x^2}{(\frac{am}{2})^2}-\frac{y^2}{s^2-(\frac{am}{2})^2}=1$

產生雙曲線系疊紋。

4. 兩平行線族光片，當某一片繞另一片作 θ 角旋轉（逆或順時針方向）時，自然產生不同的疊紋，轉角愈小，疊紋紋路愈細長，紋路的長度隨著交角減少而增長。

當 θ 很小時，疊紋的紋路很長，閃動節拍十分明顯。

當 $\theta=45^\circ$ 時，疊紋即成平行四邊形狀。

當 $\theta=90^\circ$ 時，疊紋成矩形狀。

如此現象，連續旋轉進行也可產生某種節拍或閃動的感覺。

5. 間距不同的兩個等距同心圓旋轉運動下，其疊紋更具動態美。在解析幾何下的數學通式因深及高次函數圖形，故相當複雜，尚未進一步分析，然而此種疊紋的奧妙却是最引人入勝的！

6. 有關在疊紋產生過程中，常會造成另一種奇妙的視覺差異；我們認爲圖形本身並未折曲或內凹，真實的問題是發生在疊紋中(1)交角的大小(2)兩者間距的疏密差距，交角愈小，此種視覺差異就愈直接，愈明顯；同時間距愈密的話，感覺也比較强烈，間距相當大時，便消失了。

六、參考資料

1. 孫文先（民 77）：解析幾何，台北，九章出版社。
2. .郭長成（民 77）：PC BASIC 電腦趣味繪圖，台北，松崗。
3. 國立編譯館（民 80）：國中數學教科書第 4 冊及選修上、下冊，台北，台灣書局。
4. 陳信義（民 73）：歐幾里得的幾何原本。科學月刊，第十五卷第三期 *p*.197～198（註一）。

評語

本件作品，作者考慮同心圓、直線族，兩兩間，或自己本身之干擾所得幻影，討論相當詳細。惟利用公式來闡明結果，所用之數學式子，似已超過作者所瞭解之程度，較爲可惜。