安特衛普之謎

國中組數學科第二名

北縣中山國民中學

作　　者：李建昌、黃世維

黃建穎、趙偉喆

指導教師：黃郁斐

一、研究動機

有一天，無意間在報紙上發現了這個令我百思不解的問題，因爲好奇心的趨使，我們開始了這項研究。

二、研究目的

這個類似河內塔的問題，其難度更甚於河內塔，找到解出此題所需之最少步驟數即是我們的目的。

三、研究器材

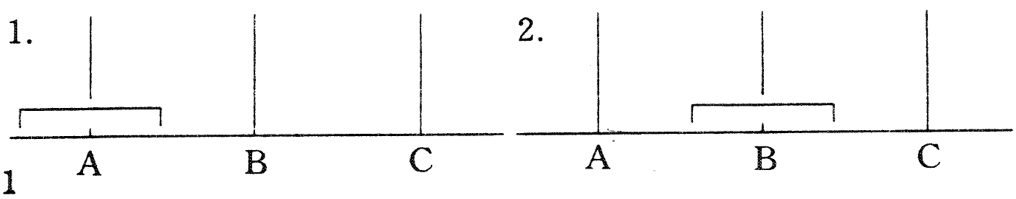
1. 紙，2. 筆，3. IBM PC 電腦

四、研究過程

安特衛普塔的題目是這樣子的：有三根圓柱 A，B，C，其上各有 n 個不同顏色的圓片每一個圓柱上的圓片由下而上，由大而小順序排列著，我們必須把 A 的圓片移到 B 上，B 的移到 C 上，C 的圓片則要移到 A 上，而且一次只能搬一片，較大圓片不可疊在較小圓片上，在此我們的目的是要找出完成這問題所需之最少步驟數七。

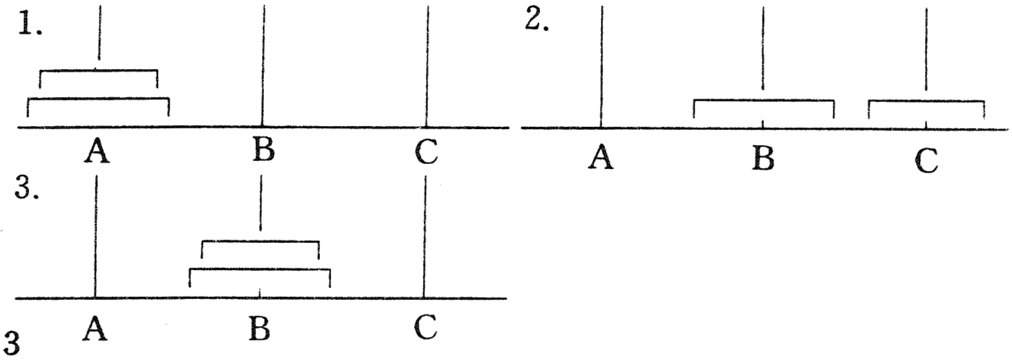
題目中，三個柱上都有圓片，爲了尋找較便捷之方法及其規律，首先我們假設只有一根柱子上有圓片。（ n 爲圓片數，t_n 爲最少步驟數 ）

若 $n=1$，



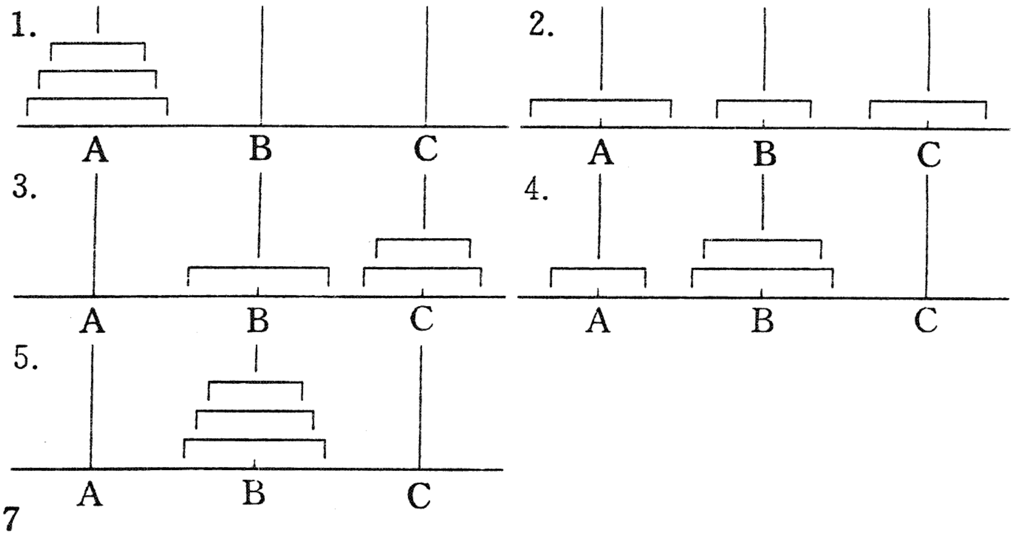
⇨$t_1=1$

若 n=2，



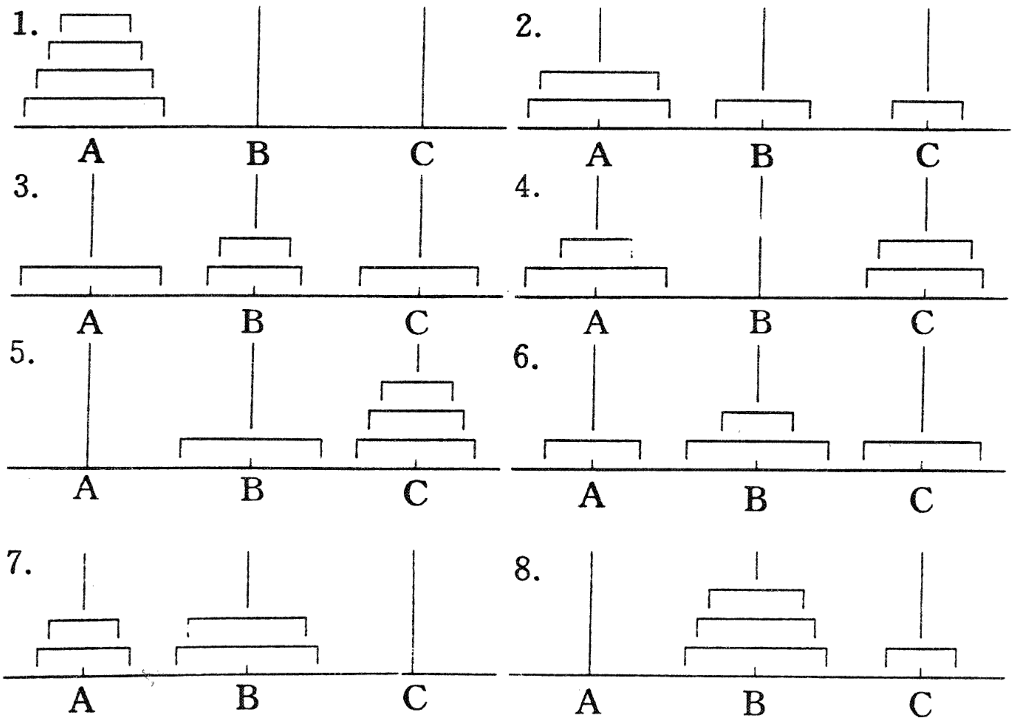
⇨$t_2=3$

若 n=3，

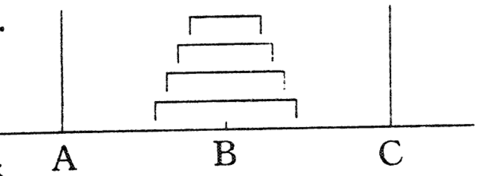


⇨$t_3=7$

若 n=4，



9.



⇨$t_4=15$

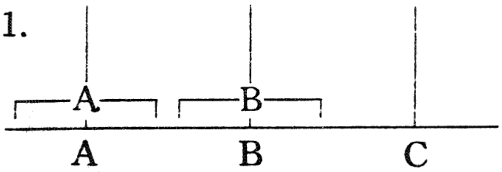
結果：

若
- $n=1$⇨$t_1=1$
- $n=2$⇨$t_2=3$
- $n=3$⇨$t_3=7$
- $n=4$⇨$t_4=15$，其規律待“結論”欄內研究。

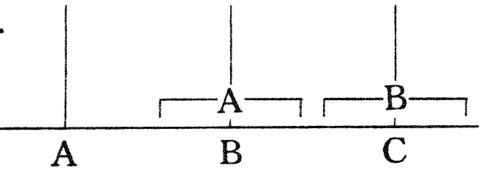
假設有兩個柱子上有圓片，則

若 $n=1$，

1.



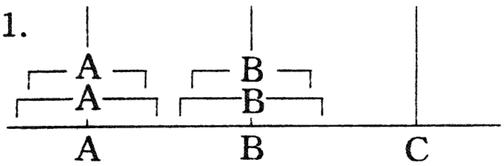
2.



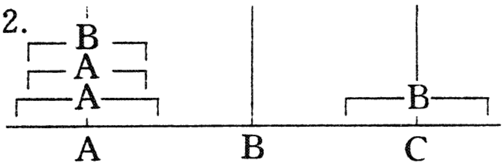
⇨$t_1=2$

若 $n=2$，

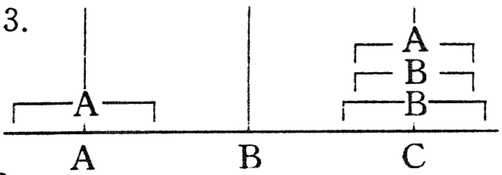
1.



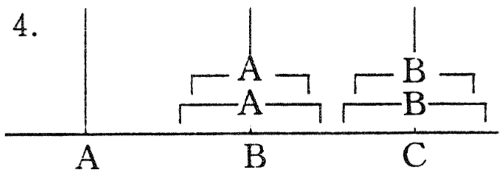
2.



3.



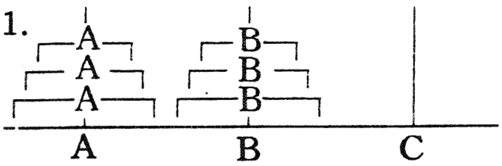
4.



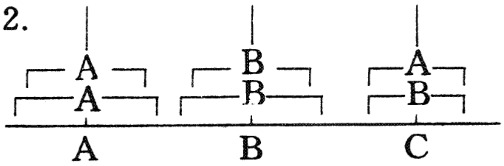
⇨$t_2=6$

若 $n=3$，

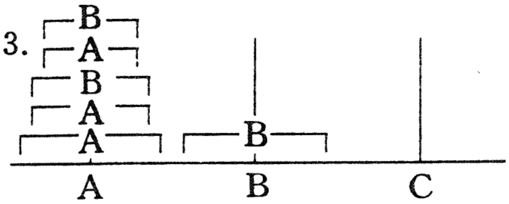
1.



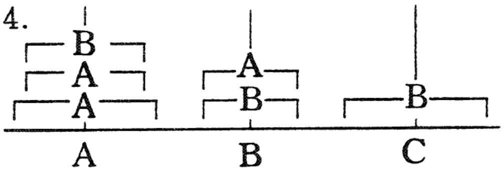
2.



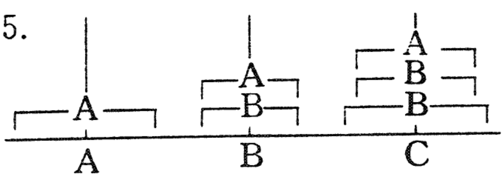
3.



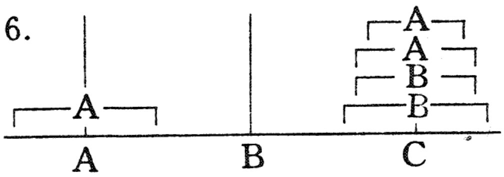
4.

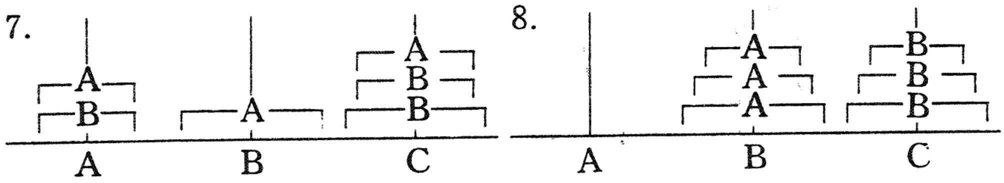


5.



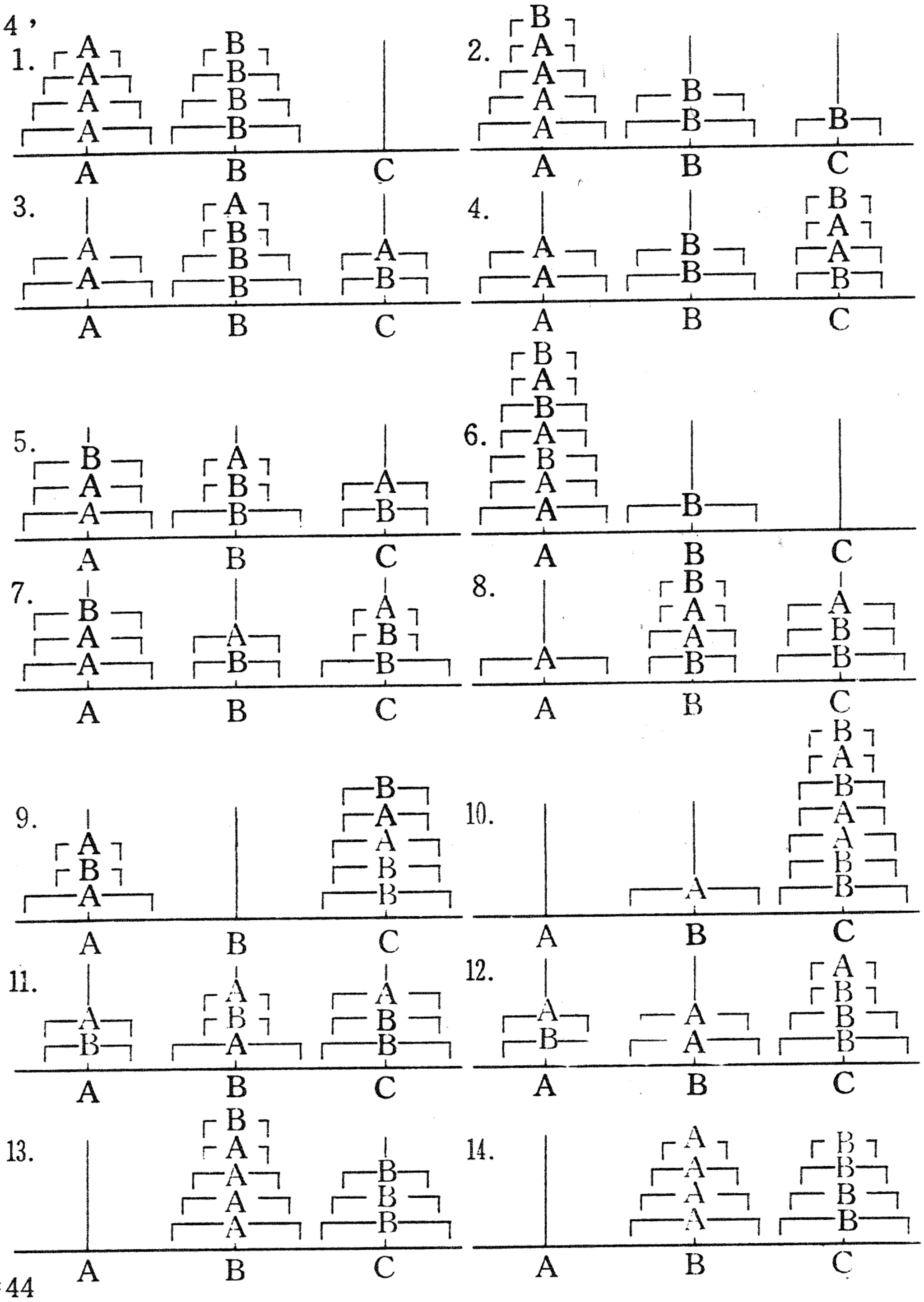
6.





⇨$t_3=18$

若 $n=4$，



⇨$t_4=44$

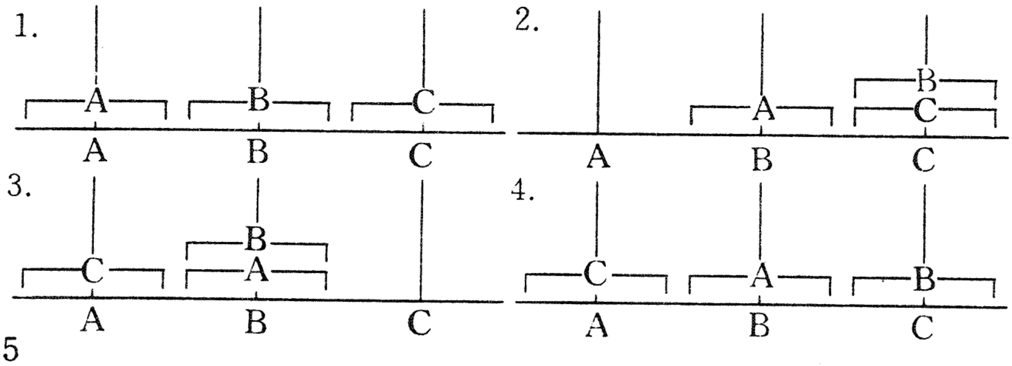
結果：

若
- $n=1$⇨$t_1=2$
- $n=2$⇨$t_2=6$
- $n=3$⇨$t_3=18$

└ $n=4$ ⇨ $t_4=44$，其規律待“結論”欄内研究。

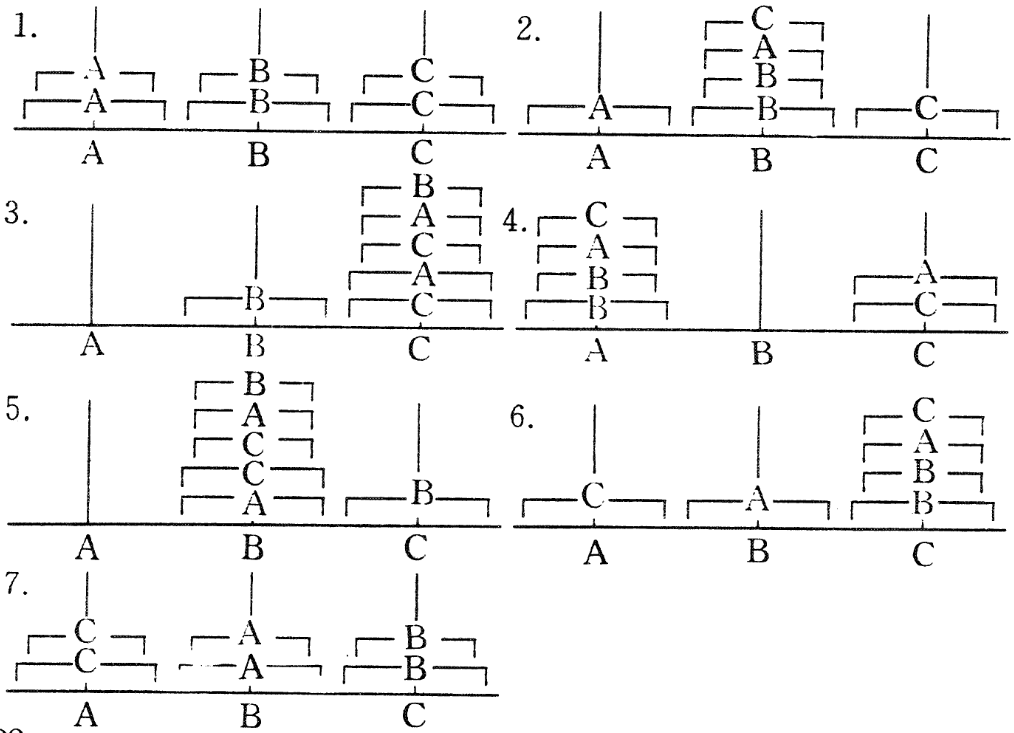
假設有三個柱子上有圓片，則

若 $n=1$，



⇨ $t_1=5$

若 $n=2$，



⇨ $t_2=22$

結果：

若 ┌ $n=1$ ⇨ $t_1=5$

└ $n=2$ ⇨ $t_2=22$，其規律待“結論”欄内研究。

五、研究結果

假設只有一根柱子上有圓片。（ n 爲圓片數，t_n 爲最少步驟數 ）

若 ┌ $n=1$ ⇨ $t_1=1$

├ $n=2$ ⇨ $t_2=3$

└ $n=3$ ⇨ $t_3=7$

$n=4 \Rightarrow t_4=15$

假設有兩個柱子上有圓片，則

若 $\begin{cases} n=1 \Rightarrow t_1=2 \\ n=2 \Rightarrow t_2=6 \\ n=3 \Rightarrow t_3=18 \\ n=4 \Rightarrow t_4=44 \end{cases}$

假設有三個柱子上有圓片，則

若 $\begin{cases} n=1 \Rightarrow t_1=5 \\ n=2 \Rightarrow t_2=22 \end{cases}$

六、結論

(一)假設只有一根柱子上有圓片。

在過程中，我們可以發現必須把上面 $n-1$ 個圓片移至 C 後（需 t_{n-1} 步），再將最大圓片移至 B（需 1 步），最後將移至 C 的 $n-1$ 個圓片移回 B（需 t_{n-1} 步）。

所以需 $t_n=t_{n-1}+1+t_{n-1}=2t_{n-1}+1$

且由 $\begin{cases} n=1 \Rightarrow t_1=1 \\ n=2 \Rightarrow t_2=3 \\ n=3 \Rightarrow t_3=7 \\ n=4 \Rightarrow t_4=15 \end{cases}$

可推得壹個式子：$t_n=2^{n-1}$

以數學歸納法證明之：

1. 當 $n=1 \Rightarrow t_1=2^1-1$，成立
2. 設 $n=k$ 成立 $\Rightarrow t_k=2^k-1$，成立
3. 當 $n=k+1$ 時 $\Rightarrow t_{k+1}=2t_k+1=2(2^k-1)+1=2^{k+1}-1$

由 1.2.3. 及數學歸納法得證。

如果我們假設有二或三個柱子上有圓片，則可以發現：

(二)有二個柱子時，其完成所需之步驟數

＝造壹個大塔〔$2(n-1)$個圓片〕之步驟數＋1＋移壹個大塔〔$2(n-1)$個〕之步驟數＋1＋拆壹個大塔〔$2(n-1)$個〕之步驟數 ……………………………………(1)

在過程中可發現：

造（拆）個大塔〔$2(n-1)$個圓片〕之步驟數

＝移壹個大塔〔$2(n-1)$個〕之步驟數＋1＋造（拆）壹個大塔〔$2(n-2)$個圓

片〕之步驟數＋(n－2)⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(2)

然而我們從"只有一圓柱上有圓片"的結果中可發現，(2)式中"移大塔"所需的步驟數$=2(2^{n-2}-1)(n>=3)$

⇨$(2)=2(2^{n-2}-1)+1+$造（拆）壹個大塔〔2(n－2)個圓片〕之步驟數＋(n－2)

⇨造（拆）壹個大塔〔2(n－1)個圓片〕之步驟數

$$=2^n+\frac{n^2-5n}{2}(n>=2)$$

由於 n＝1 時，並不需要進行分解步驟中的"造壹個大塔"，"移壹個大塔"，"拆壹個大塔"等三步驟，故證明時由 n＝2 開始。

以數學歸納法證明之〔S_n＝造（拆）壹個大塔〔2(n－1)個圓片〕之步驟數，k>=2〕

1. 當 n＝2 時⇨$S_2=2^2+\frac{n^2-5n}{2}=1$ 成立

2. 設 n＝k 成立⇨$S_k=2^k+\frac{k^2-5k}{2}$成立

3. 當 n＝k＋1 時⇨$S_{k+1}=2(2^{k-1}-1)+1+S_k+(k+1-2)$

$$=2(2^{k-1}-1)+1+(2^k+\frac{k^2-5k}{2})+(k+1-2)$$

$$=2^k-2+1+2^k+\frac{k^2-5k}{2}+k-1$$

$$=2^{k+1}+\frac{(k+1)^2-5(k+1)}{2}$$

由 1.2.3. 及數學歸納法得證。

從"只有一圓柱上有圓片"的結果中可發現，(1)式中"移大塔"所需的步驟數

$$=2(2^{n-1}-1)(n>=3)$$

$$⇨t_n=2(2^n+\frac{n^2-5n}{2})+2(2^{n-1}-1)+2$$

$$=3\times2^n+n^2-5n(n>=2)$$

以數學歸納法證明之(k>=2)

1. 當 n＝2 時⇨$t_2=3\times2^2+2^2-5\times2=6$ 成立

2. 設 n＝k 成立⇨$t_k=3\times2^k+k^2-5k$ 成立

3. 當 $n=k+1$ 時⇨$t_{k+1}=2(2^{k+1}+\frac{(k+1)^2-5(k+1)}{2})+2(2^{k+1-1}-1)+2$

$=3\times2^{k+1}+(k+1)^2-5(k+1)$

由 1.2.3. 及數學歸納法得證。

(三)有三個柱子時，其完成所需之步驟數

＝造壹個大塔〔3(n－1)個圓片〕之步驟數＋1＋移壹個大塔〔3(n－1)個〕＋1＋移壹個大塔〔3(n－1)個〕之步驟數＋2＋移壹個大塔〔3(n－1)個〕之步驟數＋1＋移壹個大塔〔3(n－1)個〕之步驟數＋1＋拆壹個大塔〔3(n－1)個〕之步驟數……………………………………………………………………(3)

在過程中可發現：

造（拆）壹個大塔〔3(n－1)個圓片〕之步驟數

＝移壹個大塔〔3(n－2)個〕之步驟數＋1＋移壹個大塔〔3(n－2)個〕之步驟數＋1＋造（拆）壹個大塔〔3(n－2)個圓片〕之步驟數 ……………………………(4)

然而我們從"只有一圓柱上有圓片"的結果中可發現，(4)式中"移大塔"所需的步驟數$=3(2^{n-2}-1)(n>=3)$

⇨$(4)=2\times3(2^{n-2}-1)+2+$造（拆）壹個大塔〔3(n－2)個圓片〕之步驟數

⇨造（拆）壹個大塔〔2(n－1)個圓片〕之步驟數

$=3\times2^n-4n-2(n>=2)$

由於 $n=1$ 時，並不需要進行分解步驟中的"造壹個大塔"，"移壹個大塔"，"拆壹個大塔"等三步驟，故證明時由 $n=2$ 開始。

以數學歸納法證明之〔S_n＝造（拆）壹個大塔〔2(n－1)個圓片〕之步驟數，$k>=2$〕

1. 當 $n=2$ 時⇨$S_2=3\times2^2-4\times2-2=2$ 成立

2. 設 $n=k$ 成立⇨$S_k=3\times2^k-4k-2$ 成立

3. 當 $n=k+1$ 時⇨$S_{k+1}=2\times3(2^{k+1-2}-1)+2+S_k$

$=2\times3(2^{k-1}-1)+2+S^k3\times2^k-4k-2$

$=3\times2^{k-1+1}-6+2+3\times2^k-4k-2$

$=3\times2^k-6+3\times2^k-4k$

$=3\times2^{k+1}-4(k+1)-2$

由 1.2.3. 及數學歸納法得證。

從"只有一圓柱上有圓片"的結果中可發現，(3)式中"移大塔"所需的步驟數

$=3(2^{n-1}-1)(n>=3)$

⇨$t_n=2(3\times2^n-4n-2)+4\times3(2^{n-1}-1)+6$

$=3\times2^{n+2}-8n-10(n>=2)$

以數學歸納法證明之$(k>=2)$

1. 當 $n=2$ 時$\Rightarrow t_2=3\times2^{2+2}-8\times2-10=22$ 成立

2. 設 $n=k$ 成立$\Rightarrow t_k=3\times2^{k+2}-8k-10$ 成立

3. 當 $n=k+1$ 時$\Rightarrow t_{k+1}=2[3\times2^{k+1}-4(k+1)-2]+4\times3(2^{k+1-1}-1)+6$
$=3\times2^{k+3}-8(k+1)-10$

由 1.2.3. 及數學歸納法得證。

七、討論

在此次研究中，不論是二、三個柱子上有圓片，其上之圓片數 n 皆相同，若每個柱子上的圓片數不同時則會有何規律呢？而其中又有大、小之分非常複雜，故這個問題還希望各位先進能不吝加以指導。

河內塔程式：（需倚天）

```
10  KEY OFF
20  CLS: PRINT: PRINT"……請鍵入 N 值：……"
30  K$=INPUT$(1): LOCATE 2.45: PRINT K$::
31  N=VAL(K$): DIM A$(N, 2^N)
32  LOCATE 10, 35: PRINT"請稍候……"
39  FOR D=1 TO N
41  FOR C=1 TO 2^(D-1)
45  A$(D, C)="1"
46  NEXT C
50  FOR S=1 TO 2^(N-D)
60  IF N-2*INT(N/2)=0 THEN 80
63  IF D-2*INT(D/2)=0 THEN 82
65  ABC=5: FOR T=1 TO 2^D
70  A$(D, 2^(D-1)+2^D*(S-1)+T)=STR$(ABC+S-3*INT(ABC+S-
    2)/3)-1)
71  IF 2^(D-1)+2^D*(S-1)+T=2^N THEN 90
75  NEXT T: GOTO 90
80  IF D-2*INT(D/2)=0 THEN 65
82  ABC=3: FOR T=1 TO 2^D
83  A$(D, 2^(D-1)+2^D*(S-1)+T)=STR$(ABC-S-3*INT(ABC-
```

```
    S)/3)+1)
84  IF 2^(D-1)+2^D*(S-1)+T=2^N THEN 90
85  NEXT T
90  NEXT S
110  NEXT D
900  LOCATE 10.35: PRINT SPACE$(10)
999  K$=CHR$(27): PRINT K$; "L 10, 330, 630, 335, BF;"
1000  FOR R=1 TO N
1005  A=10+5*R: B=310-20*(R-1): C=120-5*R: U=325-20*(R-1)
1010  K$=CHR$(27): PRINT K$; "L"A", "B", "C", "U", B;"
1020  NEXT R
1030  LOCATE 16-N, 7: PRINT"A"; SPACE$(13); "B"; SPACE$(13); "C";
1100  FOR W=1 TO N
1110  B(1)=B(1)+2
1120  NEXT W
1130  B(2)=O: B(3)=0
1999  FOR J=1 TO 2^N-1
2000  FOR H=1 TO N
2005  M1$=A$(H, 1+(J-1))
2006  M2$=A$(H, 1+(J-1)+1)
2010  IF M1$<>M2$ THEN 3050
2020  NEXT H
3050  PRINT K$; "SD0, L" 15*VAL(M1$)+100*(VAL(M1$)-1)+5*(N-
      H)", "310-20*((B(VAL(M1$)))/2-1)", "115*VAL(M1$)-5*(N-
      H)", "325-20*((B(VAL(M1$)))/2-1)", B;"
3060  PRINT K$; "SD7;"
3070  PRINT K$; "L"15*VAL(M2$)+100*(VAL(M2$)-1)+5*(N-H)",
      "310-20*((B(VAL(M2$)))/2+0)", "115*VAL(M2$)-5*(N-H)",
      "325-20*(B(VAL(M2$)))/2+0)", B;"
3071  FOR EE=1 TO 1000: NEXT EE: LOCATE 15, 55: PRITN"已移動步
      驟數"；J；"步"
3075  B(VAL(M2$))=B(VAL(M2$))+2
3080  B(VAL(M1$))=B(VAL(M1$))-2
```

```
5000  NEXT J; ERASE A$: LOCATE 18, 50：PRITN"按任意鍵繼續或 X 跳
      出……"：U$＝INPUT$(1)
6000  IF U$＝"X" OR U$＝"x" THEN BEEP: SYSTEM
7000  GOTO 20
```

八、參考資料

1. 河內塔與它的變型　冼鏡光　PC MAGAZINE 微電腦傳真雜誌

   Volume 10 No. 9 p.151−160

   Volume 10 No. 10 p.157−166

   Volume 10 No. 11 p.160−168

2. BASIC 指令函數字典　瑩圃出版　1990
3. BASIC 語言實務　施威銘著　旗標出版　1991
4. 高中基礎數學第壹册

評語

此生能從雜誌上擷取問題來做，是做數學科展研究的好手。所做結果論證完整，且能比較、創新，對於河內之塔一類的問題，有很深入的研究。希望將來更能推陳出新。