豆豆發芽的探討

國中組數學科第一名

嘉義市大業國中

作　　者：陳靜儀、林威宇

張家芸、蘇碩偉

指導教師：曾　玉、趙啓蒼

一、研究動機

暑假上科學營時，老師教我們玩發芽(sprout)遊戲，愈玩愈好奇，越劃越多，漸漸浮現出變化規則，而引起我們的研究興趣，於是共同探討發芽的變化，以掌握勝利要訣。甚至用電腦來玩，從螢幕上看到具體的現象，建立直接基礎，以激發想像力與創造力。

二、研究目的

(一)探討遊戲規則和生成法則。

(二)利用數學理論探討必勝策略，研創出「勝利要訣」。

(三)利用電腦媒體於日常遊體中來增加研究數學的興趣。

三、研究設備器材

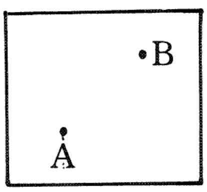
紙，筆，電腦，滑鼠，印表機。

四、研究過程

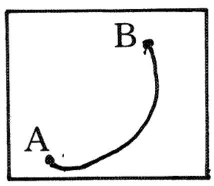
(一)遊戲規則：

1. 在紙上或螢幕上定好任意多點。
2. 玩時二人輪流在點與點間作聯線，並在聯線上加一點（長新芽）。
3. 每一點容許三線引出，有線穿過的點視爲已有二線引出。
4. 注意事項：（略）

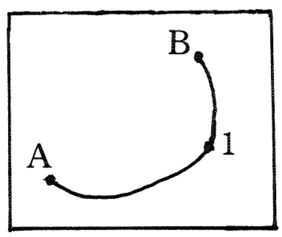
(二)聯結圖例：



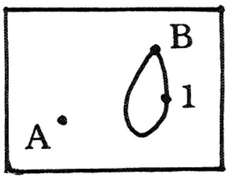
在紙上給 A、B 二點



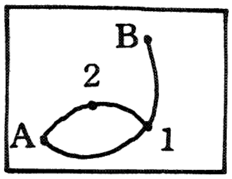
以簡單曲線聯結 A、B 二點



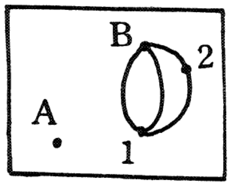
把 A、B 聯結曲線上加一新芽 1 點，〈視爲已二線引出〉



B（或A）點也可以自聯線長一新芽1點此B、1芽均視爲已有二線引出。



A、1聯結再長2點劃1點已盼出三線視爲死點不能再聯結。



B、1再聯結長出2點　B、1點均引出三線爲死點不能再聯結。

㈢各種不同點數繪出圖型情況：（請參考㈥項結論）

㈣生成法則：

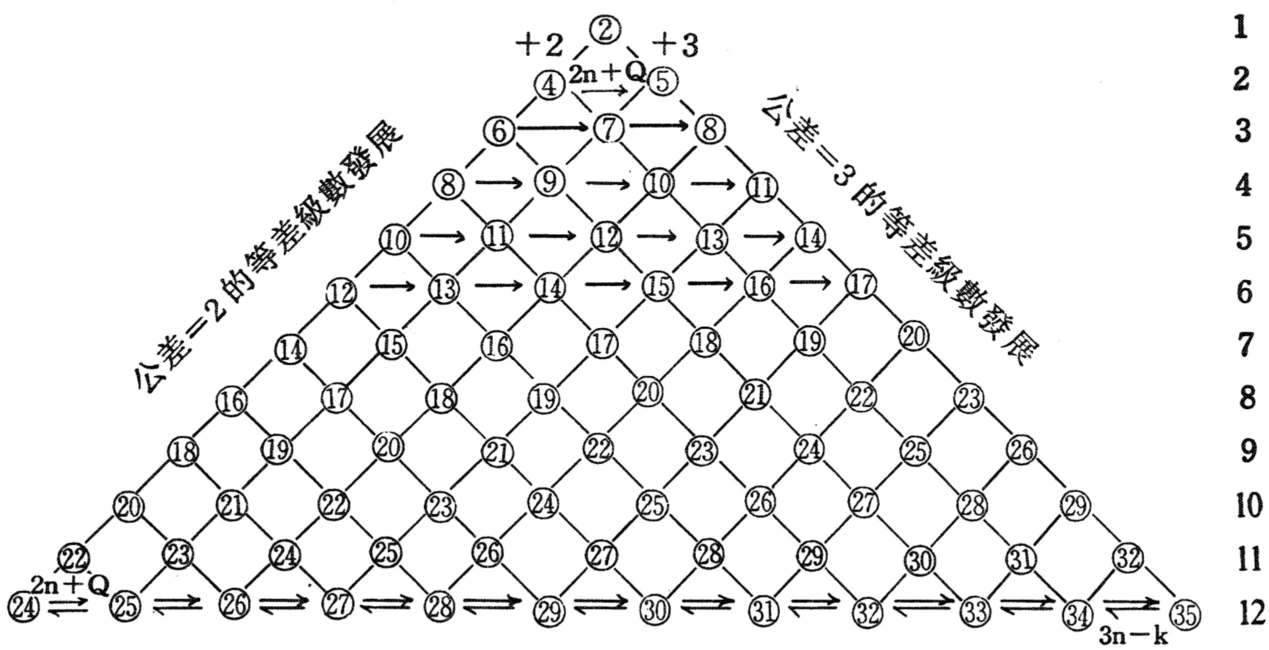
由各種點數所能走的步數，我們發現點數(n)和能走的步數(m)的關係。

1. 對於一定點數存在了最少的步數(2n)和最高可能走的步數(3n－1)。
   則m值在於 $2n \leq m \leq 3n-1$
   (1)由於 $n=1$ 點時，也可以走 $m=2$ 步
   假設每點都被孤立時　∴n點最少也能走2n步。
   (2)由於每一點可以引出三條線，因此每一點可視爲有三條生命。(3n)而每聯結一點用掉n點中的二條生命。同時由於聯結線上加一點新芽而產生一條生命。　∴n點最多能走 $m=3n-2+1=3n-1$
   (3)設被孤立的芽數 $=k(1 \leq k \leq n)$
   則能走的步數 $m=3n-k$
2. 由於 $m=3n-k$
   ∴只要控制k的數目，則m的步數必能控制。
3. 設：n點所能走的步數種類爲p
   則 $p=m_{max}-m_{min}+1$
   $=(3n-1)-(2n)+1=n$（步數種類等於點數）

㈤遊戲規則探討：（1.2.3.之探討分析省略）

4. 結論：除了一點具有“三生命”和聯結線上長一新芽的規則外，其他規定都無法適合。換言之！沒有其他方法替代本遊戲規則。所以才有其可玩性與趣味性。

㈥從以上的結果推演出（點數與走數）關係網狀圖。如下：



1. 說明：

(1)第一層代表所給的點數爲 1 點，第二層代表點數爲 2 點，餘此類推，第十二層代表所給的點數有 12 點。

(2)②，④，⑤……等等。其中阿拉伯數代表所走步數，如第三層的⑥⑦⑧代表給三點有 6，7，8 步三種走法。

(3)→同層自左向右表示 2n＋Q 逐一遞增，←同層自右向左表示 3n－k 逐一遞減。

(4)（第一層）一點走 2 步，剩下一個孤芽（二生命點）往左下方發展一層表示點數增加一點，孤芽數亦增加一個而成二個孤芽，因此步數增加二步成爲 4 步。往右下方發展一層表示點數增加一點，孤芽數沒有增加，因此步數增加三步成爲 5 步（表示增加一個“三生命”的點）餘此類推。

(5)如：第五層走 12 步其孤芽數爲 3 個，若往左下方發展一層，點數增加一點，孤芽數亦增加 1 個成爲 4 個應走 14 步結束，若往右下方發展一層點數增加一點孤芽數仍爲 3 個，則可走 15 步結束。

2. 分析：

(1)本圖的左向線自上往下成 d＝2 的等差級數，可以代表每增加一點最少有“二生命”右向線自上往下成 d＝3 的等差級數，亦即代表每增加一點最多有“三生命”。

(2)從圖中 2 點和 3 點，3 點和 4 點，4 點和 5 點……每點可走步數相異，（或相同）中可以發現：

2點	4、5、	
3點		6、7、8
相異步數	4、5、6、7、8五種	
相同步數		0

3點	6、7、8	
4點		8、9、10、11
相異步數	6、7、	9、10、11五種
相同步數	8	1

4點	8、9、10、11	
5點		10、11、12、13、14
相異步數	8、9	12、13、14　五種
相同步數	10、11	2

(n−1)點　2(n−1)，2(n−1)+1，2(n−1)+2

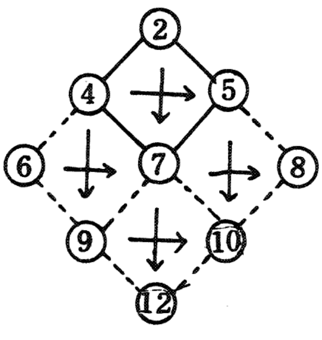
……3(n−1)−3，3(n−1)−2，3(n−1)−1

	2n−2	2n−1	2n	3n−6	3n−5	3n−4
n點			2n，2n+1……3n−5，3n−4，3n−3，3n−2，3n−1			
相異步數	2n−2，	2n−1，			3n−3，3n−2，3n−1五種	
相同步數			2n，2n+1………………3n−4，			

則(3n−4)−2n+1

=n−3

(3)從圖中摘取相鄰四點所構成四邊形觀察：



(1)2+7=4+5⇨9

7−2=5

(5)5+10=7+8⇨15

10−5=5

(3)4+9=6+7⇨13

9−4=5

(4)7+12=9+10⇨19

12−7=5

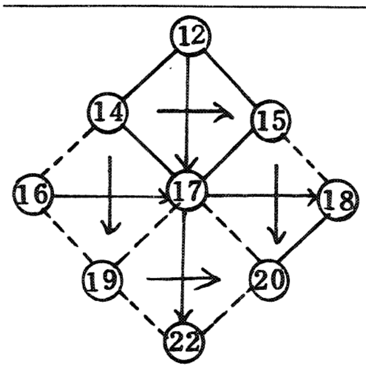
從九點所構成的四邊形觀察：

(1)2+7+12=21

(2)4+7+10=21

(3)5+7+9=21

(4)6+7+8=21



(1)12+17=14+15⇨29

17−12=5

(2)14+19=16+17⇨33

19−14=5

(3)17+22=19+20⇨39

22−17=5

(1)12+17+22=51

(2)16+17+18=51

(3)14+17+20=51

(4)15＋20＝17＋18⇨35　　(4)15＋17＋19＝51

20－15＝5

3. 結論：

(1)從分析 1 可以得知：

凡被隔離成羣者，最後必定產生一個“二生命”的孤芽。而相反的未被隔離的點必定具有“三生命”的聯結。

(2)從分析 2，3 得知

凡所給的點每增加一點，最少能增加 2 種聯結，最多增加 3 種聯結，即每增加一點，必能產生 2+3=5 的圖面步數變化。

(3)從分析 3 得知：

甲、所給點數與各種可能走的步數，產生規律性的增加。

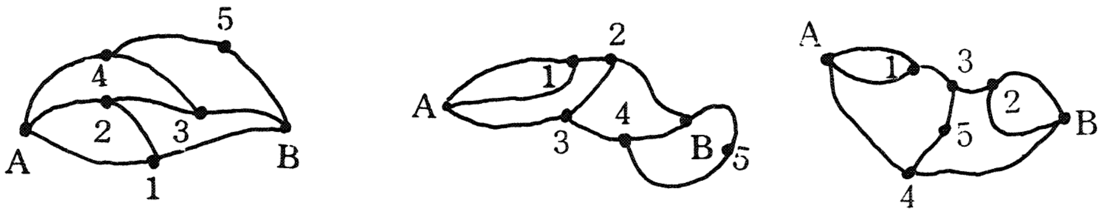
乙、從相鄰步數構成的稜形四邊形中又可發現另一有趣的數字遊戲。即經過中心點步數所串聯的 3 步數總和一定相等。

(4)由網狀關係圖觀察可以得知獲勝的策略：（分析如下）

A：1 點僅有 2 步一種走法，無論如何聯結都是後走者勝利。

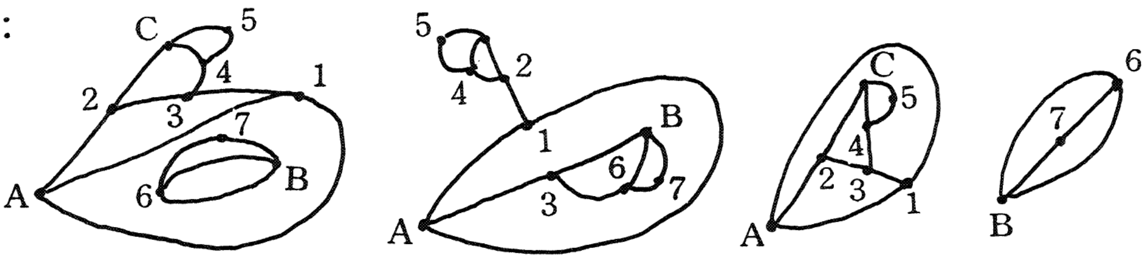
B：2 點能走 4，5 步兩種很明顯先走者勝利。

理由：先走者只要將兩點聯結不使其成爲兩個孤立體必能走完 5 步獲勝。



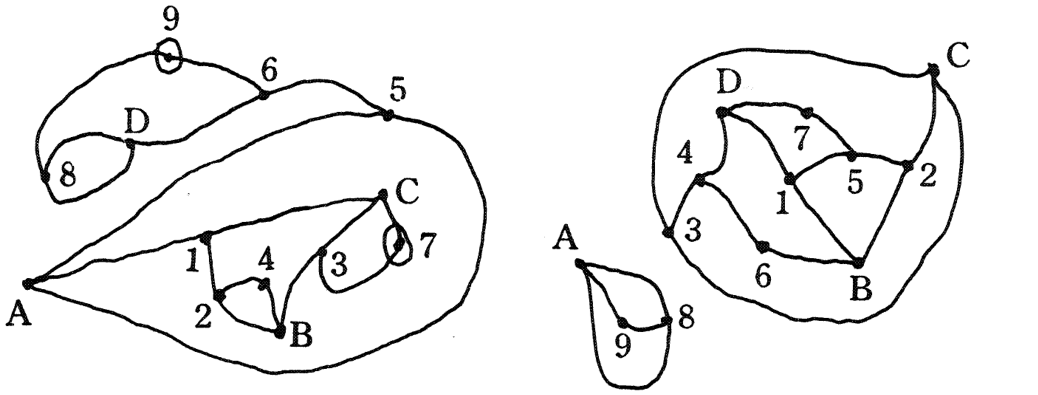
C：3 點能走的步數有 6，7，8 三種，先走者只要孤立一點必定走 7 步結束而勝利。

例如：



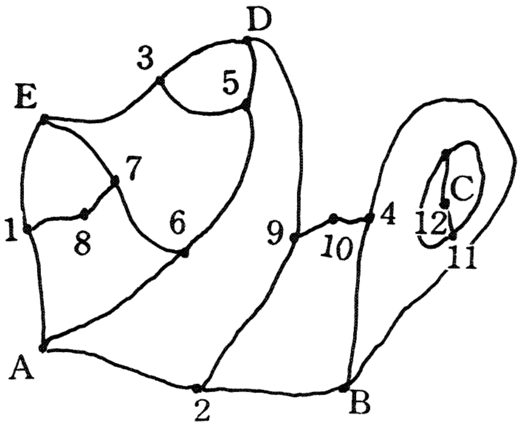
此三個圖例說明先走者只要將一點孤立起來，以後不論如何走法都走至 7 步結束。

D：4 點能走的步數有 8，9，10，11 步四種先走者有優先使 m＝3×4－3＝9 步的勝利優勢。

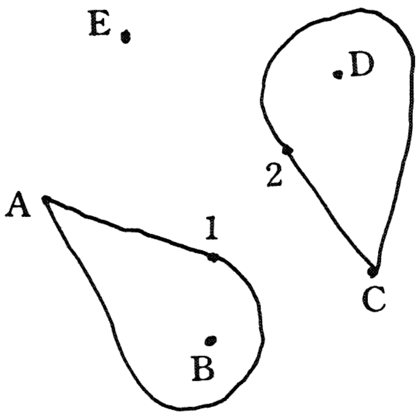


此圖例證明先走者有決定構成三個封閉體羣的絕對機會。

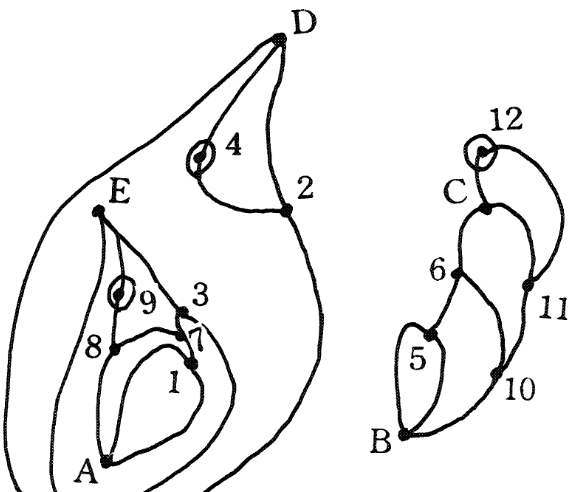
E：5 點能走的步數有 10，11，12，13，14 步五種，後走者有優先使 m＝3×5－3＝12 步的勝利機會。



最基本的區隔法。

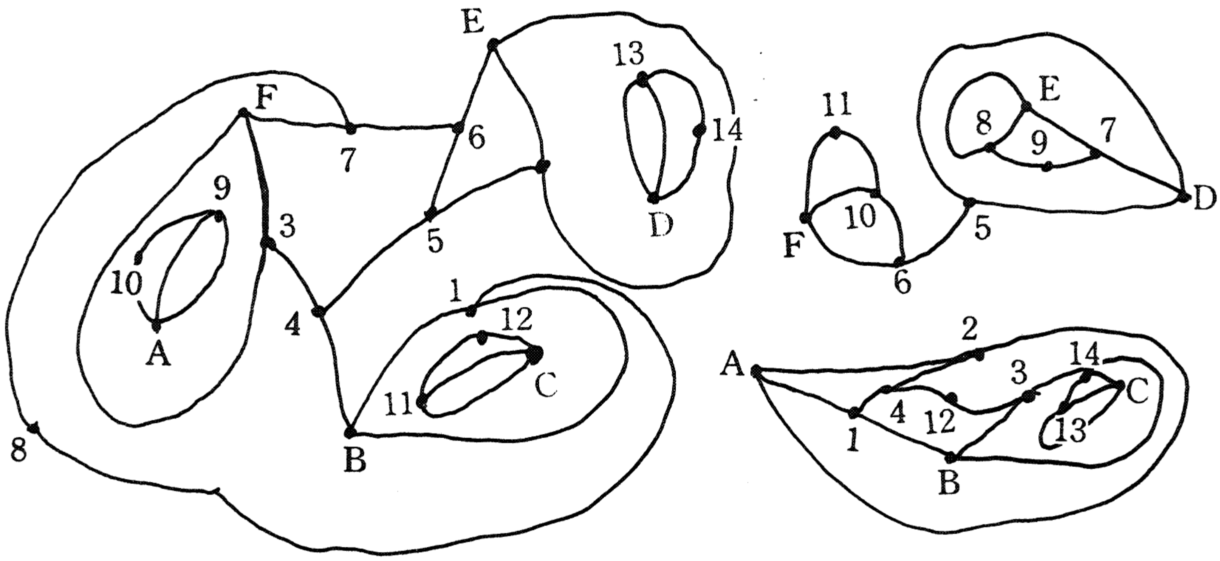


最基本的三個體羣。

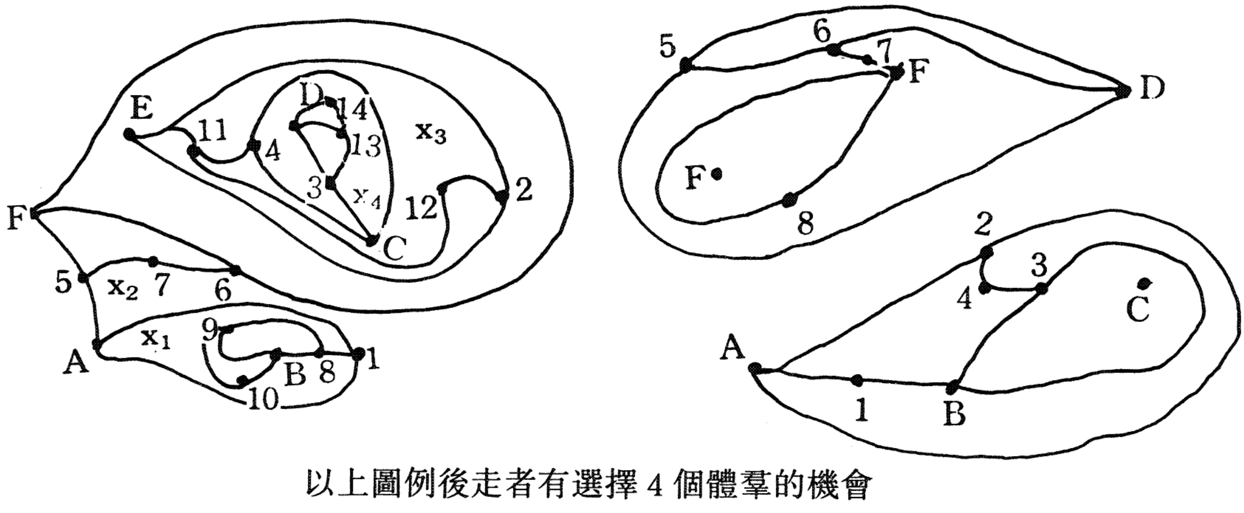


標準的 2，3 點 繪法。

F：6 點能走的步數有 12，13，14，15，16，17 步六種後走者獲勝機率較多。



如果先走者起步即採取孤立體羣方法，則後走者有絕對選擇，造成 4 個體羣機會走 14 步結束，後走者勝利。



以上圖例後走者有選擇 4 個體羣的機會

由以上圖證可以發現：。

(A)紙上所給的點數愈多，可變性愈多。可玩性越大，趣味性越增加。

(B)遊戲者必須掌握體羣的個數才能掌握勝利。

(C)一個體羣，必定留下一個"二生命"的孤芽。因此體羣的個數＝k

∴$m=3n-k$　爲本遊戲的必勝策略

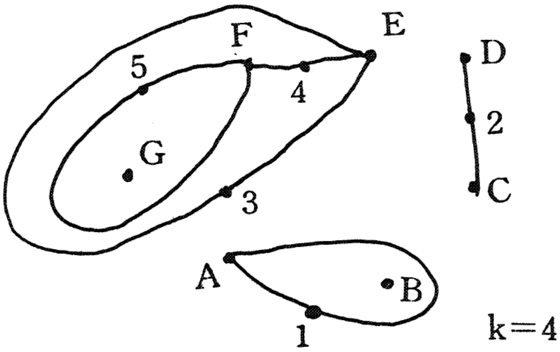
G：7 點可走的步數有 14、15、16、17、18、19、20 步七種，先走者很容易造成四個體羣而成

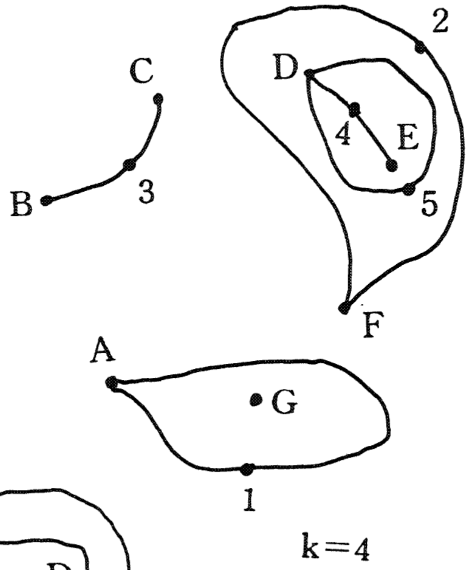
$m=3n-4$

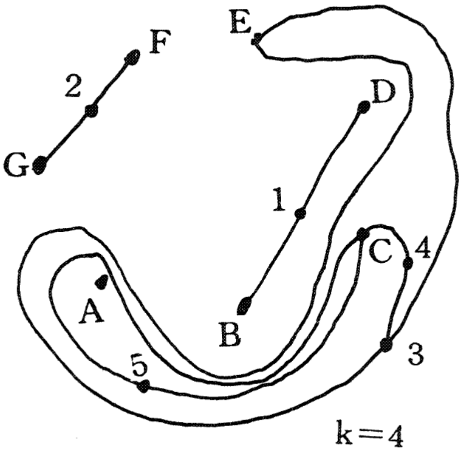
$=3\times7-4$

＝17 步結束。先走者獲勝。

例如：

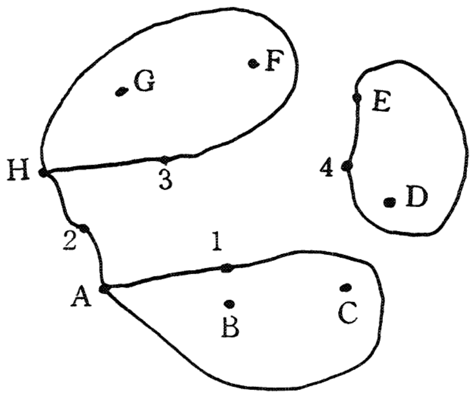






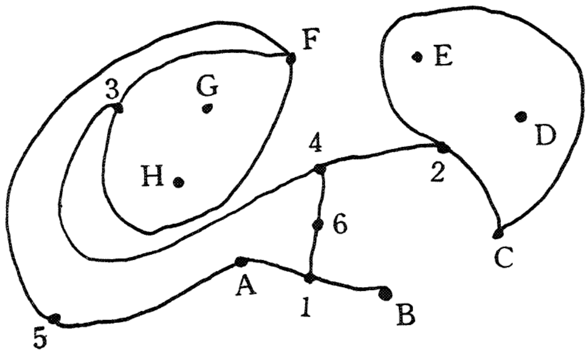
H：8 點可走的步數有 16，17，18，19，20，21，22，23 步八種。後走者容易構成四個體羣形成 m＝3×8－4＝20 步結束的獲勝機會。

〈A〉情況㈠



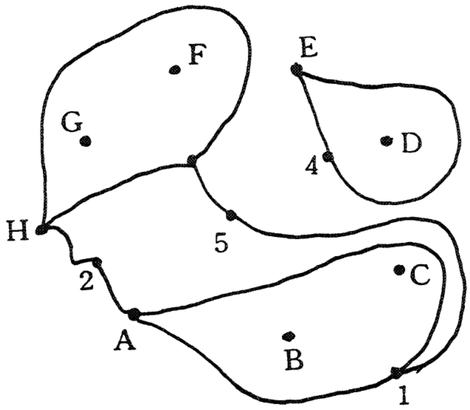
此圖構成四個封閉體羣，而後走者又有決定權故先走者必敗。

〈B〉情況㈡



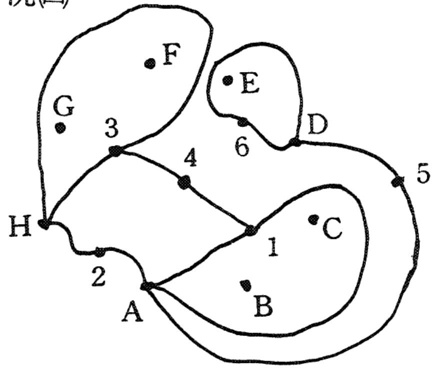
此圖表面構成二個體羣，但是外圍還有“七生命”而後走者又有選擇權所以較容易再區隔二個封閉體羣造成勝利。

〈C〉情況㈢



此圖係情況㈠先走者企圖將圈外區域，隔成二個體羣企圖造成五體羣而獲勝，後走者只要 2 或 5（或 2，5）外聯即可完成四體羣而獲勝。

〈D〉情況㈣



情況㈣證明後走者只要跟先走者構圖必能穩操勝利。

I：9 點可走的步數有 18，119，20，21，22，23，24，25，26 步九種。後走者容易構成五個體羣　使 m＝3×9－5＝22 步結束獲勝。

J：10 點可走的步數有 20，21，22，23，24，25，26，27，28，29 步十種，先走者較容易形成五個體羣　使 m＝3×10－5＝25 步結束獲勝。

K：11 點可走的步數有 22，23，24，25，26，27，28，29，30，31，32 步十一種可以構成六個體羣　使 m＝3×11－6＝27 步結束先走者獲勝。

L：12 點可走的步數有 24，25，26，27，28，29，30，31，32，33，34，35 十二種可以構成六個體羣，使 m＝3×12－6＝30 步結束後走者獲勝。

五、結論

根據以上的研究分析和再三探討，我們得到發芽遊戲的規則，同時研究完成“必勝策略”，突破了 Conway 和 Denis Mollison 的繪圖分析方法，因爲點數愈多聯結面必定增加，構圖也隨而更複雜，其中必然產生很多同構圖形而無法分辨，因此我們利用同構關係篩選同構圖保留異構圖以減少圖幅，並且建立“必勝策略”，因而要掌握勝利要訣，更能隨心所欲。

㈠電腦遊戲：

1. 二人利用滑鼠相互在電腦螢幕上繪製圖型，比賽勝負，並分析其必勝祕訣。
2. 利用電腦遊戲强化數學知能，提昇資訊教育功能，增加我們對數學的學習

精神及學習興趣。

㈡遊戲規則：

1. 發芽遊戲於 1967 年由英國數學家 J. Conway 和 M. Palerson 所創。它是利用拓撲學中的佐敦線定理，區隔平面裏外兩個區域(Region)。
2. 現在經過我們詳細探討研究，證明没有任何辦法，可以代替發芽遊戲規則。

㈢必勝策略：

1. 聯結步數：$m=3n-k$（M：步數。n：紙上所給的多數點。k：不能聯結的"二生命"孤芽數）。
2. 必勝因素：k：封閉體羣的個數＝不能聯結"二生命"孤芽數。
3. 決定封閉體羣因素：

(1)一個封閉體羣最少需要 2 點

∴封閉體羣個數 $k=n/2$。（小數進位）

(2)三點可以製作二個封閉體羣

∴封閉體羣個數 $k=(n\div3)\times2=\frac{2}{3}n$。（小數進位）

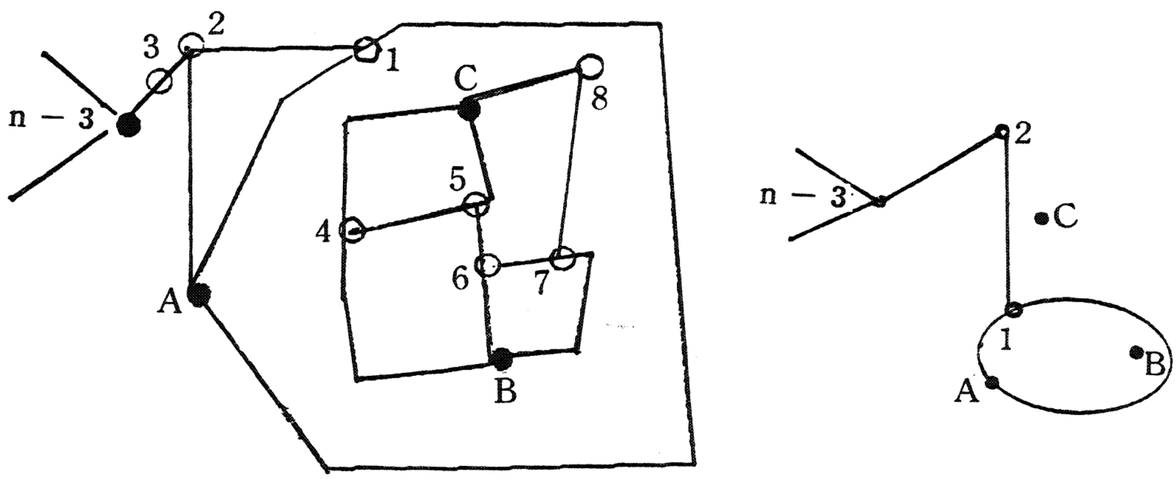
4. 點數多的時候我們爲了突破傳統的限制，研究完成"勝利要訣"——只要你能劃到剩下 3 點給對方去聯結，必定能掌握最後勝利，因爲要構成 1 個或 2 個孤立體羣，完全由後走者所控制。。

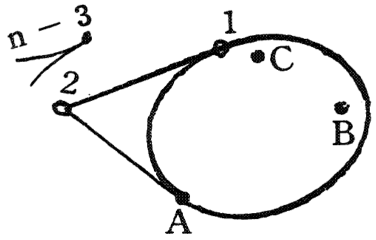
(1)發芽遊戲爲兩人玩的遊戲，因此勝負的關鍵在於所走的步數，如爲奇數步先走的贏，若是偶數步後走的贏來判斷。如果點數多點，必靠腦筋去動用「必勝策略」方能達到勝利。

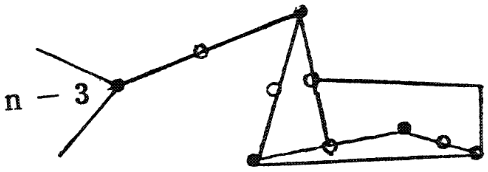
(2)剩下 3 點在理論上必定可以構成兩個體羣，而這兩個體羣又可以形成實際體羣（含芽），或空體羣（不含芽外聯已知點）。

(3)證明如下：

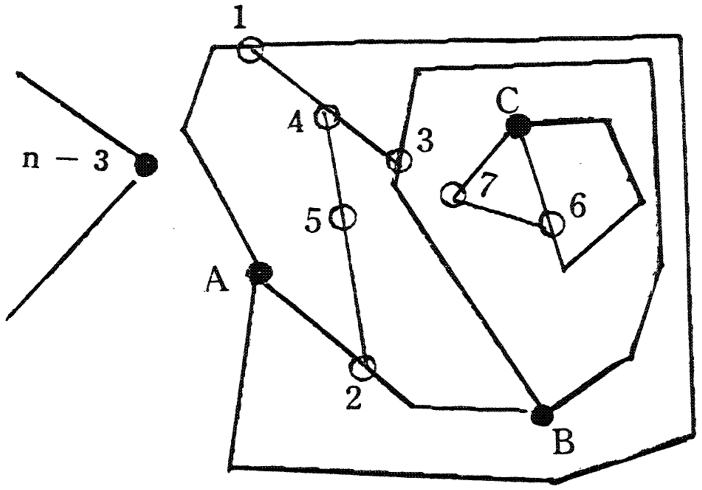
A.構成 1 個孤立體羣圖證：

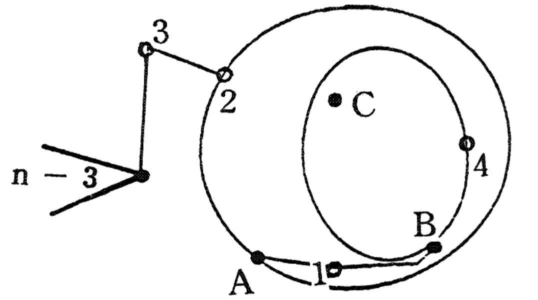


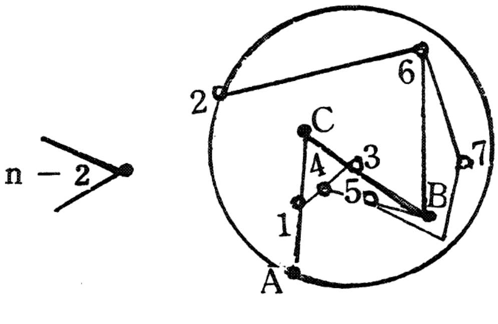


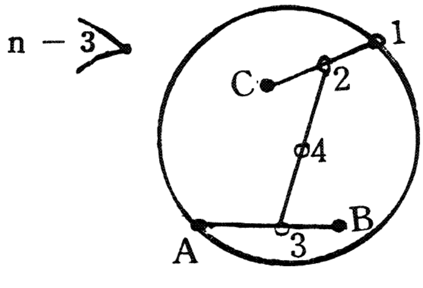


B. 構成 2 個孤立體羣圖證：









5. 茲將各種不同點數所走的步數繪製圖數，百分比及必勝策略，臚列如下表

：

點數	所給圖型	步																																	數	步數種類	必勝策略 m=3n−k	估優勢者
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35			
1	圖數	1																																		1	k=1 m=2	後走者
	百分比	100																																				
2	圖數			10	34																															2	k=1 m=5	先走者
	百分比			22.73	77.27																																	
3	圖數					8	182	121																												3	k=2 m=7	先走者
	百分比					2.57	58.52	38.91																														
4	圖數							24	133	37	26																									4	k=3 m=9	先走者
	百分比							10.91	60.5	16.8	11.8																											
5	圖數									10	11	320	132	63																						5	k=3 m=12	後走者
	百分比									2.0	2.0	59.0	25.0	12.0																								
6	圖數											12	24	99	90	87	35																			6	k=4 m=14	後走者
	百分比											3.0	7.0	29.0	26.0	25.0	10.0																					
7	圖數													24	30	60	90	60	60	30																7	k=4 m=17	先走者
	百分比													6.7	8.3	16.8	26.3	16.8	16.8	18.3																		
8	圖數															12	28	18	25	67	30	20	23													8	k=4 m=20	後走者
	百分比															5.4	12.6	8.1	11.2	30.0	13.45	9.0	10.3															
9	圖數																	20	24	18	24	98	46	55	67	32										9	k=5 m=22	後走者
	百分比																	5.3	6.3	4.7	6.3	25.7	12.1	14.4	17.6	8.40												
10	圖數																			10	12	15	13	15	59	29	12	6	23							10	k=5 m=25	先走者
	百分比																			5	6	8	8	8	30	15	6	3	12									
11	圖數																					14	6	6	14	6	62	30	12	34	15	21				11	k=6 m=27	先走者
	百分比																					6.83	2.93	2.93	6.83	2.93	30.24	14.63	5.85	16.59	7.32	21.24						
12	圖數																							14	14	14	14	30	14	38	30	26	6	12	6	12	k=6 m=30	後走者
	百分比																							6.42	6.42	6.42	6.42	13.76	6.42	17.43	13.76	11.93	2.75	5.50	2.75			

附記：因篇幅關係部份說明，分析有所省略，敬請原諒並請參考說明書。

六、參考資料

(一)查孟華譯　數學遊戲(p.66～p.72)　抽芽遊戲

(二)劉涵初著　離散與組合數學(p.302～p.310)同構

評語

豆豆發芽原係 Conway（著名數學家）提出的數學遊戲，由於頗富變化，因此相當為人所知。此次作品藉著團體（全班）的努力，老師的全力協助（歸納）把這問題做出了一些不錯的結論，至少在贏的策略上，有很好的結論。