# Hanoi Tower 的推廣

## 高中組數學科第三名

省立武陵高級中學

作　　者：林俊榮、陳志弘

指導教師：盧澄根

## 一、研究動機

在玩 Games 時，我們發現 Hanoi Tower 的一些特性，因而引起研究 Hanoi Tower 的興趣。

## 二、研究目的

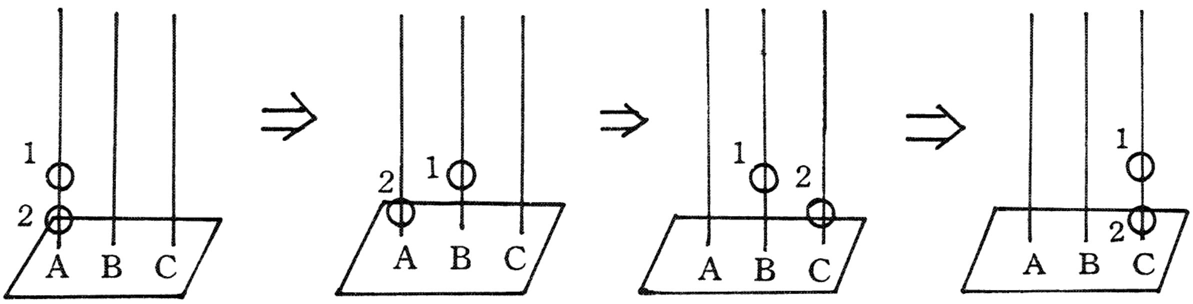
討論 Hanoi Tower 的搬運次數及其推廣。

## 三、研究內容

(一)首先定義 $f_n(x)$ 爲"在有 n 個柱情況下，x 個環由左邊搬移至右邊所需的最少的次數"，則 $f_n(x)=1$，$n\in N$ 且 $n\geqq 2$，令 $f_n(x)=S$

(二)當 $n=3$ 時

1. $x=1$ 時，$S=f_3(1)=1$
2. $x=2$ 時，唯一的搬運的方法是"（圖一）中把環 1 由柱 A 移至柱 B，再把環 2 移至柱 C，最後把環 1 移至柱 C"。則 $S=f_3(2)=f_3(1)+f_2(1)+f_3(1)=1$




3. $x=3$ 時，搬運方法有兩種（可能）

(1)把環 1，環 2 視爲一環用上列方法，則 $S=f_3(1)+f_2(1)+f_3(1)=7$

(2)把環 2，環 3 視爲一環，同上之方法，則 $S=f_3(1)+f_2(2)+f_3(1)$，但 $f_2(2)$ 爲無解，故不能這樣分。

4. $x=4$ 時，搬運方法可有 3 種

(1)視環 1，2，3 爲環，則搬運次數 $=2f_3(3)+f_2(1)=15$

(2)視環 1，2 爲一環，其餘的爲另一環，則搬運次數$=2f_3(2)+f_2(2)$，但 $f_2(2)$不存在，故不合

(3)視環 2，3，4 爲一環，搬運次數$=2f_3(1)+f_2(3)$，但 $f_2(3)$亦不存在，亦不合。

由上知"$f_3(x)=2f_3(x-1)+f_3(1)=2f_3(x-1)+1$"。則$<f_3(x)>$爲遞迴數列，可以求是 $f_3(x)=2^x-1$，唯一搬運方法則爲"有 n 個環的時候，把環 1，2，……，n－1 爲一環，這樣才可出 $f_3(x)$之值"

㈢n＝4 時

1. x＝1 時，搬運次數$=f_4(1)=1$
2. x＝2 時，可視爲 $f_3(2)$的搬運方法，則 $f_4(2)=f_3(2)=3$
3. x＝3 時，其中最快的搬運方法爲：（設四柱由左而右依序爲 a，b，c，d）把環 1，2，3 序移至 b，c，d 上，再把環 2，1 依序移至 d，則 $f_4(3)=2[f_4(1)+f_3(1)]+f_2(1)=5$
4. x＝4 時，，搬運方法可視爲：在二(3)中分成 3 組，即組(1, 2, 3)二環(12, 3, 4)or 環(1, 23, 4)，則 $f_4(4)=2[f_4(2)+f_3(1)]+f_2(1)=9$ or $f_4(4)=2[f_4(1)+f_3(2)]+f_2(1)=9$

   $f_4(4)$可化成 $f_4(3)+2[f_4(2)-f_4(1)$…… $\alpha$，即 $g(f_4(3))=2g(f_4(1))$or $f_4(4)=f_4(3)+2g(f_3(1))$…… $\beta$

   註：$g(f_n(x))=f_n(x+1)-f_n(x)$
5. x＝5 時，組(1, 2, 3)二環(1, 234, 5)or 環(12, 34, 5)or 環(123, 4, 5)

   前者 $S=f_4(3)+2[g(f_3(1))+g(f_3(2))]$

   中者 $S=f_4(3)+2[g(f_4(1))+g(f_3(1))]$

   後者 $S=f_4(3)+2[g(f_4(1))+g(f_4(2))]$

   令前中後三式爲$\gamma$，$\delta$，$\varepsilon$式

   $\because g(f_3(2))>g(f_4(1))=g(f_4(2))=2$，

   $\therefore f_5(4)=13$
6. 討論 $g(f_n(x))$之間的關係

   由$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，$\varepsilon$，$\delta$，五式中可看出"$g(f_n(x))=2\min\{g(f_a(b))\mid g(f_n(x))$未用過的$\}$，如果能證明此式成立，則所有的問題皆迎刃而解

   [Pf]：

   (1)當 $x\leq n-1$ 時，則 $f_n(x)=2[f_n(1)+f_{n-1}(1)+\cdots\cdots+f_{n-x+2}(1)]+f_{n-x+1}(1)$，則 $f_n(x)=2x-1$

   故 $g(f_n(x))=2=2\min\{g(f_a(1))\}$，$a\geq 3$

(2)當 $x \geq n$ 時，則 $f_n(x)=\min\ \{2[f_n(1+d_{n-2})+f_{n-1}(1+d_{n-3})+\cdots\cdots+f_3(1+d_1)]+f_2(1)\}$ ，令 $f_n(0)=0$

其中 $\sum_{i=1}^{n-2} d_i=x-n+1$，$d_i$ 爲非負整數

$$f_n(x)=\min\ \{2[f_n(1)+\sum_{i=0}^{d_{n-2}} g(f_n(i)]+\cdots\cdots+2[f_3(1)+\sum_{i=0}^{d_1} g(f_3(i)]+f_2(1)=f_n(n-1)+2\min\ \{\sum_{j=1}^{n-2}\sum_{i=0}^{d_j} g(f_{j+2}(i))\}$$

(3)令 S 集合 $\min\ \{\sum_{j=0}^{n-2}\sum_{i=0}^{d_j} g(f_{j+2}(i))\}$ 之中所有 $gf_{j+2}(i))$ 所形成的集合，

令T 爲 $\min\ \{\sum_{j=1}^{n-2}\sum_{i=0}^{d_j} g(f_{j+2}(i))$ 之中所有 $g(f_{j+2}(i))$ 元素。

利用鴿巢原理，則當 $x \geq n$ 時，集合 $\{b_j-d_j \mid j=1, 2, 3, \cdots\cdots, n-2\}$

其中至少可以找到一個 $|b_j-d_j|=1$，故可以找到一個不是屬於集合 T 或 S 的最小值 $g(f_a(b))$ 使 $g(f_n(x))=2g(f_a(b))$

其中 $b_j$ 爲 $f_n(x+1)$ 中 $d_j$ 之值，$d_j$ 爲 $f_n(x)$ 中 $d_j$ 之值

(四)$\because g(f_n(x))=2\min\ \{g(f_n(x))$ 未用過的 $g(f_a((b))\}$ ，且 $\min\ \{g(f_n(x))\}=1$

$\therefore g(f_n(x))=2^k$，$k \in N \cup \{0\}$

令 $y(n, a)$ 爲 $g(f_n(x))=2^a$ 之中 a 的個數

$\because y(3, 1)=1$

$\therefore y(3, 2)=1$

同理 $y(3, 3)=1$

⋮

⋮

$y(3, h)=1$，$h \in N$

又 $y(\ell, 1)=1$，$\ell \in N \setminus \{1, 2\}$

$\therefore y(\ell, 2)$ 必爲所有 $y(i, 1)$ 之和，$i=3, 4, 5 \cdots\cdots \ell$

依此推導下去

得 $y(\ell, h)=\sum_{i=3}^{l} y(i, h-1)$

則 $y(\ell-1, h)+y(\ell, h-1)$

$=\sum_{i=3}^{l-1} y(i, h-1)+y(\ell, h-1)$

$=\sum_{i=3}^{l} y(i, h-1)=y(\ell, h)$

故集合 $\{y(n, a)\}$ 成了巴斯卡三角形

(五)求 $f_n(x)$ 之通式

令 $x=\sum_{i=n-3}^{k} C_{n-3}^{i}+Q\cdots\cdots ⓐ$，其中 Q 爲常數，且 $O\leq Q<C_{n-3}^{k+1}$

由 $\sum_{i=n-3}^{k} C_{n-3}^{i}\leq x$，求出 k 之 max 值代入ⓐ中求 Q

$\therefore f_n(x)=\sum_{i=n-3}^{k}(C_{n-3}^{i}2^{i-n+3})+Q\times 2^{k-n+4}$

## 四、結論

(一)令 $f_n(x)$ 爲“在有 n 個柱情況下，把 x 個環由最左柱移至最右柱的最少次數”。

(二)由 $C_{n-2}^{k+1}=\sum_{i=n-3}^{k} C_{n-3}^{i}\leq x$，求出 k 之 max 值

$Q=x-\sum_{i=n-3}^{k} C_{n-3}^{i}$

則 $f_n(x)=\sum_{i=n-3}^{k}(C_{n-3}^{i}\times 2^{i-n+3})+Q\times 2^{k-n+4}$

## 五、參考資料

“數學程式”吳隆盛著，76 年出版

## 六、附錄

$f_n(x)$ 之值

$z=f_n(x)$

| x \ z \ n | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 3 | 7 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 4 | 15 | 9 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 5 | 31 | 13 | 11 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| 6 | 63 | 17 | 15 | 13 | 11 | 11 | 11 | 11 |
| 7 | 127 | 25 | 19 | 17 | 15 | 13 | 13 | 13 |
| 8 | 255 | 33 | 23 | 21 | 19 | 17 | 15 | 15 |
| 9 | 511 | 41 | 27 | 25 | 23 | 21 | 19 | 17 |
| 10 | 1023 | 49 | 31 | 29 | 27 | 25 | 23 | 21 |
| 11 | 2047 | 65 | 39 | 33 | 31 | 29 | 27 | 25 |
| 12 | 4095 | 81 | 47 | 37 | 35 | 33 | 31 | 29 |

## 評語

本主題有其深度，作者對於內容有深入之研究，可惜對於研究結果未能有系統表達。對於數學證明過程之表達不佳。若能在這些方面加以改進，將來在數學研究上必有可爲。