對稱研究

高中組數學科第三名

臺灣省立嘉義高中

作　　者：陳嘉維、湯頌君

江宗賢、陳煥昭

指導教師：張兆嘉

一、研究動機

坊間一般教科書中曾提及對於「對稱」問題的敍述，並且略涉及其判別法則。好奇之餘，引起吾人深入研究之。

二、研究目的

(一)考慮平面上對稱軸數目及分佈。

(二)將對稱原理應用於代數曲線。

(三)考慮作圖方法。

(四)推廣於空間中。

三、研究過程

(一)考慮平面上對稱軸數目及其分佈。

1. 先考慮對稱軸無限多之情形，其中有二者需注意。

定理一：若有二對稱軸互相平行，則必有無限多對稱軸，且這些對稱軸皆平行。

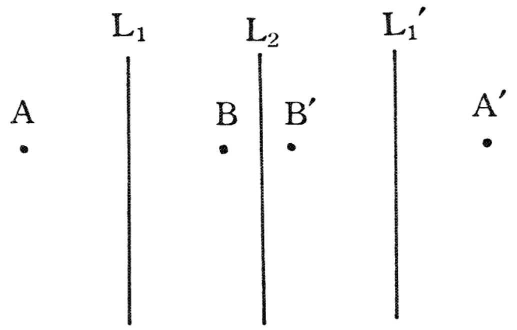


fig.1

證明：設 $L_1//L_2$ 皆爲對稱軸，A、B 對稱於 L_1。由於 L_2 亦爲對稱軸，由對稱可得 $A'B'$，將 AB 變動，亦可得 L_1' 爲圖形之對稱軸。由此類推，可得無限多且平行之對稱軸。（註：如正弦函數之圖形即是一例）

定理二：若過某一點的直線皆爲該圖形的對稱軸，則圖形爲圓（可爲許多同心圓）

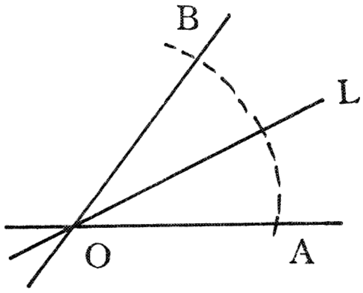


fig.2

證明：令 O 爲對稱軸交點，A 爲圖形上一點，則 B 爲與 O 距離 $\overline{OA}$ 之點。A、B 中垂線 L 過 O，由假設可知，L 爲對稱軸，即 B 亦於圖形上，所以與 O 距離 $\overline{OA}$ 之點皆在圖形上。故此圖形爲半徑 $\overline{OA}$ 之圓。

2. 其次討論對稱軸有限的情形，欲證明「對稱軸有限，則對稱軸共點，且兩兩互夾等角」。先證幾個支理：

定理三：若有二對稱軸相交，夾角 θ，$\frac{360}{\theta} \notin Q$，則有無限多條對稱軸皆過此交點。

證明：同定理一之證明，可得 L_1'（見 fig.3），（L_1' 與 L_2 夾 θ 角，且亦過 O）亦爲對稱軸，但因 $\theta \neq \frac{360^\circ}{q}$，$q \in Q$，依此法數次，$n\theta = \frac{n}{q} \cdot 360^\circ$，不可能重合於 L_1，不呈一循環，所以對稱軸有無限多條。

定理四：若有 n 條對稱軸（n 爲有限）交於一點，則對稱軸互夾 $\frac{180^\circ}{n}$ 的角度。

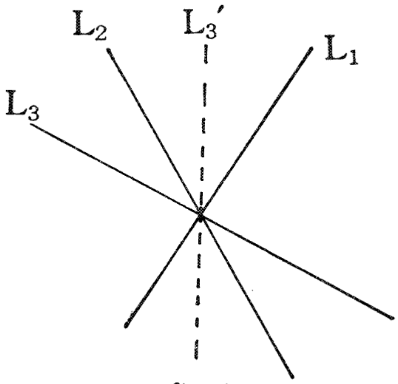


fig.4

證明：令 n 條對稱軸爲 $L_1, L_2, \cdots\cdots L_n$，若角 $L_1L_2 >$ 角 L_3L_2，則於 L_1L_2 間將有一對稱軸 L_3，不合。角 $L_1L_2 > L_3L_2$ 亦然，故二者夾角相等，如此得角 $L_1L_2 = L_2L_3 = \cdots\cdots L_nL_1$，故彼此夾 $\frac{180^\circ}{n}$ 的角度。

定理五：若有 n 條對稱軸交於一點 O，以複數來表示該平面，並以 L_1 爲實軸，A 爲圖形中一點，令 $A = r \cdot e^{i\theta}$（$\theta < \frac{180^\circ}{n}$），則 $re^{i\theta} \cdot w^k$ 及

$re^{-i\theta}\cdot w^k$ ($k=1,2,\cdots\cdots,n-1$)。共有 2n 個點，皆位於圖形上($w^n=1$)

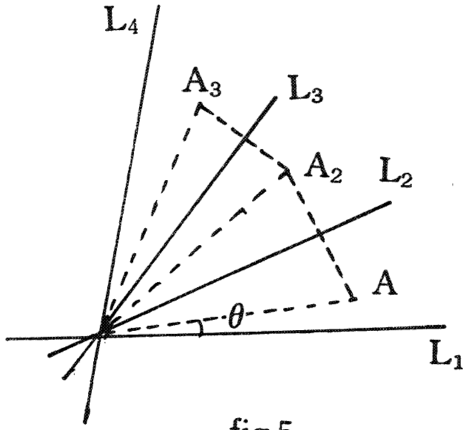


fig.5

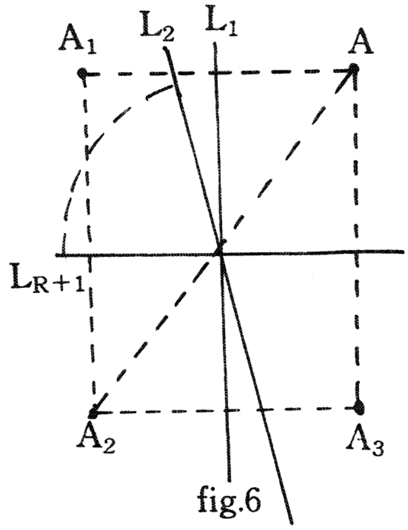


fig.6

證明：由 L_2 做 A 之對稱點 A_2，因角度關係，L_2 與 $\overline{OA}$ 及 $\overline{OA_2}$ 皆夾等角 $\frac{\pi}{n}-\theta$，故 $A_2=A\cdot e^{i2(\frac{\pi}{n}-\theta)}=re^{i\theta}\cdot e^{i(\frac{2\pi}{n}-2\theta)}=re^{i(-\theta)}\cdot w$ 再由 L_3作對稱點 A_3，依上所述知 $A_3=A_2\cdot e^{i2\theta}=r\cdot e^{i\theta}\cdot w$，如此依同樣方法可得所有所求的點，但因 $w^{n+k}=w^k$，故最多有 2n 個點。

不難發現若有偶數條對稱軸共點，則該點亦爲圖形的對稱中心，我們做了如下的證明：

證明：令此 n 條對稱軸依逆時針排列，依次爲 L_1，$L_2\cdots\cdots L_n$。則$\angle(L_i, L_{i+1})=\frac{180^\circ}{k}$，因 $n=2k$, $\therefore\frac{180}{n}=\frac{90}{k}$。故$\angle(L_1,L_2)=\frac{90^\circ}{k}$，$\angle(L_2,L_3)$ $\frac{90^\circ}{k}\cdots\cdots\angle(L_k, L_{k+1})=\frac{90^\circ}{k}$，將上列式子相加得$\angle(L_1, L_{k+1})=90^\circ$ 又由圖形知道 $AA_1A_2A_3$ 皆在圖形上，且 AA_2 以 O 對稱，故 O 爲對稱中心。

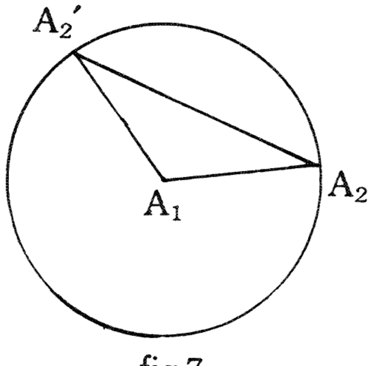


fig.7

最後我們證明有限數目的對稱軸必定共點。

證明：由於對稱軸數目有限，則交點亦爲有限個，故令其交點中距離最大的二點爲 A_1，A_2，並假設有 n 條對稱軸過 A_1 點，則由定理五可知對於 A_2 之整個圖形將會被映成 2n 個，亦即A_2 亦會映成 2n 個，而同位於此圖形上，再由定理五知其中必有一點 $A_2' \ni \overline{A_2A_2'}>\overline{A_1A_2}$ 且

A_2' 亦爲對稱軸交點，但已知 $\overline{A_1A_2}$ 爲最大，故前述不合。除非所有對稱軸皆位於同一點，否則將會矛盾。

(二)將對稱原理應用於代數曲線：

1. 我們將討論代數曲線（指 $f(x, y)=\sum_i C_i x^m y^n=0$）其次數(degree)與對稱軸數目的關係，首先考慮以下方程的解：

$$\begin{cases} f(x, y)=0, \ (\deg f(x, y)=n) \\ x^2+y^2=r^2 \end{cases}$$

其解有三種情形，無解、無限多解亦或有限解。而最後一種情形欲求有多少解（解的數目）方法如下：首先將 $f(x, y)$ 中奇次數的 y 移於等號之一邊，並提出 y 得 $y \cdot g(x, y^2)=h(x, y^2)$，$y^2=r^2-x^2$ 代入，其中 g、h 中最高爲 n 次。將式子平方得 $y^2 \cdot [g'(x)]^2=[h'(x)]^2 \Rightarrow (r^2-x^2) \cdot [g'(x)]^2=(h'(x))^2$ 此爲 2n 次 x 之方程式，故其解爲至多 2n 個實數。

定理六：“恰”有 n 條對稱軸之代數曲線，其次數至少爲 n 以上。

證明：爲方便討論，我們令對稱軸交點爲 O，且爲原點。則由定理五知，若 A 爲 $f(x, y)=0$ 上之一點，則與中心 O 距離 $\overline{OA}$ 之圓上將有 2n 個點亦屬於該圖形。

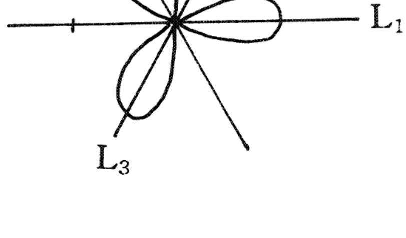
以 O 爲圓心，$\overline{OA}$ 爲半徑做一圓 $x^2+y^2=\overline{OA}^2$，可知若方程式次數爲 $n-1$，則由上述定理知 $f(x, y)=0$ 與 $x^2+y^2=\overline{OA}^2$ 之解（有限）爲 $2n-2$ 個而非 2n 個。$n-1$ 以下同理討論。故得證，但須注意的是任何次數的曲線皆有可能有無限多之對稱軸存在（此爲上述聯立方程式無限多解的情形）。

關於極座標方面：

我們可以根據定理五發現，一般極座標表示式 $r=f(\theta)$ 若 $f(\theta)$ 爲 $\frac{2\pi}{n}$ 的週期函數，則該圖形有 n 條對稱軸，但原點須得爲對稱軸交點，否則如圓錐曲線 $r=\frac{P}{1-\rho\cos\theta}$ 其原點爲焦點僅得一對稱軸而已，下舉二例：

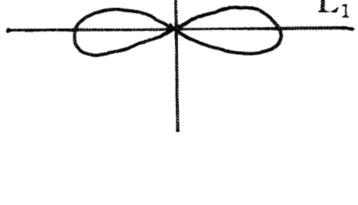
(1) $r=a\cos3\theta$，三瓣玫瑰線

$T=\frac{2}{3}\pi$，故有 3 條對稱軸



(2) $r=\sqrt{2}\,a\sqrt{\cos2\theta}$，雙紐線

$T=\pi$，有二條對稱軸



關於代數曲線，依上述定理，我們知若圖形有 n 條對稱軸，則以 O 爲對稱軸交點，A 爲 $f(x, y)=0$ 中之一點，$\angle(\overline{OA'}, \overline{OA})=\frac{2\pi}{n}$ 其中 A′點亦爲 $f(x, y)=0$ 之一點。將 xoy 座標旋轉得 x′oy′ 使得$\angle(OX', OX)=\frac{2\pi}{n}$，如此則易得證$\angle(OA', OX')=\angle(OA, OX)$故 A 在 X，Y 軸的投影 $x=\overline{OA}\cdot\cos\theta$，$y=\overline{OA}\sin\theta$ 及 A′ 在 x′、y′ 軸之投影 $x'=\overline{OA'}\cos\theta$，$y'=\overline{OA'}\sin\theta$ 分別等於 x，y 所以 $f(x', y')=0$。其逆定理可依此法得之，但需一提的是，我們只能確定對稱軸數目爲 n 的倍數，故亦可能無限多。所以對於代數曲線，我們有這一事實可助於製造「有 n 條對稱軸之方程式」，以下先以「三次曲線」討論之：

以對稱軸交點爲原點 0，將坐標旋轉 θ 角後得二者間之關係爲$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$由於未涉及平移，故知 $f(x, y)$中同次數的項經過變換後，不改變次數。故三次曲線可以下分之：

$$\underbrace{ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3}_{\text{齊三次項}}+\underbrace{ex^2+fxy+gy^2}_{\text{齊二次項}}+\underbrace{hx+iy}_{\text{齊一次項}}+\underbrace{z}_{\text{常數項}}$$

若其有三條對稱軸，且 $f(x, y)=0$，則 $f(x', y')=0$，其中

$x'=\cos120^\circ\cdot x-\sin120^\circ\cdot y$

$y'=\sin120^\circ\cdot x+\cos120^\circ\cdot y$ 若 $z\neq0$，則 $f(x, y)$及 $f(x', y')$同次數係數相同。

因二者相等，故於齊三次項中 $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$ 以

$x=x'\cdot\cos(-120^\circ)-y'\cdot\sin(-120^\circ)$

$y=x'\cdot\sin(-120^\circ)+y'\cos(-120^\circ)$代入可得 $a\left[\frac{-1}{8}(x')^3+\frac{3\sqrt{3}}{8}(x')^2y'-\frac{9}{8}x'(y')^2+\frac{3\sqrt{3}}{8}(y')^3\right]+b\left[\frac{-\sqrt{3}}{8}(x')^3+\frac{5}{8}(x')^2y'-\frac{\sqrt{3}}{8}x'(y')^2-\frac{3}{8}(y')^3\right]+c\left[\frac{-3}{8}(x')^3+\frac{\sqrt{3}}{8}(x')^2y'+\frac{5}{8}x'(y')^2+\frac{\sqrt{3}}{8}(y')^2\right]+d\left[\frac{-3\sqrt{3}}{8}(x')^3-\frac{9}{8}(x')^2y'-\frac{3\sqrt{3}}{8}x'(y')^2-\frac{1}{8}(y')^3\right]$ 經過整理後和原方程式比較得：

$$\begin{aligned}
&\frac{-1}{8}a+\frac{\sqrt{3}}{8}b+\frac{-3}{8}c+\frac{-3\sqrt{3}}{8}d=a \\
&\frac{3\sqrt{3}}{8}+\frac{5}{8}b+\frac{\sqrt{3}}{8}c+\frac{-9}{8}d=b \\
&\frac{-9}{8}a+\frac{-\sqrt{3}}{8}b+\frac{5}{8}c+\frac{-3\sqrt{3}}{8}d=c \\
&\frac{3\sqrt{3}}{8}a+\frac{-3}{8}b+\frac{\sqrt{3}}{8}c+\frac{-1}{8}d=d
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
&-9a-\sqrt{3}b-3c-3\sqrt{3}d=0 \text{——(A)} \\
&3\sqrt{3}a-3b+\sqrt{3}c-9d=0 \text{——(B)} \\
&-9a-\sqrt{3}b-3c-3\sqrt{3}d=0 \text{——(C)} \\
&3\sqrt{3}a-3b+\sqrt{3}c-9d=0 \text{——(D)}
\end{aligned}$$

可知(A)和(C)同，(B)與(D)同，有無限多組解。

將 B× $\sqrt{3}$+A 得：$-4\sqrt{3}b-12\sqrt{3}d=0 \Rightarrow b+3d=0$……(1)⇨此二式即爲其

又將 A $\sqrt{3}$+B 亦得 $3a+c=0$……(2)

但若 $j=0$，易知 $f(x, y)=0$ 與 $k\cdot f(x, y)=0$ 相同，故僅得

$$\begin{aligned}
&\frac{-1}{8}a+\frac{-3}{8}b+\frac{-3}{8}c+\frac{-3\sqrt{3}}{8}d=ka \\
&\frac{3\sqrt{3}}{8}a+\frac{5}{8}b+\frac{\sqrt{3}}{8}c+\frac{-9}{8}d=kb \\
&\frac{-9}{8}a+\frac{-\sqrt{3}}{8}b+\frac{5}{8}c+\frac{-3\sqrt{3}}{8}d=kc \\
&\frac{3\sqrt{3}}{8}a+\frac{-3}{8}b+\frac{\sqrt{3}}{8}c+\frac{-1}{8}d=kd
\end{aligned}
\qquad
\triangle=\begin{vmatrix}
\frac{-1}{8}-k, & \frac{-3}{8}, & \frac{-3}{8}, & \frac{-3\sqrt{3}}{8} \\
\frac{3}{8}\ 3, & \frac{5}{8}-k, & \frac{\sqrt{3}}{8}, & \frac{-9}{8} \\
\frac{-9}{8}, & \frac{-\sqrt{3}}{8}, & \frac{5}{8}-k, & \frac{-3\sqrt{3}}{8} \\
\frac{3\sqrt{3}}{8}, & \frac{-3}{8}, & \frac{\sqrt{3}}{8}, & \frac{-1}{8}-k
\end{vmatrix}$$

欲此方程式有非零解，則△=0

解之得$(k-1)^2(k^2+k+1)=0$　得 $k=1$，同上述討論。

關於齊二次式，依同樣方法可得 $f=0$，$e=g$

而一次可得 $h=i=0$，故三次方程式與三對稱軸，係數需符合：

$3a+c=0$；$b+3d=0$

$e=g$；$f=0$

$h=i=0$

找二最簡單的例子：

(1)令 $a=c=0$，$b=-3$，$d=1$ 餘爲 0

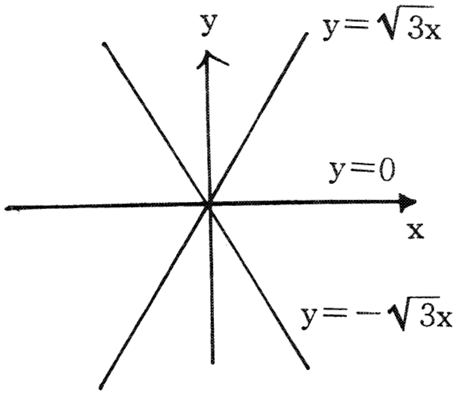
得方程 $3x^2y-y^3=0 \Rightarrow y(y^2-3x^2)=0$

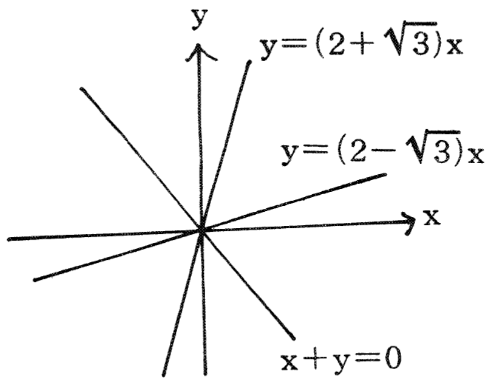
故爲三直線 $y=0$，$y=\sqrt{3}x$，$y=-\sqrt{3}x$ 合乎條件。

(2)方程 $x^3-3x^2y-3xy^2+y^3=0$

⇨$(x+y)(x^2-4xy+y^2)=0$ 亦爲三直線。$y=-x$，$y=(2\pm\sqrt{3})x$。

亦合乎條件。





另外若有四條對稱軸，則$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$即 $x=-y'$，$y=x'$

代入得 $a=d$，$a=-d$。$b=c$，$b=-c$ 故 $a=b=c=d=0$

齊三次式不存在四條對稱軸

齊四次的項，含有四對稱軸時以 $x=-y'$，$y=x'$ 代入

$ax^3+bx^3y+cx^2y^2+dxy^3+ey^3$ 可得 $a=e$，$b=-d$

另外考慮有八條對稱軸的情形，於四次方程式中解得

$a=e=\dfrac{1}{2c}$，$b=d=0$，三次以下同上討論得一般式爲

$a(x^4+2x^2y^2+y^4)+b(x^2+y^2)+c=0$

$\Rightarrow a(x^2+y^2)^2+b(x^2+y^2)+c=0$，圖形爲 ϕ，圓或二同心圓。

㈢關於作圖方法：

由圓錐曲線共軛直徑的關係，將之推廣於 n 次曲線，（註：預備定理爲牛頓主軸定理，參閱徐氏基金會㈡數學之內容及方法）

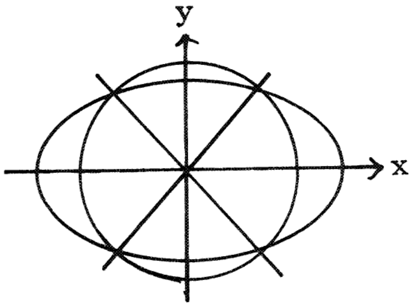
定理：代數曲線若有對稱中心，則所有主軸將過對稱中心。

證明：試考慮一組平行線中之 L，令其過對稱中心。並令此對稱中心爲(a, b)。若 P 爲 L 與 Γ（該圖形）之交點，若 $P'(2a-x, 2b-y)\in\Gamma$，而 $P'\in L$，故 $P'\in L\cap\Gamma$，故知 $P_i(x_i, y_i)\in L\cap\Gamma$，則 $P'_i(2a-x_i, 2b-y_i)$亦$\in\Gamma\cap L$ 可得

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i+2a-x_i)}{2m}=a\qquad \overline{Y}=\frac{\sum_{i=1}^{m}(y_i+2b-y_i)}{2m}=b$$

（使 P_i．P_i' 包括所有點，若 P_i 爲對稱點，則 $P_i'=P_i$）

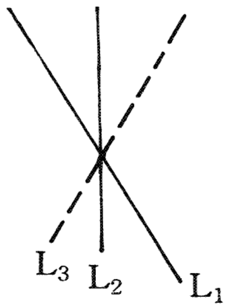
關於對稱軸的找法，我們先以橢圓爲例，再做一般推廣。繪一橢圓，可先用上述方法求出對稱中心，則以對稱中心爲圓心，適當半徑畫圓可得 $A_1A_2A_3A_4$ 四個交點，做 $\overline{A_1A_2}$ 及 $\overline{A_1A_4}$ 之中垂線即得。可將此做法推廣。但是圓的半徑可取所做之圓交點最少者（圖形有 n 對稱軸，則至少有 2n 個交點）。



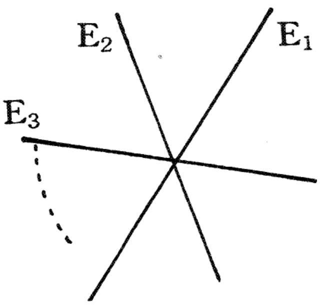
將第一部分定理於空間中做對稱軸及對稱面二者推廣

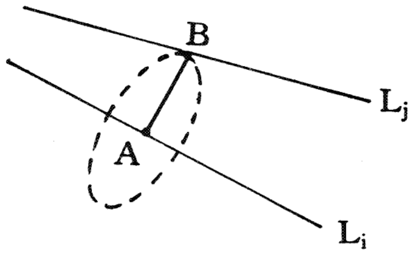
定理七：若空間中對稱軸有限，則必交於一點。

證明：在此得考慮歪斜線的情形，若 L_1L_2 爲空間中之歪斜線，則易知 L_1 對 L_2 之對稱線 L_3 亦爲對稱軸。如此下去便可得無限多對稱軸故不合。若 L_1L_2 交於 P。L_3 不在 L_1L_2 之平面上則必過 P，若 L_3 在 L_1L_2 之平面上，由上述平面定理知亦過 P。故得證，且二對稱軸互夾 $360^\circ\times\frac{n}{m}(m，n\in N, m>n)$



另外關於對稱面則有如下定理：若共軸的對稱面成一集合，且集合有二個以上，則對稱面將皆包含某一點。





證明：令如此的集合有 m 個，S_1，S_2，……，S_m 則於 S_i 中平面需夾 $\frac{180^\circ}{n(S_i)}$ 的角度。此由(一)部分可得且亦有如(五)的定理。此外並令 S_i 之共軸爲 L_i，則只需證明 L_i 共點即可。

先證明任二 L_i 須相交，若有不相交之 L_i，取距離最大二者（歪斜線將有一距離）L_iL_j，則以二者距離 AB（AB 與 L_iL_j 垂直）爲半徑，以 L_i 中 A 爲圓心做圓。如此可將 L_j 按 L_i 映成 $2\cdot n(S_i)$ 個。映得之線中將有距離 AB 者故不合。所以任二 L_i 皆相交。其交點需惟一的證明，仿上可得。

牛頓主軸定理的推廣：$f(x, y, z)=0$ 爲一 n 次曲面，則 L_i 爲一組平行線與 f 有 n 個交點，此 n 點重心將位於一平面上。

同樣的，若曲面有對稱中心，則如是之平面亦包含之。

四、結論

(一)平面上有限數目的對稱軸需交於一點，且相互夾$\frac{180^\circ}{n}$$(n\geqq 2)$的角度。而當對稱軸數目爲偶數時，此交點亦爲圖形對稱中心。

(二)恰有 n 個對稱軸$(n\neq\infty)$之代數曲線，其次數至少爲 n，但任意次數之代數曲線皆有可能有無限多的對稱軸。

(三)若一代數曲線有 n 個對稱軸，令$\Gamma=f(x, y)=0$ 表之，則將座標軸旋轉$\frac{2\pi}{n}$後之新座標所得$\Gamma'=f'(x, y)=0$ 和Γ同。

(四)三次方程式 $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3+ex^2+fxy+gy^2+hx+iy+j=0$

1. 有三對稱軸之條件爲：$3a+c=0$

$$b+3d=0$$
$$e=g$$
$$f=0$$
$$h=i=0$$

2. 四次方程 $ax^4+bx^3y+cx^2y^2+dxy^3+ey^4$ 有四對稱軸條件：

$$a=e$$
$$b=-d$$

3. 四次方程有八對稱軸條件爲 $a(x^2+y^2)^2+b(x^2+y^2)+c=0$ 圖形爲 ϕ，圓或二同心圓。其必含無限多對稱軸並無“恰”存八條對稱軸。

(五)若圖形有對稱中心，則做二組平行線主軸，其交點即爲所求。

(六)若空間對稱軸有限，則必共於一點。若對稱面其共軸所成集合有限，則對稱面亦將共於一點。

(七)n 次代數曲面，任一組平行線與曲面所交 n 點的重心位於一平面上（牛頓主軸之推廣）。

五、參考書籍

波蘭數學競賽集　九章出版社。

評語

選題切合高中生之程度，作者對於本題目作深入而且完整之探討。