三角形內三圓面積和最大問題

高中組數學科第二名

國立科學園區實驗高中

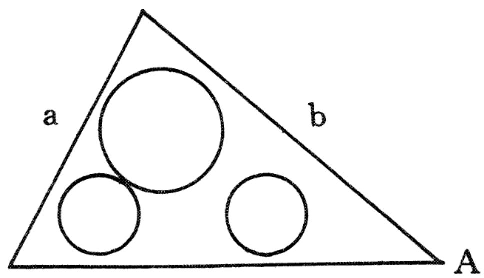
作　　者：陳宜伶、張澍元
楊正宇、楊智淵

指導教師：葉東進

一、研究動機：略

二、研究目的

在一已知三角形內，嵌入三個互不重疊的圓（如圖1），怎樣的情況下才使這三圓的面積和爲最大？



（圖1）

三、研究設備器材

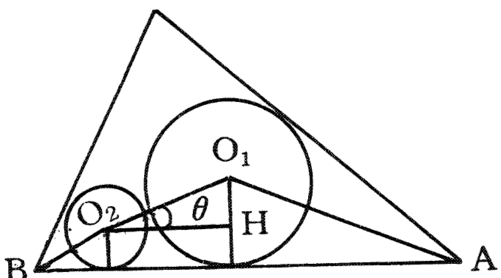
電腦，Turbo Basic 程式

四、研究過程

對於三角形ABC，我們設 $a \leqslant b \leqslant c$ 來討論，這不會失去一般性。首先，考慮三角形內兩個互切並與三角形相切的動圓 O_1 與 O_2（如圖2），其半徑爲 r_1 及 r_2，若引入參數 $Q=\angle O_1O_2H$，則 r_1、r_2 都會是 Q 的函數。

由 $\overline{AD}=r_1\cot\frac{A}{2}$ 及 $\overline{BE}=r_2\cot\frac{B}{2}$

得 $\overline{O_2H}=\overline{DE}=C-r_1\cot\frac{A}{2}-r_2\cot\frac{B}{2}$

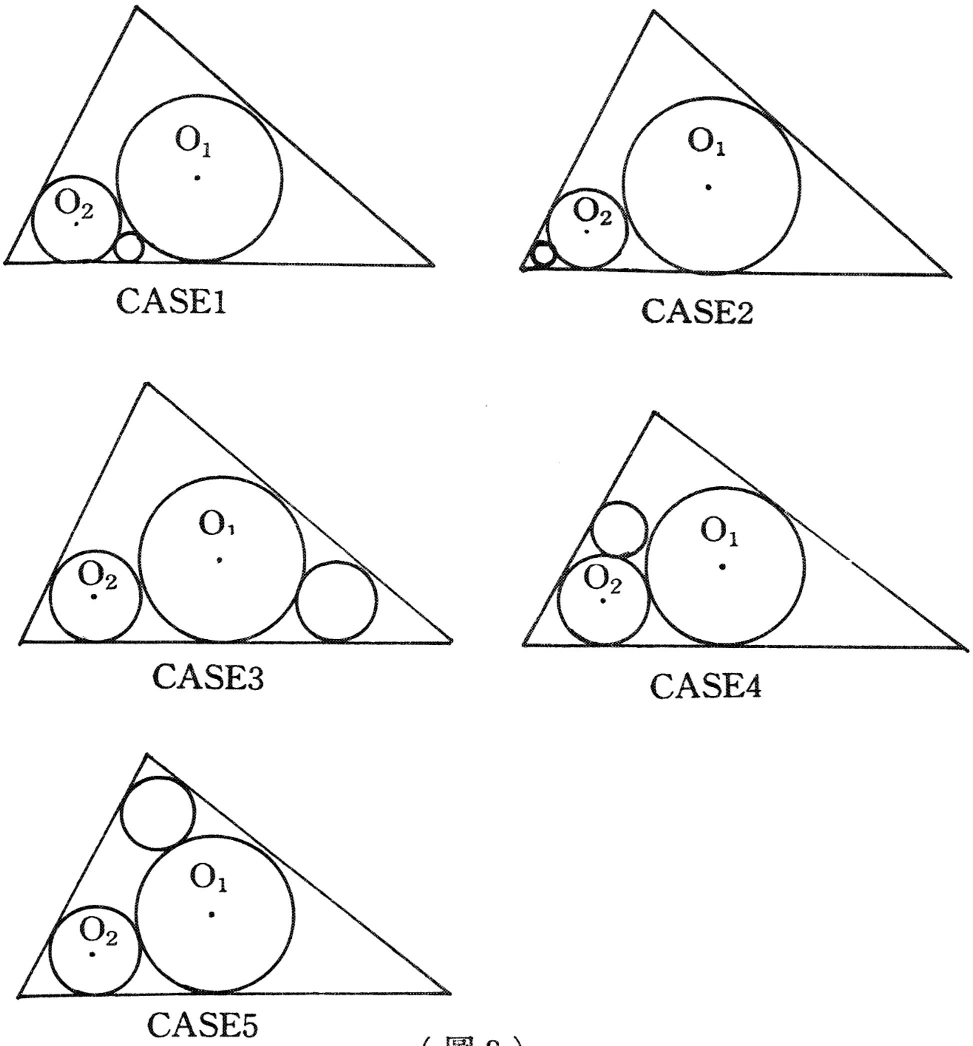


（圖2）

因此 $\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{r_1-r_2}{r_1+r_2}\\[2ex]\cos\theta=\dfrac{C-r_1\cot\frac{A}{2}-r_2\cot\frac{B}{2}}{r_1+r_2}\end{cases}$

解得 $\begin{cases}r_1=\dfrac{C(1+\sin\theta)}{2\cos\theta+(\cot\frac{A}{2}-\cot\frac{B}{2})\sin\theta+(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2})} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)\\[3ex] r_2=\dfrac{C(1-\sin\theta)}{2\cos\theta+(\cot\frac{A}{2}-\cot\frac{B}{2})\sin\theta+(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2})}\end{cases}$

其次，想在三角形內嵌入第三個圓 O_3，這個時候有五種情形可以選擇（如圖 3），由於 O_1 與 O_2 本身都是動圓，故不知那一種情況會產生最大面積和。但圓 O_3 的半徑 r_3 也是 θ 的函數，故可按五種情況，把 $\pi(r_1{}^2+r_2{}^2+r_3{}^2)$ 表爲 θ 的五種函數，再互相比較而知面積和最大的情形。



（圖 3）

在找出五個函數之前，我們需先確定自變數 θ 的範圍，可知爲 $-\dfrac{A}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{B}{2}$。

㈠CASE1

如圖 4 所示，在 $\triangle O_1O_2O_3$ 中，由正弦定理知

$$\frac{\sin(\theta+\varphi)}{r_1+r_3}=\frac{\sin(\phi-\theta)}{r_2+r_3}$$

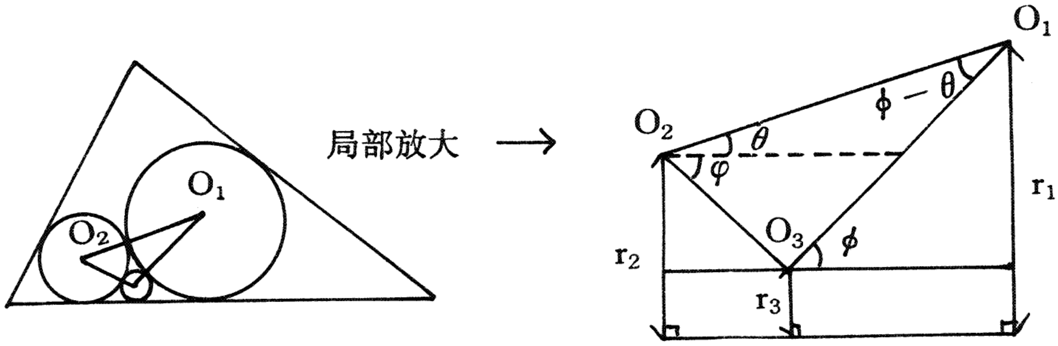
所以 $\dfrac{\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi}{r_1+r_3}=\dfrac{\sin\phi\cos\theta-\cos\phi\sin\theta}{r_2+r_3}$

但是 $\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} & \cos\theta = \dfrac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 + r_2} \\ \sin\varphi = \dfrac{r_2 - r_3}{r_2 + r_3} & \cos\varphi = \dfrac{2\sqrt{r_2 r_3}}{r_2 + r_3} \\ \sin\phi = \dfrac{r_1 - r_3}{r_1 + r_3} & \cos\phi = \dfrac{2\sqrt{r_1 r_3}}{r_1 + r_3} \end{cases}$

因此$\triangle O_1O_2O_3 = (r_1 - r_2)\sqrt{r_2 r_3} + (r_2 - r_3)\sqrt{r_1 r_2}$

$\qquad = (r_1 - r_3)\sqrt{r_1 r_2} - (r_1 - r_2)\sqrt{r_1 r_3}$

得 $r_3 = \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + 2\sqrt{r_1 r_2}}$



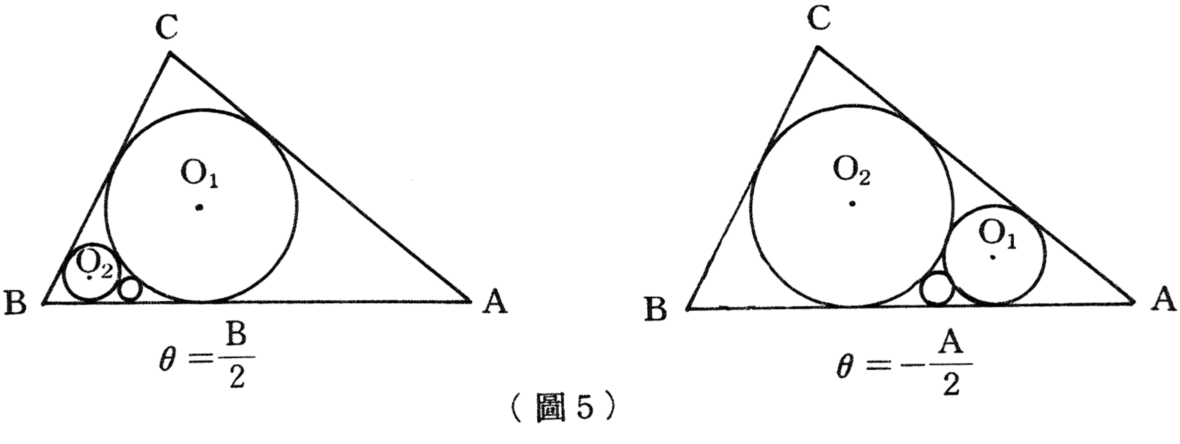
（圖 4）

既然 r_1 與 r_2 已如式(＊)所表示的都是 θ 的函數，而上式又告訴我們 r_3 爲r_1 及 r_2 之函數，故面積和$\pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$便是 θ 的函數，記爲 $f_1(\theta)$

即 $f_1(\theta) = \pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$，$r_1$ 與 r_2 見(＊)

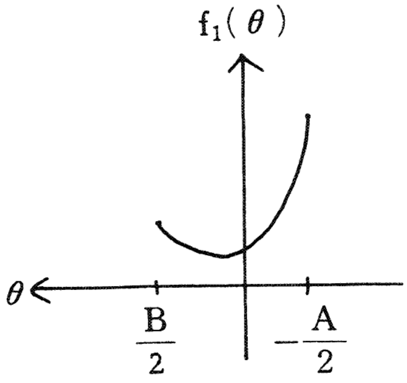
而 $r_3 = \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + 2\sqrt{r_1 r_2}}$

其 θ 的變動範圍由 $\dfrac{B}{2}$ 到 $-\dfrac{A}{2}$，見圖 5

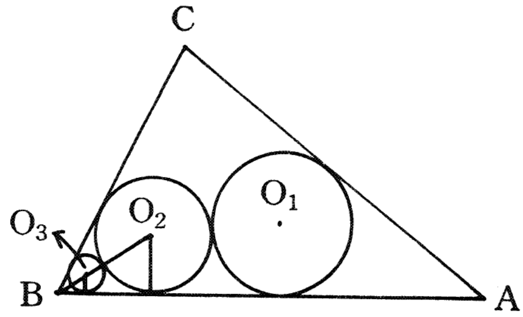


（圖 5）

可以理解的是，$f_1(\theta)$的圖形不容易用一般的解析方式加以描繪，此時，藉由電腦的繪圖，我們能夠在螢幕上看到其圖形（如圖6），此時，$\theta=-\frac{A}{2}$時的面積和比$\theta=\frac{B}{2}$時的面積和爲大，但這是爲了電腦繪圖的方便而給定的 a、b、c 的值的結果，但實際上 a、b、c 值是不定的，我們仍然有必要對 $f_1(\frac{B}{2})=M_{1,1}$ 與 $f_1(-\frac{A}{2})=M_{1,2}$ 的值加以比較，才能確定何者爲大，此事後敍中將會有交代。



（圖6）



（圖7）

㈡CASE2

如圖7所示

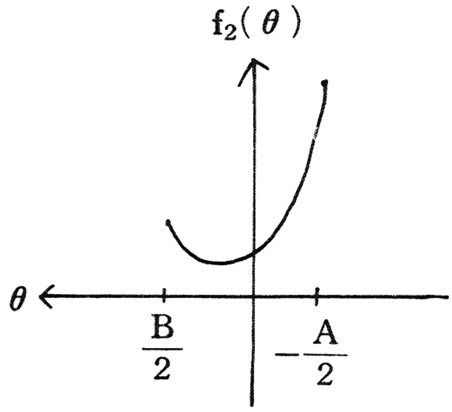
由 $\sin\frac{B}{2}=\frac{r_2-r_3}{r_2+r_3}$

得 $r_3=\frac{r_2(1-\sin\frac{B}{2})}{1+\sin\frac{B}{2}}$

此時，三圓 O_1, O_2, O_3 的面積和爲θ的函數

$f_2(\theta)=\pi(r_1^2+r_2^2+r_3^2)$，$r_1$ 與 r_2 見式（＊）

而 $r_3=\frac{r_2(1-\sin\frac{B}{2})}{1+\sin\frac{B}{2}}$



（圖8）

藉由電腦的繪圖，我們可得 $f_2(\theta)$的圖形（如圖8），雖然其中以$\theta=-\frac{A}{2}$時面概和爲最大，但仍如 CASE1 中所討論的，我們在後敍中將要比較 $f_2(\frac{B}{2})=M_{2,1}$ 與 $f_2(-\frac{A}{2})=M_{2,2}$ 之值的大小。

㈢CASE3

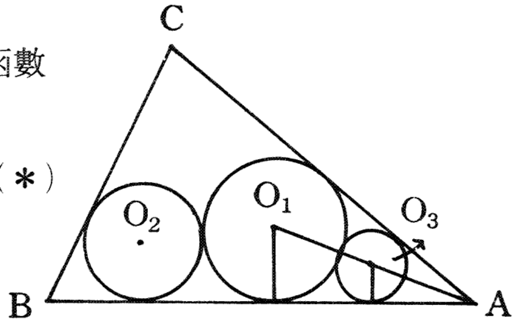
如圖9所示

由 $\sin\frac{A}{2}=\frac{r_1-r_3}{r_1+r_3}$ 得 $r_3=\frac{r_1(1-\sin\frac{A}{2})}{1+\sin\frac{A}{2}}$

此時，三圓 O_1、O_2、O_3 的面積和爲 θ 的函數

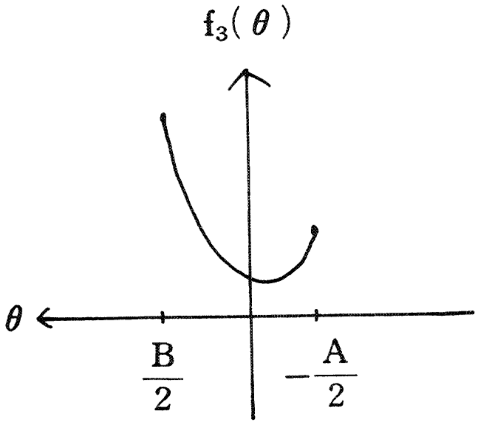
$f_3(\theta)=\pi(r_1^2+r_2^2+r_3^2)$，$r_1$ 與 r_2 見式(＊)

而 $r_3=\frac{r_1(1-\sin\frac{A}{2})}{1+\sin\frac{A}{2}}$

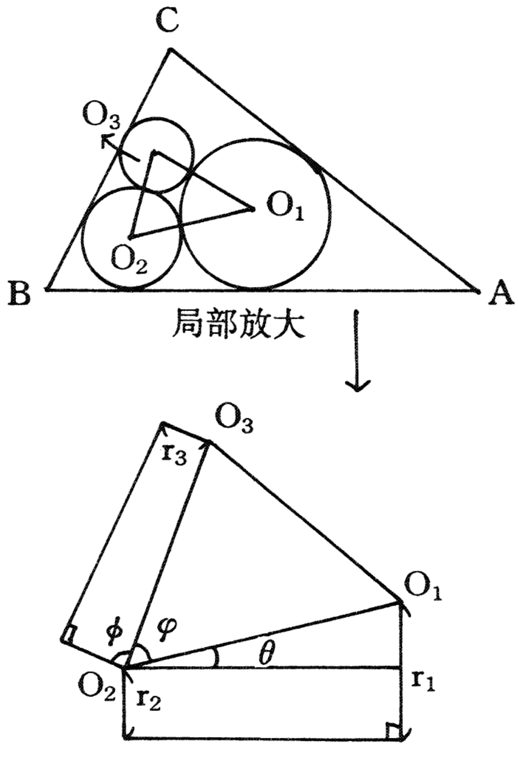


(圖 9)

藉電腦的繪圖，可得 $f_3(\theta)$的圖形(如圖 10)，仿前述的討論，後面我們將比較 $f_3(\frac{B}{2})=M_{3,1}$ 以及 $f_3(-\frac{A}{2})=M_{3,2}$ 的值的大小。



(圖 10)



(圖 11)

(四)CASE4

如圖 11 所示

$$\phi=2\pi-\varphi-\theta-\frac{\pi}{2}-(\pi-B)$$
$$=\frac{\pi}{2}-(\varphi+\theta-B)$$

所以 $\cos\phi=\sin(\varphi+\theta-B)=\frac{r_2-r_3}{r_2+r_3}$

因此 $r_2-r_3=(r_2+r_3)\sin(\varphi+\theta-B)$

隨之 $r_3=\frac{r_2[1-\sin(\varphi+\theta-B)]}{1+\sin(\varphi+\theta-B)}$ ……………………………………………(1)

又，在$\triangle O_1O_2O_3$ 中，由餘弦定理可知

$$\cos\varphi=\frac{(r_1+r_2)^2+(r_2+r_3)^2-(r_1+r_3)^2}{2(r_1+r_2)(r_2+r_3)}$$

$$=\frac{r_2(r_1+r_2)-r_3(r_1-r_2)}{(r_1+r_2)(r_2+r_3)}$$

得 $r_3=\dfrac{r_2(r_1+r_2)(1-\cos\varphi)}{(r_1+r_2)\cos\varphi+(r_1-r_2)}$ ……(2)

比較(1)、(2)兩式，得

$$\frac{r_2[1-\sin(\varphi+\theta-B)]}{1+\sin(\varphi+\theta-B)}=\frac{r_2(r_1+r_2)(1-\cos\varphi)}{(r_1+r_2)\cos\varphi+(r_1-r_2)}$$

$\therefore [r_1+r_2-r_1\sin(\theta-B)]\cos\varphi-[r_1\cos(\theta-B)]\sin\varphi=r_2$

令 $P=r_1+r_2-r_1\sin(\theta-B)$，$Q=r_1\cos(\theta-B)$

所以 $P\cos\varphi-Q\sin\varphi=r_2$

$$\cos\left(\phi+\cos^{-1}\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}\right)=\frac{r_2}{\sqrt{P^2+Q^2}}\text{。}$$

隨之 $\varphi=\cos^{-1}\dfrac{r_2}{\sqrt{P^2+Q^2}}-\cos^{-1}\dfrac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}$

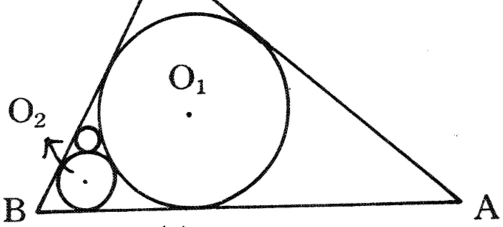
此時，三圓 O_1、O_2、O_3 的面積和爲 θ 的函數

$f_4(\theta)=\pi(r_1^2+r_2^2+r_3^2)$，$r_2$ 與 r_2 見式(＊)

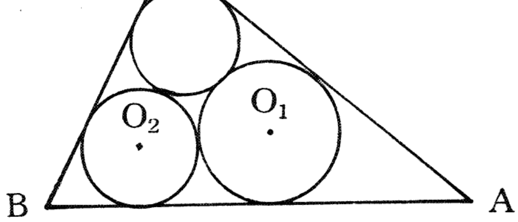
而 $r_3=\dfrac{r_2(r_1+r_2)(1-\cos\theta)}{(r_1+r_2)\cos\varphi+(r_1-r_2)}$

其中 $\begin{cases}\varphi=\cos^{-1}\dfrac{r_2}{\sqrt{P^2+Q^2}}-\cos^{-1}\dfrac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}\\ P=r_1+r_2-r_1\sin(\theta-B)\\ Q=r_1\cos(\theta-B)\end{cases}$

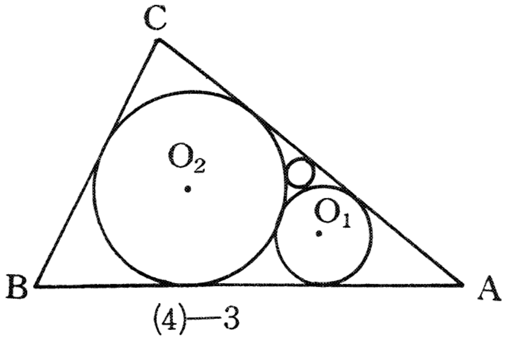
像 $f_4(\theta)$ 這樣複雜的函數，其圖形究竟是什麼樣子，實在很難想像，此外，θ 的變動範圍雖也是由 $\dfrac{B}{2}$ 到 $-\dfrac{A}{2}$，但過程中的變化卻與前述幾種情況不同，如圖 12 所示，是由狀況(4)—1，(4)—(2)，再到(4)—3。



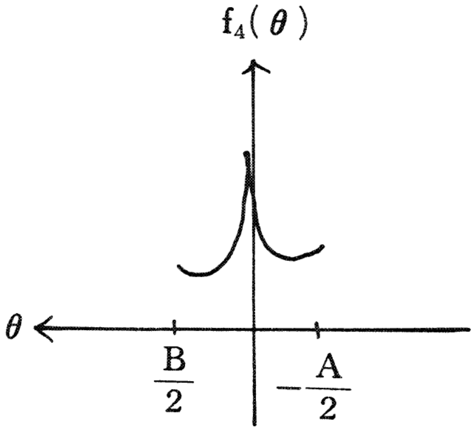
(4)—1



(4)—2



（圖 12）



（圖 13）

其中狀況(4)—2 所對應的 θ（此時 θ 記爲 β）值，並不是那麼容易導出的，因此，在藉由電腦繪圖時，我們是先繪出兩個函數：

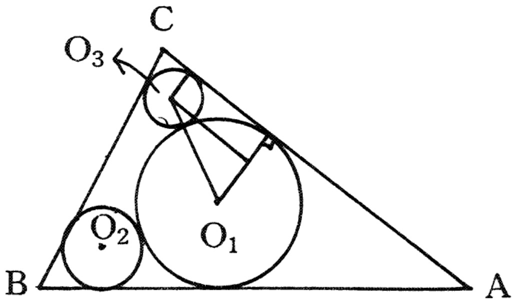
(i) $f_4(\theta)$　　θ 是由 $\frac{B}{2}$ 變動到 0

(ii)把原先△ABC 中的邊長 a 與 b 對調，再繪出 $f_4(\theta)$，θ 由 $\frac{B}{2}$ 變動到 $-\frac{A}{2}$。

仍如前面的 CASE 所討論的，我們將比較 $f_4(\frac{B}{2})=M_{4,1}$，$f_4(\beta)=M_{4,2}$，$f_4(-\frac{A}{2})=M_{4,3}$。

㈤CASE5

如圖 14 所示：



（圖 14）

$$\overline{AF}=r_1\cot\frac{A}{2},\ \overline{CG}=r_3\cot\frac{C}{2}$$

得 $\overline{GF}=b-r_1\cot\frac{A}{2}-r_3\cot\frac{C}{2}$

由畢氏定理 $\overline{O_1O_3}^2=(r_1-r_3)^2+\overline{GF}^2$

所以 $(r_1+r_3)^2=(r_1-r_3)^2+(b-r_1\cot\frac{A}{2}-r_3\cot\frac{C}{2})^2$

$$\Rightarrow(\cot\frac{C}{2})^2r_3^2-2[(b-r_1\cot\frac{A}{2})\cot\frac{C}{2}+2r_1]r_3+(b-r_1\cot\frac{A}{2})^2=0$$

解上面 r_3 的二次方程式得：

$$r_3=\frac{(b-r_1\cot\frac{A}{2})\cot\frac{C}{2}+2r_1\pm2\sqrt{(b-r_1\cot\frac{A}{2})r_1\cot\frac{C}{2}+r_1^2}}{\cot^2\frac{C}{2}}$$

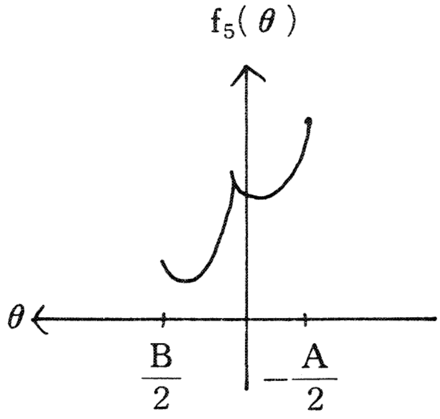
若取 $r_3=\dfrac{(b-r_1\cot\quad)\cot\quad+2r_1+2\sqrt{(b-r_1\cot\frac{A}{2})r_1\cot\frac{C}{2}+r_1^{\,2}}}{\cot^2\frac{C}{2}}$

則有 $2\sqrt{(b-r_1\cot\dfrac{A}{2})r_1\cot\dfrac{C}{2}+r_1^{\,2}}$

$$=(r_3\cot\frac{C}{2}+r_1\cot\frac{A}{2})\cot\frac{C}{2}-b\cot\frac{C}{2}-2r_1$$

$$=(b-\overline{GF})\cot\frac{C}{2}-b\cot\frac{C}{2}-2r_1$$

$$=-(\overline{GF}\cot\frac{C}{2}+2r_1)<0$$ （不合）



（圖 15）

又 $(b-r_1\cot\dfrac{A}{2})\cot\dfrac{C}{2}>0$

因此 $(b-r_1\cot\dfrac{A}{2})\cot\dfrac{C}{2}+2r_1>2\sqrt{(b-r_1\cot\frac{A}{2})r_1\cot\frac{C}{2}+r_1^{\,2}}$

所以我們僅取

$$r_3=\frac{(b-r_1\cot\frac{A}{2})\cot\frac{C}{2}+2r_1-2\sqrt{(b-r_1\cot\frac{A}{2})r_1\cot\frac{C}{2}+r_1^{\,2}}}{\cot^2\frac{C}{2}} \cdots\cdots (**)$$

此時，三圓 O_1、O_2、O_3 的面積和爲 θ 的函數

$f_5(\theta)=\pi(r_1^{\,2}+r_2^{\,2}+r_3^{\,2})$，$r_1$ 與 r_2 見式（*），r_3 見式（**），而函數圖見圖 15。同樣的，我們將比較 $f_5(\dfrac{B}{2})=M_{5,1}$，$f_5(\beta)=M_{5,2}$，$f_5(-\dfrac{A}{2})=M_{5,3}$ 之值的大小。

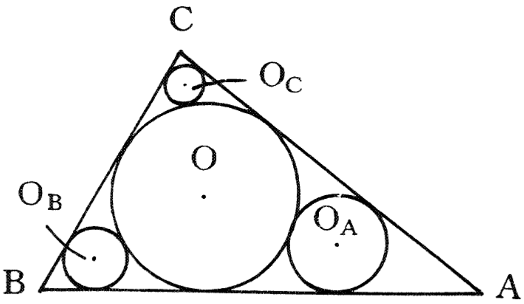
五、討論

預備定理：在一三角形 ABC 中($a\leqslant b\leqslant C$)，設其內切圓 O，在圓 O 和∠A、∠B、∠C 之間，各放入三個圓 O_A、O_B、O_C（如圖 16），則 O_A 之面積 $\geqslant O_B \geqslant O_c$。

證明：設 O，O_A 的半徑爲 R、R_A

則 $\dfrac{R-R_A}{R+R_A}=\sin\dfrac{A}{2}$，$R_A=\dfrac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\cdot R$

同理 $R_B=\dfrac{1-\sin\frac{B}{2}}{1+\sin\frac{B}{2}}\cdot R$，$R_C=\dfrac{1-\sin\frac{C}{2}}{1+\sin\frac{C}{2}}\cdot R$



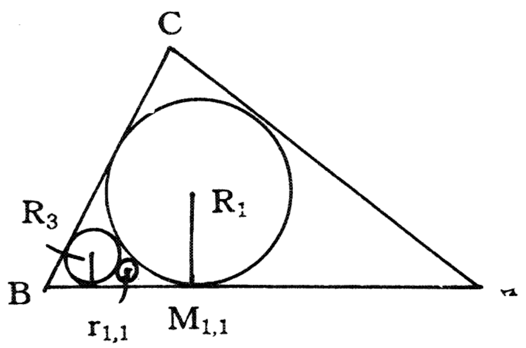
（圖 16）

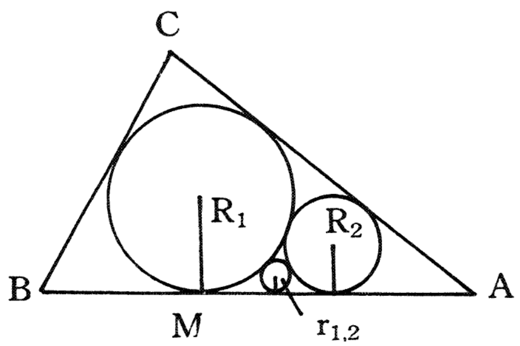
考慮函數 $y=\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{1+\sin\frac{x}{2}}$，$0<x<\pi$

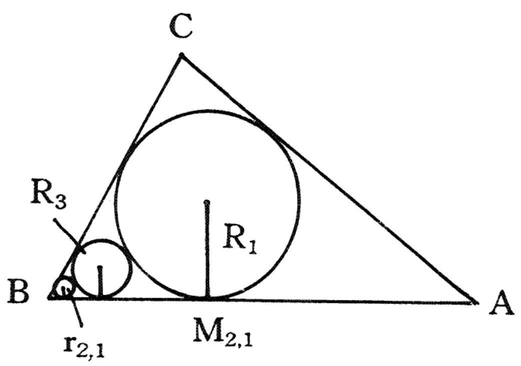
因爲 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\cos\frac{x}{2}}{(1+\sin\frac{x}{2})^2}<0$，所以 y 爲遞減函數

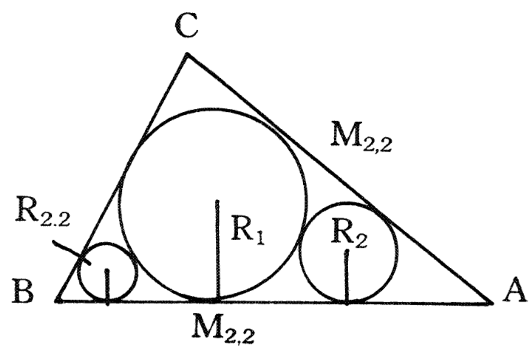
因爲 $A\leqslant B\leqslant C$，所以 $R_A\geqslant R_B\geqslant R_C$

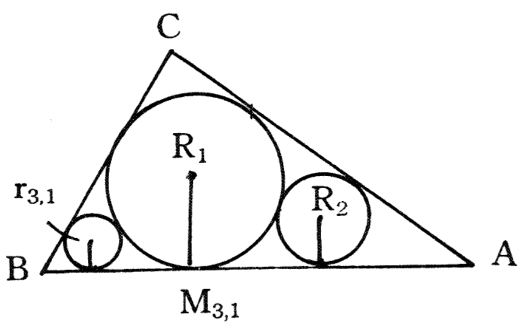
所以 $O_A\geqslant O_B\geqslant O_C$（得證）

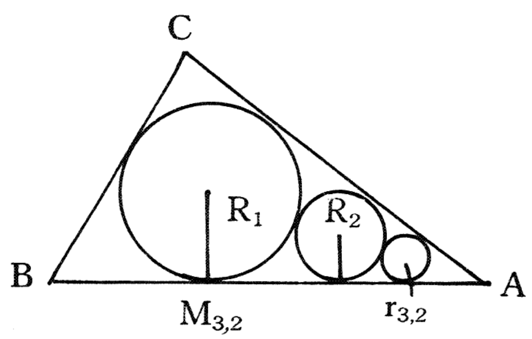


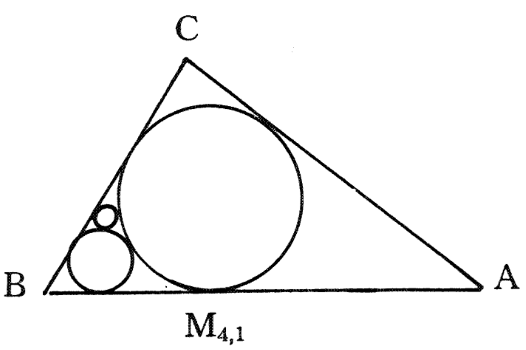


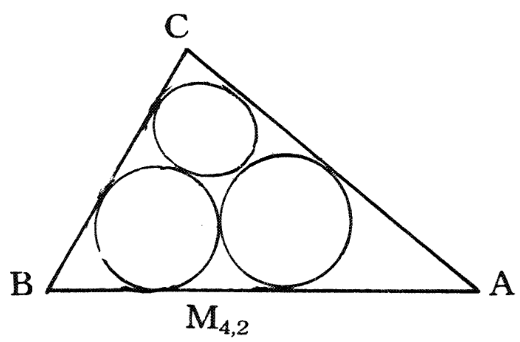


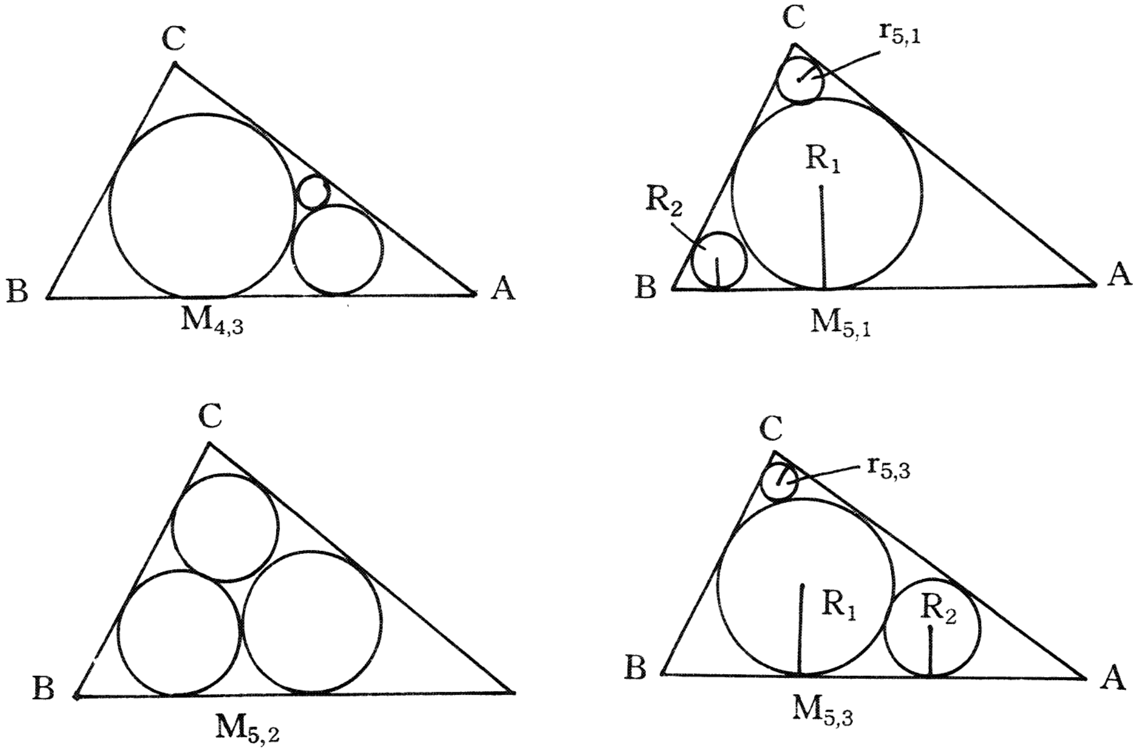












（圖 17）

接著由圖 17，我們可看到要作大小比較的幾個函數值及其所對應的圖形。對於 $M_{4,2}=M_{5,2}$，在以下的比較討論中，並未將它們列入考慮，其原因請參考後面的附錄。

㈠$M_{1,1}$ 和 $M_{1,2}$ 的大小比較：

由於 $r_{1,1}=\dfrac{1-\sin\frac{B}{2}}{2+2\cos\frac{B}{2}}\cdot R_1$

$$r_{1,2}=\frac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2+2\sqrt{R_1R_2}}=\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{2+2\cos\frac{A}{2}}\cdot R_1$$

考慮函數 $y=\dfrac{1-\sin\frac{X}{2}}{2+2\cos\frac{X}{2}}$，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-(1+\cos\frac{X}{2}-\sin\frac{X}{2})}{4(1+\cos\frac{X}{2})^2}<0$

所以函數 y 爲遞減，而 $A\leqslant B$，所以 $r_{1,2}\geqslant r_{1,1}$

另外，由預備定理得知，$R_2\geqslant R_3$

且 $M_{11}=\pi(R_1^{\,2}+R_3^{\,2}+r_{1,1}^{\,2})$，$M_{1,2}=\pi(R_1^{\,2}+R_2^{\,2}+r_{1,2}^{\,2})$

故得 $M_{1,2}\geqslant M_{1,1}$

㈡$M_{2,1}$ 和 $M_{2,2}$ 的大小比較：

由預備定理得知：$R_2\geqslant R_3$，又 $r_{2,2}>r_{2,1}$

而　$M_{2,1}=\pi(R_1^{\,2}+R_3^{\,2}+r_{2,1}^{\,2})$，$M_{2,2}=\pi(R_1^{\,2}+R_2^{\,2}+r_{2,2}^{\,2})$

故　$M_{2,2}>M_{2,1}$

㈢$M_{5,1}$ 和 $M_{5,3}$ 的大小比較：

由預備定理得知：$R_2 > R_3$，又 $r_{5,1}=r_{5,3}$

而　$M_{5,1}=\pi(R_1^2+R_2^2+r_{5,1}^2)$，$M_{5,3}=\pi(R_1^2+R_2^2+r_{5,3}^2)$

故得 $M_{5,3}>M_{5,1}$

㈣由於 $M_{4,1}=M_{1,1}$，$M_{4,3}=M_{1,2}$ 且 $M_{3,1}=M_{2,2}\geqslant M_{2,1}$

所以欲求之面積和的最大值必出現在 $M_{1,2}$，$M_{3,1}$，$M_{3,2}$，$M_{5,3}$ 的其中之一。

㈤$M_{5,3}$ 和 $M_{3,1}$ 的大小比較：

由預備定理可得：$r_{3,1}\geqslant r_{5,3}$

而　$M_{5,3}=\pi(R_1^2+R_2^2+r_{5,3}^2)$，$M_{3,1}=\pi(R_1^2+R_2^2+r_{3,1}^2)$

故　$M_{3,1}\geqslant M_{5,3}$

因此，我們可排除 $M_{5,3}$ 爲最大之可能。

㈥$M_{1,2}$、$M_{3,1}$、$M_{3,2}$ 的大小比較：

由於 $M_{1,2}=\pi(R_1^2+R_2^2+r_{1,2}^2)$，$M_{3,2}=\pi(R_1^2+R_2^2+r_{3,2}^2)$

$M_{3,1}=\pi(R_1^2+R_2^2+r_{3,1}^2)$

所以欲比較 $M_{1,2}$，$M_{3,2}$，$M_{3,1}$ 之大小，可比較 $r_{1,2}$，$r_{3,2}$，$r_{3,1}$ 之大小。

$$r_{1,2}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2+2\sqrt{R_1R_2}}=\frac{1+\sin\frac{A}{2}}{2+2\cos\frac{A}{2}}\cdot R_2$$

$$r_{3,2}=\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}，r_{3,1}=\frac{1-\sin\frac{B}{2}}{1+\sin\frac{B}{2}}\cdot\frac{1+\sin\frac{A}{2}}{1-\sin\frac{A}{2}}\cdot R_2$$

今考慮函數 $g_1(A)=r_{1,2}-r_{3,2}$，$0<A<\frac{\pi}{3}$

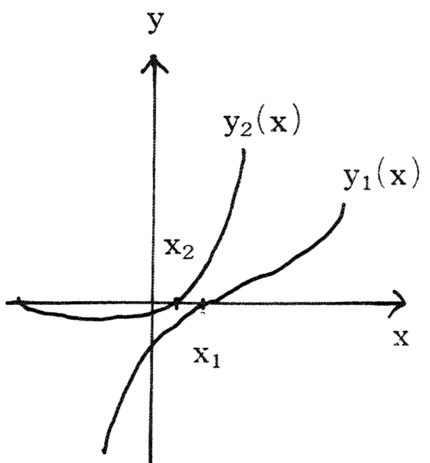
$$=\left(\frac{1+\sin\frac{A}{2}}{2+2\cos\frac{A}{2}}-\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\right)\cdot R_2$$

因爲 $r_{3,1}$ 之值與 A、B 均有關，今固定 A 並考慮 $B=\frac{\pi-A}{2}$ 的情形，此時之 B 爲可能之最大（$\because A\leqslant B\leqslant C$），由於函數 $\frac{1-\sin\frac{X}{2}}{1+\sin\frac{X}{2}}$ 爲遞減，所以此時之 $r_{3,1}$ 爲可能之最小，取此 $r_{3,1}$，考慮函數

$g_2(A)=r_{3,1}-r_{1,2}$，$0<A<\frac{\pi}{3}$

$$=\left(\frac{1-\sin\frac{B}{2}}{1+\sin\frac{B}{2}}\cdot\frac{1+\sin\frac{A}{2}}{1-\sin\frac{A}{2}}-\frac{1+\sin\frac{A}{2}}{2-2\cos\frac{A}{2}}\right)\cdot R_2，B=\frac{\pi-A}{2}$$

繪出兩個函數，其圖形如圖 18：



（圖 18 ）

$$y_1=\frac{1+\sin\frac{x}{2}}{2+2\cos\frac{x}{2}}-\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{1+\sin\frac{x}{2}}$$ 及

$$y_2=\frac{1-\sin\frac{\pi-x}{4}}{1+\sin\frac{\pi-x}{4}}\cdot\frac{1+\sin\frac{x}{2}}{1-\sin\frac{x}{2}}-\frac{1+\sin\frac{x}{2}}{2+2\cos\frac{x}{2}}，0<x<\frac{\pi}{3}$$

可知，當 $y_1(x_1)=y_2(x_2)=0$ 時，$x_1>x_2$

即當 $y_1>0$ 時，y_2 必大於 0；$g_1(A)>0$ 時，g_2 必大於 0；$r_{1,2}>r_{3,2}$ 時，$r_{3,1}$ 必大於 $r_{1,2}$

故 $r_{1,2}$ 必小於 $r_{3,1}$ 或 $r_{3,2}$　即 $M_{1,2}<M_{3,1}$ 且 $M_{1,2}<M_{3,2}$

所以我們又排除了 $M_{1,2}$ 爲最大值的可能。

㈦$M_{3,1}$ 和 $M_{3,2}$ 的大小比較：

因爲 $M_{3,1}=\pi(R_1^2+R_2^2+r_{3,1}^2)$，$M_{3,2}=\pi(R_1^2+R_2^2+r_{3,2}^2)$

所以欲比較 $M_{3,1}$ 和 $M_{3,2}$ 大小，可比較 $r_{3,1}$ 和 $r_{3,2}$ 大小

由 $r_{3,1}=\dfrac{1-\sin\frac{B}{2}}{1+\sin\frac{B}{2}}\cdot R_1$，$r_{3,2}=\dfrac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\cdot R_2$

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{\frac{1+\sin\frac{B}{2}}{1-\sin\frac{B}{2}}\cdot r_{3,1}}{\frac{1+\sin\frac{A}{2}}{1-\sin\frac{A}{2}}\cdot r_{3,2}}=\frac{(1-\sin\frac{A}{2})(1+\sin\frac{B}{2})\cdot r_{3,1}}{(1+\sin\frac{A}{2})(1-\sin\frac{B}{2})\cdot r_{3,2}}$$

由（＊）得 $\dfrac{R_1}{R_2}=\dfrac{1+\sin\frac{A}{2}}{1-\sin\frac{A}{2}}$（此時 R_1 爲（＊）中的 r_2，R_2 爲（＊）中的 r_1 ）

因爲 $r_{3,1}\geq r_{3,2}\Leftrightarrow\dfrac{(1-\sin\frac{A}{2})(1+\sin\frac{B}{2})}{(1+\sin\frac{A}{2})(1-\sin\frac{B}{2})}\leq\dfrac{1+\sin\frac{A}{2}}{1-\sin\frac{A}{2}}$

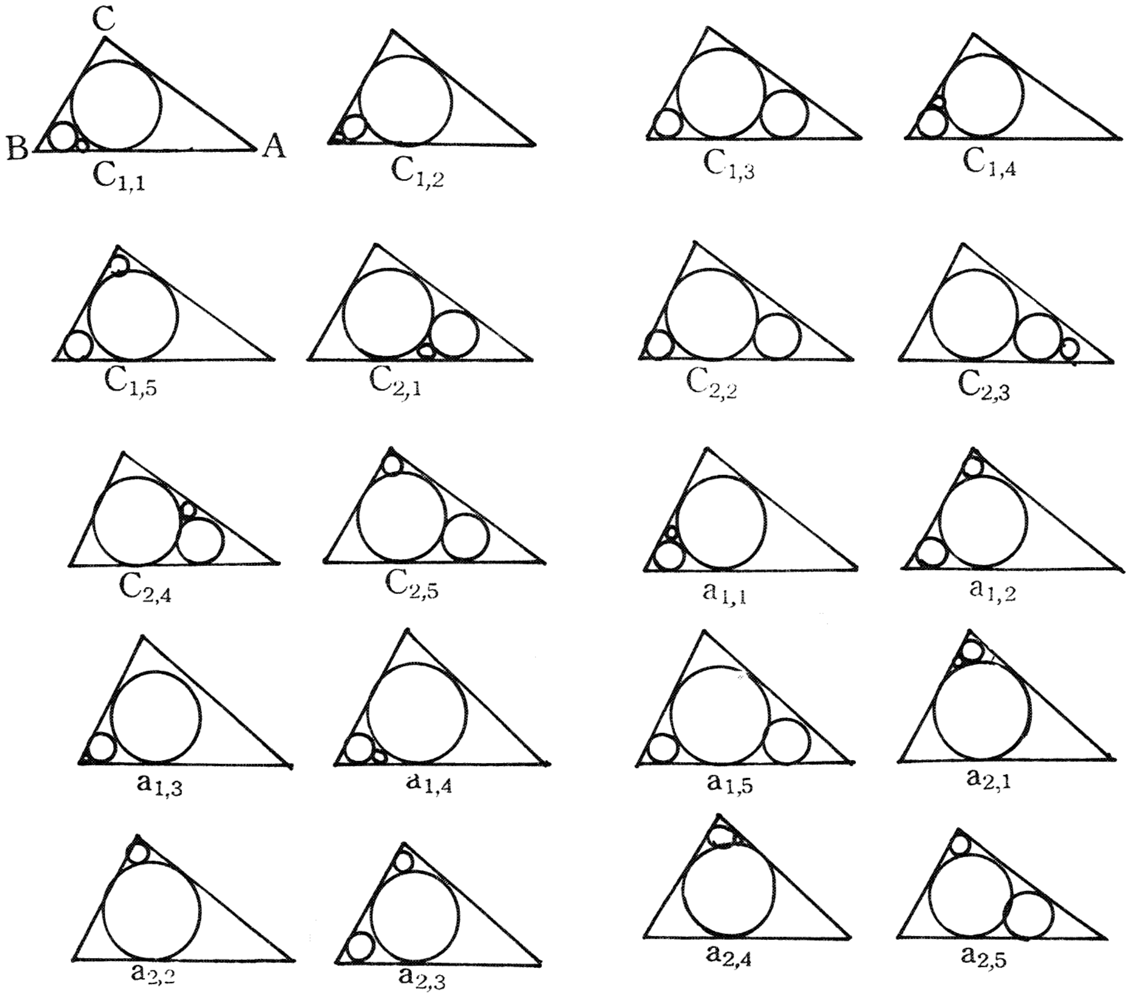
$$\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)^2\cos\frac{B}{2}\leqslant\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)^2)\left(1-\sin\frac{B}{2}\right)\text{〔兩邊同乘}\left(1-\sin\frac{B}{2}\right)\text{〕}$$

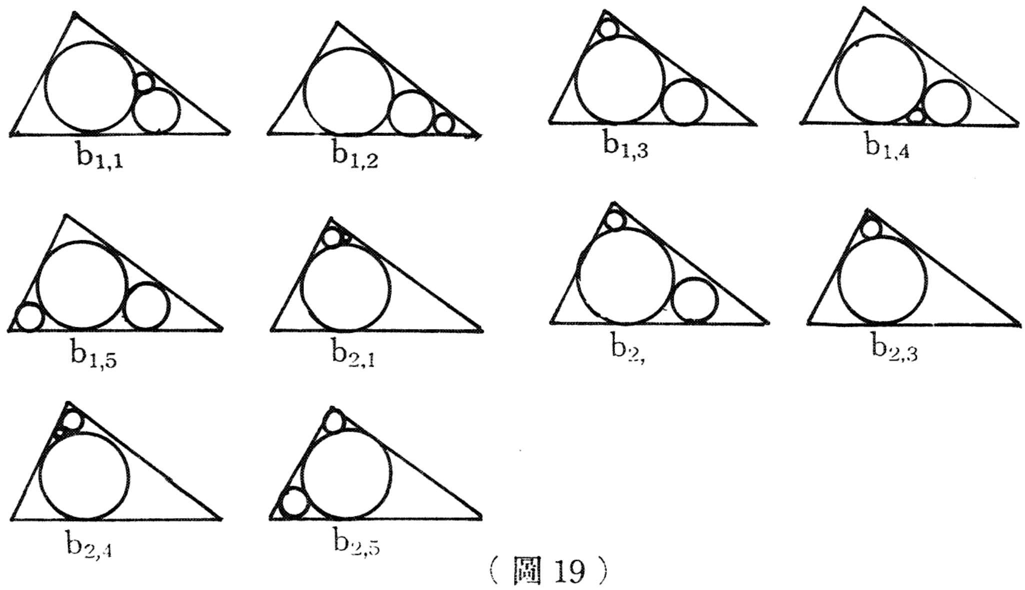
$$\Rightarrow\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\cos\frac{B}{2}\leqslant\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)\left(1-\sin\frac{B}{2}\right)\Rightarrow\frac{\cos\frac{B}{2}}{1-\sin\frac{B}{2}}\leqslant\frac{1+\sin\frac{A}{2}}{1-\sin\frac{A}{2}}$$

因此當$\dfrac{\cos\frac{B}{2}}{1-\sin\frac{B}{2}}\geqslant\dfrac{1+\sin\frac{A}{2}}{1-\sin\frac{A}{2}}$時，$M_{3,2}$ 最大，

$\dfrac{\cos\frac{B}{2}}{1-\sin\frac{B}{2}}\leqslant\dfrac{1+\sin\frac{A}{2}}{1-\sin\frac{A}{2}}$時，$M_{3,1}$ 最大。

但是到此爲止，我們所考慮動圓 O_1 與 O_2 是同時和三角形 ABC 的 AB 邊相切。如果改考慮 O_1，O_2 與 BC 邊或 CA 邊同時相切，就可能產生其他的情形。若我們仿照研究過程的方法製造出表示面積和的值的函數，可以知道他們的最大值必也出現在函數變動的端點，所以我們把全部 30 種情狀的圖形繪在圖 19。（其英文字表示動圓同時與哪邊相切）。接著把上面重複的圖形刪去，此外明顯有 $a_{2,5}<C_{2,2}$，$a_{2,1}<a_{2,5}$，$a_{2,2}<a_{2,5}$，所以把 $a_{2,2}$ 與 $a_{2,1}$ 刪除。經過這番整理，我們發現最大值其實只出現圓 O_1，O_2 同時與邊 AB 相切的情狀下。





（圖 19）

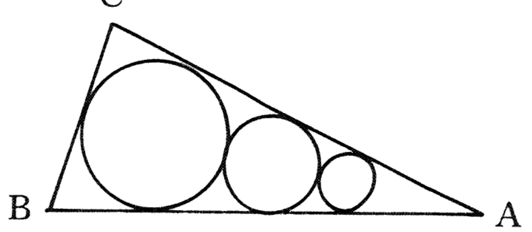
六、結論

已知給予△ABC$(a \leqslant b \leqslant c)$，令 $P=\frac{\cos\frac{B}{2}}{1-\sin\frac{B}{2}}$，$Q=\frac{1+\sin\frac{A}{2}}{1-\sin\frac{A}{2}}$，$S=\frac{a+b+c}{2}$，$\triangle=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$，$R_1=\frac{\triangle}{S}$，$R_2=\frac{R_1}{Q}$

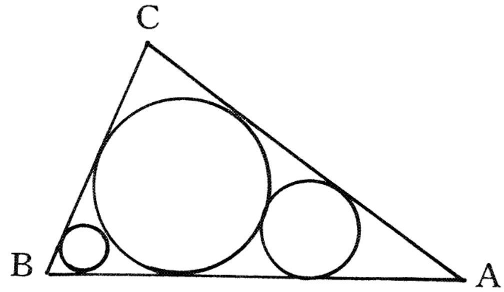
(1)當 $P \geqslant Q$ 時，$M_{3,2}$ 爲最大，此時 $M_{3,2}=\pi(R_1{}^2+R_2{}^2+r_{3,2}{}^2)$，其中 $r_{3,2}=\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin}\cdot R_2$，此時嵌入之三個圓如圖 20 所示。

(2)當 $P \leqslant Q$ 時，$M_{3,1}$ 爲最大，此時 $M_{3,1}=\pi(R_1{}^2+R_2{}^2+r_{3,1}{}^2)$，其中

$r_{3,1}=\frac{1-\sin\frac{B}{2}}{1+\sin\frac{B}{2}}\cdot R_1$，此時嵌入之三個圓如圖 21 所示。



（圖 20）

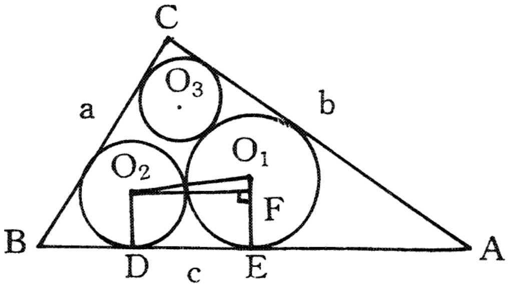


（圖 21）

七、附錄

在以上的討論分析和比較中，我們未將 $M_{4,2}=M_{5,2}$ 的情況列入考慮，這是我們的整個研究過程中碰到的一個障礙，令說明如下：

如果要拿 $M_{4,2}$ 的值與其他的函數值作比較，我們必須先確定此時的變數 θ_1（即 β）的值，也就是說，對於給定的三角形 ABC 我們要能把 β 的值用 A、B、C 或 a、b、c 的函數來表示，爲此，我們曾考慮下面的處理方法：如圖 22 所示：



（圖 22）

$$\overline{BD}=r_2\cot\frac{B}{2}，\overline{AE}=r_1\cot\frac{A}{2}$$

所以 $\overline{DE}=\overline{AB}-r_2\cot\frac{B}{2}-r_1\cot\frac{A}{2}$，又 $DEFO_2$ 爲一矩形

所以 $\overline{O_1F}=\overline{O_1E}-\overline{FE}=r_1-r_2$

$$\overline{O_2F}=\overline{DE}=\overline{AB}-r_2\cot\frac{B}{2}-r_1\cot\frac{A}{2}$$

已知 O_1、O_2、O_3 兩兩外切，故 $O_1O_2=r_1+r_2$，$O_2O_3=r_2+r_3$，$O_1O_3=r_1+r_3$，而$\triangle O_1O_2F$ 中，$\overline{O_1F}\perp\overline{O_2F}$

所以$(\overline{O_1O_2})^2+(\overline{O_2F})^2$

得$(r_1+r_2)^2=(r_1-r_2)^2+(\overline{AB}-r_2\cot\frac{B}{2}-r_1\cot\frac{A}{2})^2$

化簡得 $2\sqrt{r_1r_2}=(\overline{AB}-r_1\cot\frac{A}{2}-r_2\cot\frac{B}{2})$ ……………………………(1)

同理得 $2\sqrt{r_2r_3}=(\overline{BC}-r_2\cot\frac{B}{2}-r_3\cot\frac{C}{2})$ ……………………………(2)

$2\sqrt{r_1r_3}=(\overline{AC}-r_1\cot\frac{A}{2}-r_3\cot\frac{C}{2})$ ……………………………(3)

若取 $\begin{cases}\sqrt{r_1}=x_1，\cot\frac{A}{2}=\alpha\\ \sqrt{r_2}=x_2，\cot\frac{B}{2}=\beta\\ \sqrt{r_3}=x_3，\cot\frac{C}{2}=\gamma\end{cases}$ 則有 $\begin{cases}\alpha x_1^2+2x_1x_2+\beta x_2^2=\overline{AB}=C\\ \beta x_2^2+2x_2x_3+\gamma x_3^2=\overline{BC}=a\cdots(＊＊＊)\\ rx_3^2+2x_3x_1+\alpha x_1^2=\overline{AC}=b\end{cases}$

如果 $x_1x_2x_3$ 的聯立方程式（＊＊＊）能夠被解出，則由 $\theta=\sin^{-1}(\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2})$ 即可找到 β 值，但此聯立方程式的求解相當困難，亦無法從其他文獻中找到相關資料，我們甚至爲此還對校内及校外公開做式（＊＊＊）的解的有獎徵答，但迄完稿之前，皆未獲得任何的答案。不過從電腦程式摹擬的大量觀察中，發現 $M_{4,2}$ 未

有大於 $M_{5,3}$ 的情況，所以在上述研究過程中，便沒有把此時的情況列入考慮，這是本研究到目前爲止的一個未解之疑，我們希望不久的將來能將之解決，以獲得本研究之完整解答。

評語

選題很切合高中學生之程度，學生對於作品內容澈底了解。雖然有一部分尚未完全解決，但作者對於其困難及解題關鍵有深入了解，希望能繼續努力，以求解決。