圓錐曲線上包絡線之探討

高中組數學科第一名

北一女中

作　　者：朱柏貞

指導教師：李政貴

一、研究動機

在"高中數學——自然數系"書中，第六章自然數的除法運算裏，有一組問題如下：在圓周上取出 24 個等分點，分別記爲 0,1,2,……,23(A)將 0 連到 6，將 1 連到 7，……，17 連到 23，這些直線段（圓上的弦），可以找到一個圓以這些直線段爲切線（此圓爲此直線族的包絡線）(B)將 1 連到 2，2 連到 4，……，11 連到 22，12 連到 0，13 連到 2，……，23 連到 22，則這些弦的包絡線爲一心臟線，這組問題引起我對包絡線的注意。

80 年暑假參加數學研習營，楊維哲教授談到"心臟線"是數個曲線族的包絡線，心臟線也是圓族的包絡線；因此更引發我對包絡線的興趣，想作更進一步的探討和研究。

二、預備研究與討論

本文欲探討的主題是包絡線，我們先定義包絡線，並證明一個"n 尖外擺線(n-cusped epicycloid)"的參數式和包絡線求法。

1. 包絡線(envelope)

   設 $T(x, y, t)=0$ 爲一曲線族，其中 t 爲參數，若曲線 $p(x, y)=0$ 與 $T(x, y, t)=0$ 的每條曲線都相切，則稱 $p(x, y)=0$ 爲曲線族 $T(x, y, t)=0$ 的包絡線。

2. 外擺線

   一個定圓及一個動圓，當動圓沿著定圓的圓周滾動（不滑動）時，動圓上的一個定點所形成的軌跡，稱爲外擺線。如果定圓的半徑是動圓的 n 倍時，稱爲 n 尖外擺線。

設定圓的圓心爲座標平面上的原點，半徑爲 a，動圓的半徑爲 b，與定圓

(1)相切在 P 點，P 在 x 軸正向上，則 $p(x, y)$ 的軌跡參數式爲

$$\begin{cases} x=(a+b)\cos\theta-a\cos\left(\dfrac{a+b}{a}\right)\theta \\ y=(a+b)\sin\theta-a\sin\left(\dfrac{a+b}{a}\right)\theta \end{cases}$$

(2)設定圓的圓心爲座標平面上的原點，半徑爲 a，動圓的半徑爲 b，與定

圓相切在 P 點，P 在 x 軸正向上，且 Q 點爲動圓過 P 直徑的另一端，則

Q(x, y)的參數式爲

$$x=(a+b)\cos\theta+b\cos(\frac{a+b}{b})\theta$$

$$y=(a+b)\sin\theta+b\sin(\frac{a+b}{b})\theta$$

證明：設∠ROP＝θ 則 RP 弧長＝$a\theta$　　$\therefore \angle OO'P'=\frac{a\theta}{b}$

$$\theta'=\angle Q'O'H=\pi-(\theta+\frac{a\theta}{b})=\pi-[\frac{(a+b)\theta}{b}]$$

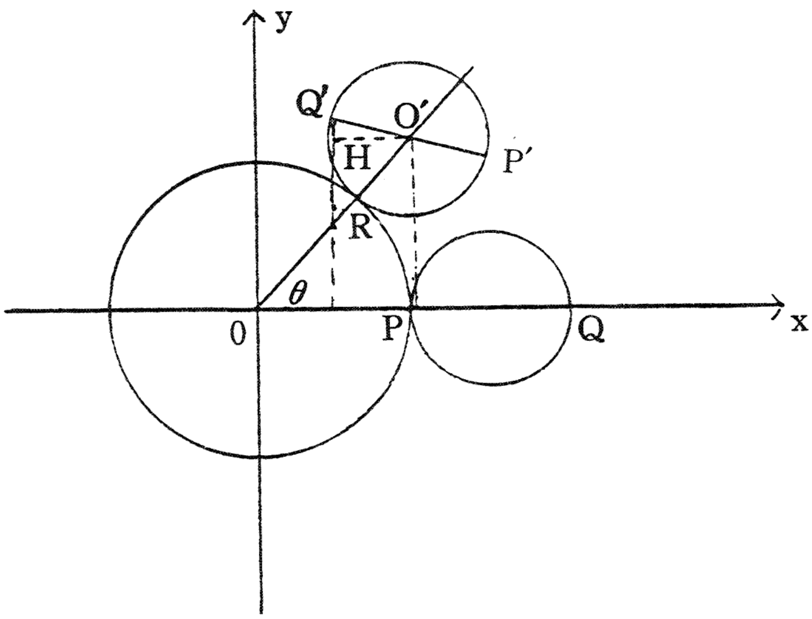
$$\therefore x=\overline{OO'}\cos\theta-b\cos\theta'=(a+b)\cos\theta-b\cos[\pi-\frac{(a+b)\theta}{b}]$$

$$=(a+b)\cos\theta+b\cos(\frac{a+b}{b})\theta$$

$$y=\overline{OO'}\sin\theta+b\sin\theta'=(a+b)\sin\theta+b\sin(\frac{a+b}{b})\theta$$

所以得到 Q 的軌跡參數式爲

$$\begin{cases} x=(a+b)\cos\theta+b\cos(\frac{a+b}{b})\theta \\ y=(a+b)\sin\theta+b\sin(\frac{a+b}{b})\theta \end{cases}$$



(3)n 尖外擺線

ㄅ、從 2(2)的結果可得當 a＝nb 時，Q 的軌跡爲

$$\begin{cases} x=(n+1)b\cos\theta+b\cos(n+1)\theta \\ y=(n+1)b\sin\theta+b\sin(n+1)\theta \end{cases}$$，稱爲 n 尖外擺線

ㄆ、設 $a=\frac{n}{n+2}$，$b=\frac{1}{n+2}$時，(1)的 n 尖外擺線參數式爲

$$\begin{cases} x=\frac{n+1}{n+2}\cos\theta+\frac{1}{n+2}\cos(n+1)\theta \\ y=\frac{n+1}{n+2}\sin\theta+\frac{1}{n+2}\sin(n+1)\theta \end{cases}$$

3. 包絡線的求法

本文想探討的主題是圓錐曲線上某些直線族的包絡線和形成圓錐曲線的包絡線，下面處理的方法有三種

(1)直觀法（從作圖得到的結果猜測並證明）

(2)重根法

(3)微分法

〔預備定理〕直線族 $T_t(x, y, t)=0$，t 爲參數，則參數式

$$\begin{cases} T_t(x, y, t)=0 \\ \frac{\partial T_t(x, y, t)}{\partial t}=0 \end{cases}$$

的軌跡爲此直線族的包絡線

證明：直線族 $T_t(x, y, t)=0$，存在三個函數 $\alpha(t)$，$\beta(t)$，$\gamma(t)$表示直線族 $T_t(x, y, t)=0$，即 $T_t(x, y, t)=\alpha(t)x+\beta(t)y+\gamma(t)=0$，設$\Gamma(x, y)=0$ 爲 $T_t(x, y, t)=0$ 的包絡線對一個 t 而言，設$P(x, y)$爲$\Gamma(x, y)=0$ 與 $T_t(x, y, t)=0$ 的切點，令此切點$P(x, y)$爲 $x=f(t)$，$y=g(t)$，由隱函數定理得在 P 點附近，有一個函數 $y=h(x)$爲$\Gamma(x, y)=0$ 的隱函數，由連鎖定律得到 $\frac{dy}{dt}=h'(f(t))f'(t)$所以 $h'(f(t))=\frac{dy}{dt}/f'(t)$，但是由包絡線定義知 $T_t(x, y, t)=0$ 爲過 $P(x, y)=(f(t), g(t))$的切線，其斜率爲 $\frac{-\alpha(t)}{\beta(t)}$而$\Gamma(x, y)=0$ 過 $P(x, y)=(f(t), g(t))$的切線的斜率爲 $h'(f(t))$

所以 $\frac{dy}{dt}/f'(t)=\frac{-\alpha(t)}{\beta(t)}$即$\alpha(t)\frac{df(t)}{dt}+\beta(t)\frac{dy}{dt}=0$

也就是$\alpha(t)\frac{dx}{dt}+\beta(t)\frac{dy}{dt}=0$ ………………………………… (A)

但切點 $P(x, y)=(f(t), g(t))$必在切線$\alpha(t)x+\beta(t)y+\gamma(t)=0$之上

所以$\alpha'(t)x+\alpha(t)\frac{dx}{dt}+\beta'(t)y+\beta(t)\frac{dy}{dt}+\gamma'(t)=0$ …… (B)

整理(A)(B)兩式得 $\alpha'(t)x+\beta'(t)y+\gamma'(t)=0$ ……………………(C)

(C)式即可寫成$\frac{\partial}{\partial t}T_t(x, y, t)=0$

因此我們可得到下面的結論

$\Gamma(x, y)=0$ 與 $T_t(x, y, t)=0$ 的切點滿足 $\begin{cases} T_t(x, y, t)=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}T_t(x, y, t)=0 \end{cases}$

由此切點參數式消去參數 t 即可得包絡線 $\Gamma(x, y)=0$ 的方程式

三、研究目的

(一)由電腦作圖觀察與了解包絡線。

(二)由直觀的方式探討簡單的包絡線。

(三)圓錐曲線上弦族包絡線的研究。

(四)圓上動點與任一定點的線段族之包絡線研究（一般紙摺圓錐曲線的研究與擴展）。

(五)以圓錐曲線爲包絡線的一些直線族之探討。

四、研究工具

紙、筆 16 位元 AT 個人電腦、列印表機。

五、研究過程及討論

(一)電腦作圖與觀察。

(二)直觀的角度探討簡單的包絡線

1. 圓上兩點 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 與 $(r\cos(\theta+\alpha), r\sin\theta(\theta+\alpha))$ 連線之包絡線。

(1)設圓方程式爲 $x^2+y^2=r^2$

將圓周等分爲 12 個等分

各等分點分別記爲 $p_0,p_1,p_2,\cdots\cdots,p_{11}$

連接 $\overline{p_0p_3},\overline{p_1p_4},\cdots\cdots,\overline{p_8p_{11}},\overline{p_9p_0},\overline{p_{10}p_1},\overline{p_{11}p_2}$

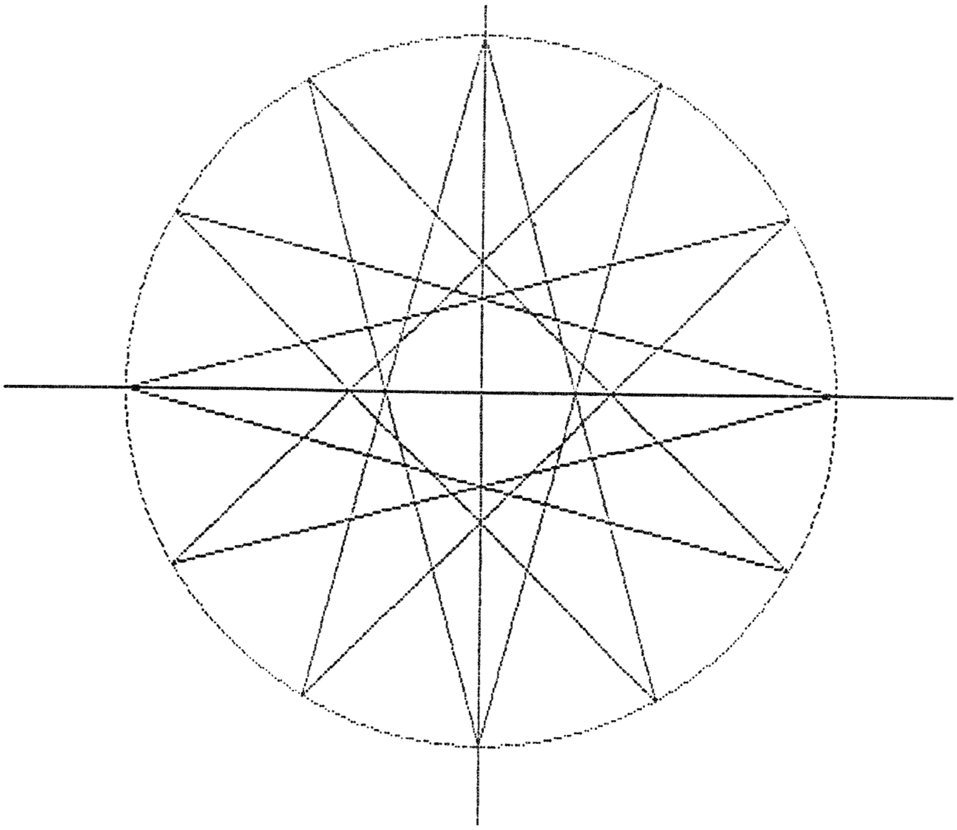
則此直線族 $\overline{p_ip_{i+3}}$（$i=0，1，2，\cdots\cdots，11$ 而當 $i+3\geq 12$ 時以 h 代之，此時 $h<12$ 且 $i+3\equiv h(\mathrm{mod}\ 12)$）與原點的距離均爲 $\frac{r}{\sqrt{2}}$，所以圓 $x^2+y^2=\frac{1}{2}r^2$ 爲此直線族的包絡線

(2)若連接 $\overline{p_ip_{i+5}}$ $(i=0, 1, 2, \ldots\ldots, 11)$ 則此直線族的包絡線爲 $x^2+y^2=\frac{2-\sqrt{3}}{4}r^2$（當 $i+5\geq 12$ 時以 h 代之，此時 $h<12$ 且 $i+5\equiv h(\mathrm{mod}\ 12)$）

圓：X^2＋Y^2＝R^2

直線族：(R＊COS(T), R＊SIN(T))－(R＊COS(150＋T), R＊SIN(150＋T))

包絡線：X^2＋Y^2＝(COS(75)＊R)^2)



(3)若直線族為 $\overline{p_ip_{i+d}}$，其中 $d<6$ 且 $d\in N$，則其包絡線為

$x^2+y^2=r^2\cos^2\frac{d\pi}{12}$

證明：令 $p_i(r\cos\frac{i\pi}{6}, r\sin\frac{i\pi}{6})(i=0, 1, 2, ..., 11)$

則 $p_{i+d}(r\cos\frac{i+d}{6}\pi, r\sin\frac{i+d}{6}\pi)(d<6, d\in N)$

$\overline{p_ip_{i+d}}$ 的方程式為 $x\cos(\frac{2i+d}{6}\pi)+y\sin(\frac{2i+d}{6}\pi)-r\cos\frac{d\pi}{12}=0$

原點 0 到 $\overline{p_ip_{i+d}}$ 的距離 $d(0, \overline{p_ip_{i+d}})=r\cos\frac{d\pi}{12}$

因此以 $\overline{p_ip_{i+d}}$ 弦中點為切點

直線族 $\overline{p_ip_{i+d}}$ 的包絡線為 $x^2+y^2=r^2\cos^2\frac{d\pi}{12}$

(4)將圓 24 等分時，d 為小於 12 的任意正整數，而 $i+d\geqslant 24$ 時，以 h 代之，此時 $h<24$ 且 $i+d\equiv h(\text{mod } 24)$，則直線族 $\overline{p_ip_{i+d}}$ 的包絡線為 $x^2+y^2=r^2\cos^2\frac{d\pi}{24}$。

(5)將圓 n 等分時，連接 $\overline{p_ip_{i+d}}$，$i=0$，1，2，……，$n-1$，d 為小於 $\frac{n}{2}$ 的任意正整數，而 $i+d\geqslant n$ 時以 h 代之，此時 $h<n$ 且 $i+d\equiv h(\text{mod } n)$

，則直線族 $\overline{p_ip_{i+d}}$ 的包絡線爲 $x^2+y^2=r^2\cos^2\frac{d\pi}{n}$（參考附錄一）

證明：令 $p_i(r\cos\frac{2i\pi}{n}, r\sin\frac{2i\pi}{n})(i=0, 1, 2, \ldots\ldots, n-1)$

則 $p_{i+d}(r\cos\frac{2(i+d)}{n}\pi, r\sin\frac{2(i+d)}{n}\pi)$
$(d<\frac{n}{2}, d\in N)$

$\overline{p_ip_{i+d}}$ 的方程式 $x\cos(\frac{2i+d}{n}\pi)+y\sin(\frac{2i+d}{n}\pi)-r\cos\frac{d\pi}{n}=0$，原始 0 到 $\overline{p_ip_{i+d}}$ 的距離

$d(0, \overline{p_ip_{i+d}})=r\cos\frac{d\pi}{n}$

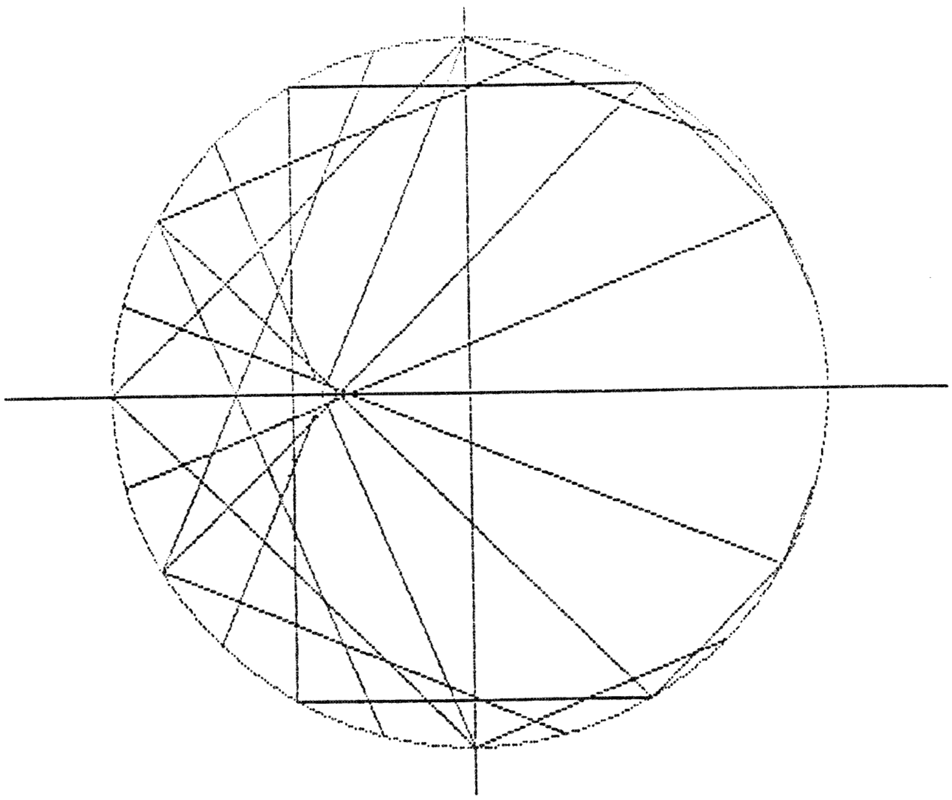
因此以 $\overline{p_ip_{i+d}}$ 弦中點爲切點

直線族 $\overline{p_ip_{i+d}}$ 的包絡線 $x^2+y^2=r^2\cos^2\frac{d\pi}{n}$

2. 圓上 24 個等分點 $p_k(\cos\frac{k\pi}{12}, \sin\frac{k\pi}{12})$，連接 $\overline{p_1p_2}$，$\overline{p_2p_4}$，……$\overline{p_kp_{2k}}$ 其中 $2k\geqslant 24$ 時 $2k$ 以 h 代之，此時 $h\equiv 2k(\mathrm{mod}\ 24)$，這些弦的包絡線從電腦作圖粗略的看出來是心臟線，爲什麼？

圓：X^2＋Y^2＝1

直線族：(COS(T), SIN(T))－(COS(2＊T), SIN(2＊T))



證明：（從作圖及電腦作圖的結果，我們直觀看到包絡線由極相近的兩條線的交點所形成的，所以我們先從這概念來找可能的包絡線再證明）。

第一部份：

(1)設 $A_1(r\cos\alpha, r\sin\alpha)A_2(r\cos 2\alpha, r\sin 2\alpha)$ 則 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 直線的方程式為

$$x\cos\frac{3\alpha}{2}+y\sin\frac{3\alpha}{2}=r\cos\frac{\alpha}{2}$$

(2)設 $B_1(r\cos\beta, r\sin\beta)$，$B_2(r\cos 2\beta, r\sin 2\beta)$ 則 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$ 直線的方程式為 $x\cos\frac{3\beta}{2}+y\sin\frac{3\beta}{2}=r\cos\frac{\beta}{2}$

(3) $\overline{A_1A_2}$ 與 $\overline{B_1B_2}$ 的交點為：

由"Cramer's Rule"得

$$x=r\left(\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{3\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)\Big/\sin\left(\frac{3\alpha}{2}-\frac{3\beta}{2}\right)$$

$$y=r\left(\cos\frac{3\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right)\Big/\sin\left(\frac{3\alpha}{2}-\frac{3\beta}{2}\right)$$

(4)令 x，y 的分子、分母，分別為 $f(\beta)$，$g(\beta)$，$F(\beta)$，$G(\beta)$

即 $x=\dfrac{f(\beta)}{g(\beta)}$，$y=\dfrac{F(\beta)}{G(\beta)}$

當 α 逼近 β 時 $f(\beta)$，$g(\beta)$，$F(\beta)$，$G(\beta)$ 都逼近於 0

所以要找極相近的兩直線的交點就是 $\lim_{\alpha\to\beta} X$ 與 $\lim_{\alpha\to\beta} y$

(5)由 L'Hospital's Rule 得 $\lim_{\beta\to\alpha} X=\dfrac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$，$\lim_{\alpha\to\beta} y=\dfrac{F'(\alpha)}{G'(\alpha)}$

由此我們可以得到 $\lim_{\beta\to\alpha} X=\dfrac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}=\dfrac{r(2\cos\alpha+\cos 2\alpha)}{3}$

$$\lim_{\beta\to\alpha} y=\frac{F'(\alpha)}{G'(\alpha)}=\frac{r(2\sin\alpha+\sin 2\alpha)}{3}$$

第二部份

(1)從上面的分析與推算，我們可以得到直線段族 $\overline{p_kp_{2k}}$ 的包絡線是由點$\left(\dfrac{r(2\cos\theta+\cos 2\theta)}{3}, \dfrac{r(2\sin\theta+\sin 2\theta)}{3}\right)$所形成的軌跡，其中 $\theta=\dfrac{k\pi}{12}$，此點恰好是線段 $\overline{p_kp_{2k}}$ 的三等分點的位置

(2) $Q(x, y)=\left(\dfrac{r(2\cos\theta+\cos 2\theta)}{3}, \dfrac{r(2\sin\theta+\sin 2\theta)}{3}\right)$的軌跡是什麼圖形呢？

$$\begin{cases} x=\dfrac{r(2\cos\theta+\cos2\theta)}{3}=\dfrac{r(2\cos\theta+2\cos^2\theta-1)}{3} \\ \quad =\dfrac{-r}{3}+\dfrac{2r}{3}\cos\theta\cdot(1+\cos\theta) \\ y=\dfrac{r(2\sin\theta+\sin2\theta)}{3}=\dfrac{2r\sin\theta(1+\cos\theta)}{3} \end{cases}$$

將坐標軸平移至$(\frac{-r}{3}, 0)$爲新原點時，新坐標系中

$$\begin{cases} \bar{x}=\dfrac{2r}{3}\cos\theta(1+\cos\theta) \\ \bar{y}=\dfrac{2r}{3}\sin\theta(1+\cos\theta) \end{cases}\text{，得 } \bar{x}^2+\bar{y}^2=\frac{4r^2}{9}(1+\cos\theta)^2$$

如果以ρ表示點$(\bar{x}, \bar{y})$與原點的距離，則可得

$\rho^2=\frac{4r^2}{9}(1+\cos\theta)^2$，即$\rho=\frac{2r}{3}(1+\cos\theta)$，此極方程式的圖形爲一心臟線，所以我們可以確定“直線段族$\overline{p_kp_{2k}}$”的包絡線是一個心臟線了。但是我們必須再證實此心臟線與$\overline{p_kp_{2k}}$的每條線都相切。

(3)不失一般性，我們證明 $r=1$ 的情形

從$\rho=\frac{2r}{3}(1+\cos\theta)$得$\rho^2=\frac{2}{3}(\rho+\rho\cos\theta)=\frac{2}{3}(\rho+\bar{x})$

因此 $3(\bar{x}^2+\bar{y}^2)=2(\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2}+\bar{x})$

$$\Rightarrow 9(\bar{x}^2+\bar{y}^2-\frac{2}{3}\bar{x})^2$$
$$=(3\bar{x}^2+3\bar{y}^2-2\bar{x})^2=4(\bar{x}^2+\bar{y}^2)$$

用原坐標系換新坐標方程式得

$$[3(x+\frac{1}{3})^2+3y^2-2(x+\frac{1}{3})]^2=4[(x+\frac{1}{3})^2+y^2]$$
$$\Rightarrow[(3x)^2+(3y)^2-1]^2=4[(3x+1)^2+(3y)^2]$$

對此心臟線，欲證直線$\overline{p_kp_{2k}}$爲以$Q(\frac{2\cos\theta+\cos2\theta}{3}, \frac{2\sin\theta+\sin2\theta}{3})$爲切點的切線，所以我們先對方程式“隱微分”得

$$2[(3x)^2+(3y)^2-1][2(3x)\cdot3+2(3y)(3y')]=$$
$$4[2(3x+1)\cdot3+2\cdot3y\cdot3y']$$
$$\Rightarrow3[(3x)^2+(3y)^2-1](x+y\cdot y')=2[(3x+1)+3y\cdot y'] \cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

所以以$Q(\frac{2\cos\theta+\cos2\theta}{3}, \frac{2\sin\theta+\sin2\theta}{3})$爲切點的切線斜率$y'$，可從下面的推算結果得到

$(3x)^2+(3y)^2-1=(2\cos\theta+\cos2\theta)^2+(2\sin\theta+\sin2\theta)^2-1=4+4\cos\theta$

因此，代入(＊)得

$y'(-1)(2\sin\theta+\sin2\theta)(1+2\cos\theta)$

$=(2\cos\theta+\cos2\theta)+2\cos\theta(2\cos\theta+\cos2\theta)-1$

上式化簡

左式$=(2\sin\theta+\sin2\theta)(1+2\cos\theta)$

$$=(2\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})[1+2(1-2\sin^2\frac{\theta}{2})]$$

$$=4\cos^2\frac{\theta}{2}(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})(3-4\sin^2\frac{\theta}{2})$$

$$=8\cos^3\frac{\theta}{2}(3\sin\frac{\theta}{2}-4\sin^3\frac{\theta}{2})$$

$$=8\cos^3\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{3\theta}{2}$$

右式$=(2\cos\theta+\cos2\theta)+2\cos\theta(2\cos\theta+\cos2\theta)-1$

$=4\cos^2\theta+2\cos\theta\cos2\theta+2\cos\theta+\cos2\theta-1$

$=2(1+\cos2\theta)+2\cos\theta\cos2\theta+2\cos\theta+\cos2\theta-1$

$=2(\cos2\theta+\cos\theta\cdot\cos2\theta+\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=2(1+\cos\theta)(\cos2\theta+\cos\theta)$

$=8\cos\frac{3\theta}{2}\cos^3\frac{\theta}{2}$

(I)所以以θ為切點的切線斜率

$y'=-\cot\frac{3\theta}{2}$

切線方程式為 $y-\frac{2\sin\theta+\sin2\theta}{3}$

$$=-\cot\frac{3\theta}{2}(x-\frac{2\cos\theta+\cos2\theta}{3})$$

$\Rightarrow x\cos\frac{3\theta}{2}+y\sin\frac{3\theta}{2}$

$=\frac{1}{3}(2\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})=\cos\frac{\theta}{2}$ ………………………………… (A)

(II)另一方面，圓的 24 個等分割點 $p_k(\cos\frac{k\pi}{12}, \sin\frac{k\pi}{12})$

$k=0$，1，2，，……，23，弦 $\overline{p_kp_{2k}}$ 的方程式為

$$x\cos\frac{k\pi}{8}+y\sin\frac{k\pi}{8}=\cos\frac{k\pi}{8}\cos\frac{k\pi}{12}+\sin\frac{k\pi}{8}\sin\frac{k\pi}{12}$$

$$=\cos\frac{k\pi}{24}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(B)}$$

在(A)式中取 $\theta=\frac{k\pi}{12}$ 時，就得到(B)式，因此從(1)與目的推算證明了，每條弦 $\overline{p_kp_{2k}}$ 都是心臟線 $[(3x)^2+(3y)^2-1]^2=4[(3x+1)^2+(3y)^2]$ 的切線，此心臟線爲

$(\frac{2\cos\theta+\cos2\theta}{3}，\frac{2\sin\theta+\sin2\theta}{3})$ 的軌跡

3. 兩相交直線上分割點的連線之包絡線的探討

(1)兩正交直線上的等分割點的連線的包絡線

設 L_1，L_2 相正交於 $O(0,0)$ 設 $A_k(k,0)$，$B_h(0,h)$ 爲兩線的等分割點，$1\leq k$，$h\leq n$，則直線族 $\ell_{k,n+1-k}$ 的包絡線爲拋物線

證明：(一)令 $\ell_{k,h}$ 表連接 A_k，B_h 兩點的直線

則 $\ell_{k,h}$ 的方程式爲 $\frac{x}{k}+\frac{y}{h}=1$

設 $\ell_{k,n+1-k}$ 與 $\ell_{k+1,n-k}$ 的交點爲 p_k，則 p_k 爲

$$\begin{cases}\frac{x}{k}+\frac{y}{n+1-k}=1\\ \frac{x}{k+1}+\frac{y}{n-k}=1\end{cases}$$ 之聯立解

得 $p_k(\frac{k(k+1)}{n+1}，\frac{(n-k)(n-k+1)}{n+1})$

$k=1，2，3\cdots\cdots n-1，n$。$k=0$ 時 $p(0,n)$

$k=n$ 時 $p_n(n,0)$，其中 P_0 表 $\ell_{1,n}$ 與 y 軸交點

p_n 表示 $\ell_{n,1}$ 與 x 軸 的交點，我們也可用 $\ell_{0,n+1}$ 與 $\ell_{n+1,0}$ 分別表示 y 軸與 x 軸，就更方便了。

從直觀的圖形看來 $\ell_{k,n+1-k}$ 的包絡線是由 $\overline{p_kp_{k+1}}$ 的中點所形成的。我們試著來證明這個事實

$p_k(\frac{k(k+1)}{n+1}，\frac{(n-k)(n-k+1)}{n+1})$，

$p_{k+1}(\frac{(k+1)(k+2)}{n+1}，\frac{(n-k-1)(n-k)}{n+1})$

因此 $\overline{p_k p_{k+1}}$ 線段的中點 $Q_k(\frac{(k+1)^2}{n+1}，\frac{(n-k)^2}{n+1})$令 $Q_k(x, y)$

則 $\begin{cases} x=\dfrac{(k+1)^2}{n+1} \\ y=\dfrac{(n-k)^2}{n+1} \end{cases}$ 由此可得 $\begin{cases} x(n+1)=(k+1)^2 \\ y(n+1)=[(n+1)-(k+1)]^2 \end{cases}$

$2(n+1)y+(n+1)^2=0$ ……………………………………………………(A)

(I)上面(A)式的圖形從圓錐曲線的判別式可知道它是一拋物線的圖形。

(II)如果將坐標軸旋轉 45° 建立一個新坐標系 $x'-y'$ 則可將(A)式轉換得 $y'^2=\sqrt{2}(n+1)(x'-\frac{n+1}{2\sqrt{2}})$，從此關係，可推算出(A)式的

拋物線圖形的頂點在$(\frac{n+1}{4}，\frac{n+1}{4})$，且以 $x-y=0$ 爲對稱軸，且 $\sqrt{2}(n+1)$爲此拋物線的正焦弦長。

證明：(二)我們必須證實每一條線 $\ell_{k,n+1-k}$ 爲(A)式的切線

令 $\Gamma(x, y)=x^2-2xy+y^2-2(n+1)x-2(n+1)y+(n+1)^2=0$

將 $\Gamma(x, y)$對 x 微分得

$$2x-2y-2xy'+2y\cdot y'-2(n+1)-2(n+1)y'=0$$

所以 $y'=\dfrac{x-y-(n+1)}{x-y+(n+1)}$，因此 $Q_k(\frac{(k+1)^2}{n+1}，\frac{(n-k)^2}{n+1})$

爲切點的切線方程式爲 $y-\dfrac{(n-k)^2}{n+1}=m\cdot(x-\dfrac{(k+1)^2}{n+1})$

$$\text{其中 } m=\left[\frac{(k+1)^2}{n+1}-\frac{(n-k)^2}{n+1}-(n+1)\right]\Big/\left[\frac{(k+1)^2}{n+1}-\frac{(n-k)^2}{n+1}+(n+1)\right]=\frac{-(n-k)}{k+1}$$

所以切線方程式就化爲 $y-\dfrac{(n-k)^2}{n+1}=\dfrac{-(n-k)}{k+1}(x-\dfrac{(k+1)^2}{n+1})$

$$\Rightarrow y+\frac{n-k}{k+1}x=\frac{(n-k)(n+1)}{(n+1)}=n-k$$

$$\Rightarrow \frac{x}{k+1}+\frac{y}{n-k}=1$$

因此 $\ell_{k+1,n-k}$ 爲 $\Gamma(x, y)=0$ 以 Q_k 爲切點的切線所以 $\Gamma(x, y)=x^2-2xy+y^2-2(n+1)x-2(n+1)y+(n+1)^2=0$ 爲直線族 $\ell_{k,n+1-k}$ 的包絡線

(2)交角為θ，$0<\theta<\pi$的兩直線上的分割點的連線的包絡線

解：設兩線交點0，一直線為x軸，另一線$y=x\tan\theta$

$A_k(k,0)$，$B_k(k\cos\theta, k\sin\theta)$分別為兩線上的分割點，$k=1$，2，……n 直線$\ell_{k,n+1-k}$表連接$A_k,B_{n+1-k}$兩點的直線

則$\ell_{k,n+1-k}$的方程式為$y=\dfrac{-(n+1-k)\sin\theta}{k-(n+1-k)\cos\theta}(x-k)$

整理得$\ell_{k,n+1-k}$為$x(n+1-k)\sin\theta+y[k-(n+1-k)\cos\theta]=k(n+1-k)\sin\theta$

同理得$\ell_{k+1,n-k}$為$x(n-k)\sin\theta+[(k+1)-(n-k)\cos\theta]y=(k+1)(n-k)\sin\theta$

令$\ell_{k,n+1-k}$與$\ell_{k+1,n-k}$的交點為$p_k(x,y)$

$$p_k\left(\frac{k(k+1)+(n-k)(n+1-k)\cos\theta}{n+1},\ \frac{(n-k)(n+1-k)\sin\theta}{n+1}\right)$$

同理可得$\ell_{k+1,n-k}$與$\ell_{k+2,n-1-k}$的交點

$$p_{k+1}\left(\frac{(k+1)(k+2)+(n-k-1)(n-k)\cos\theta}{n+1},\ \frac{(n-k-1)(n-k)\sin\theta}{n+1}\right)$$

因此p_k與p_{k+1}連線段的中點$Q_k\left(\dfrac{(k+1)^2+(n-k)^2\cos\theta}{n+1},\ \dfrac{(n-k)^2\sin\theta}{n+1}\right)$。

所以$Q_k(x,y)$的軌跡在(＊) $\begin{cases} x=\dfrac{(k+1)^2+(n-k)^2\cos\theta}{n+1} \\ y=\dfrac{(n-k)^2\sin\theta}{n+1} \end{cases}$ 的圖形上

$\Rightarrow x^2-2xy(\csc\theta+\cot\theta)+y^2(\csc\theta+\cot\theta)^2+2(n+1)[x-y(\csc\theta+\cot\theta)]-4(n+1)(x-y\cot\theta)+(n+1)^2=0$…………………(＊＊)

由圓錐曲線的判別式可知道(＊＊)的方程式之圖形為一拋物線特別地$\theta=90^\circ$，恰與3.-(1)中正交直線的直線族$\ell_{k,n+1-k}$的包絡線拋物線完全脗合。

(3)在正交 x－y 平面上的 x 軸 及 y 軸上的分割點 $A_k(ar^k, 0)$，$B_k(0, ar^k)$ 其中 $a>0$，$r>0$，則連接 A_k，B_{n-k} 的直線 $\ell_{k,n-k}$ 的包絡線爲何？

解：$\ell_{n-k,k}$ 的方程式爲 $\frac{x}{ar^{n-k}}+\frac{y}{ar^k}=1$

$\ell_{n-k+1,k+1}$ 的方程式爲 $\frac{x}{ar^{n-k+1}}+\frac{y}{ar^{k-1}}=1$

可求得 $\ell_{n-k,k}$ 與 $\ell_{n-k+1,k-1}$ 兩線的交點

$P_k(x, y)$，$x=\frac{ar^{n-k+1}}{r+1}$ 且 $y=\frac{ar^k}{r+1}$

同理可得 $\ell_{n-k-1,k+1}$ 與 $\ell_{n-k,k}$ 的交點

$p_{k+1}(\frac{ar^{n-k}}{r+1}，\frac{ar^{k+1}}{r+1})$ 則 $\overline{p_k p_{k+1}}$ 線段的中點 $Q_k\frac{(ar^{n-k}}{2}，\frac{ar^k}{2})$ 爲雙曲線 $xy=\frac{a^2r^n}{4}$ 上的點，我們也可證得每條 $\ell_{n-k，k}$ 必與雙曲線 $xy=\frac{a^2r^n}{4}$ 相切，所以我們確定正交直線上的等比分割點的連線的包絡線爲雙曲線。

結語：從(A)(B)(C)三類實例的包絡線求法的處理過程，我們知道要正確地觀察再猜測然後再證明直線族的每條直線是相當麻煩，甚至於也很困難的，所以下面的研究與探討要使用微分法及重根法。

3. 微分法求包絡線

(A)圓上的弦族 $P(r\cos\theta, r\sin\theta)$，$Q(r\cos t\theta, r\sin t\theta)$，t 爲一正實數，則 $\overleftrightarrow{PQ}$ 弦族($0\leq\theta\leq 2\pi$)的包絡線爲何？

解：$\overleftrightarrow{PQ}$直線的方程式爲

$$x\cos\frac{(t+1)\theta}{2}+y\sin\frac{(t+1)\theta}{2}-r\cos\frac{(t-1)\theta}{2}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

將(1)式對 θ 微分得 $(t+1)x\sin\frac{(t+1)\theta}{2}-(t+1)y\cos\frac{(t+1)\theta}{2}-$

$(t-1)r\sin\frac{(t-1)\theta}{2}=0$

由預備定理得 $\overleftrightarrow{PQ}$ 的包絡線為

$$x\cos\frac{(t+1)\theta}{2}+y\sin\frac{(t+1)\theta}{2}=r\cos\frac{(t-1)\theta}{2}$$

$(t+1)x\ \sin\dfrac{(t+1)\theta}{2}-(t+1)y\ \cos\dfrac{(t+1)\theta}{2}=(n-1)r\ \sin\dfrac{(t-1)\theta}{2}$ 的聯立解的軌跡：

聯立解為 $R(x, y)=\left(\dfrac{r}{t+1}(\cos t\theta+t\cos\theta),\ \dfrac{r}{t+1}(\sin t\theta+t\sin\theta)\right)$ 此點恰好是 $\overline{PQ}$ 線段上使 $\overline{PR}:\overline{RQ}=1:t$ 的位置上。從預備研究—2 的結果，我們知道，R 的軌跡為一個圓的外擺線，而這外擺線的定圓半徑為 $\dfrac{(t-1)r}{t+1}$，動圓的半徑為 $\dfrac{r}{t+1}$（其中 $t>1$）

特別地：(1)當 t 為整數時，$\overline{PQ}$ 弦的包絡線為 n 尖外擺線。

(2)當 $t=2$ 時為 1 一尖外擺線，其軌跡的參數式為

$$\begin{cases} x=\dfrac{r}{3}(2\cos\theta+\cos2\theta) \\ y=\dfrac{r}{3}(2\sin\theta+\sin2\theta) \end{cases}$$ 稱為心臟線

(3)當 $t=3$ 時為 2 一尖外擺線，其軌跡的參數式為

$$\begin{cases} x=\dfrac{r}{4}(3\cos\theta+\cos3\theta) \\ y=\dfrac{r}{4}(3\sin\theta+\sin3\theta) \end{cases}$$ 稱為腎臟線

(B)橢圓上的包絡線探討

橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上的弦 $\overline{PQ}$

(1)若 $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$，$Q(a\cos2\theta, b\sin2\theta)$ 則直線族 $\overline{PQ}$ 的包絡線為

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{3}(\cos2\theta+2\cos\theta) \\ y=\dfrac{b}{3}(\sin2\theta+2\sin\theta) \end{cases}$$ 如下頁圖

(2)若 $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$，$Q(a\cos n\theta, b\sin n\theta)$ 則直線族 $\overline{PQ}$ 的包絡線為

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{n+1}(\cos n\theta+n\cos\theta) \\ y=\dfrac{b}{n+1}(\sin n\theta+n\sin\theta) \end{cases}$$

證明：PQ 直線方程式爲

$$xb\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)+ya\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)-ab\cos\left(\frac{n-1}{2}\theta\right)=0 \cdots (1)$$

(1)式對 θ 偏微分

$$-\frac{n+1}{2}xb\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)+\frac{n+1}{2}ya\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)+\frac{n-1}{2}ab\sin\left(\frac{n-1}{2}\theta\right)=0 \cdots\cdots (2)$$

由(1)(2)式聯立得 $\begin{cases} x=\dfrac{a}{n+1}(\cos n\theta+n\cos\theta) \\ y=\dfrac{b}{n+1}(\sin n\theta+n\sin\theta) \end{cases}$

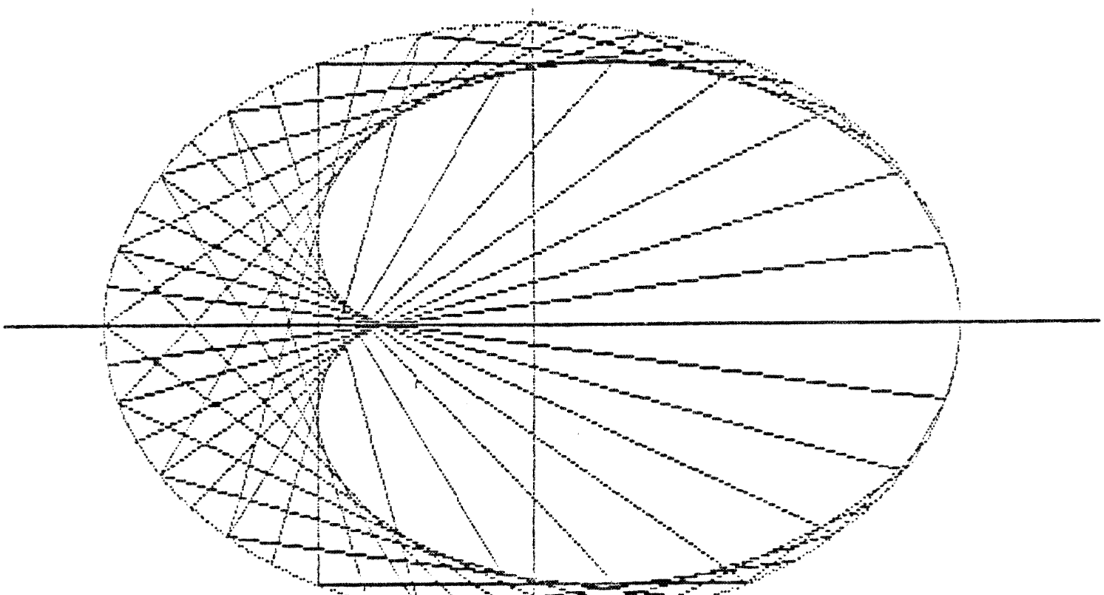
橢圓：$\frac{x\hat{}2}{A\hat{}2}+\frac{Y\hat{}2}{B\hat{}2}=1$

直線族：(A＊COS(T), B＊SIN(T))－(A＊COS(2＊T), B＊SIN(2＊T))

包絡線：X＝(A/3)＊(2＊COS(T)＋COS(2＊T))

Y＝(B/3)＊(2＊SIN(T)＋SIN(2＊T))

類似心臟線



(C)拋物線上的包絡線的探討

(1)設 $\overline{PQ}$ 爲拋物線 $y^2=4ax$ 的一動弦

(I)若 $\angle POQ=45^\circ$（0 爲圓點），則直線族 $\overline{PQ}$ 的包絡線爲一橢圓

$(x-12a)^2+8y^2=128a^2$

證明：利用重根法

設 $p(4at^2, 4at)Q(4ah^2, 4ah)(a, h, t=0)$

$|\overrightarrow{OP}|\ |\overrightarrow{OQ}|\cos 45^\circ=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$

$h=\dfrac{t-1}{t+1}$ or $h=\dfrac{t+1}{1-t}$ ……………………………………………… (1)

設 $p(x, y)=0$ 爲直線族之包絡線

$R(x, y)$ 爲 $\overline{PQ}$ 與 $P(x, y)$ 之切點則 $\overleftrightarrow{PR}=\overleftrightarrow{PQ}$

$\dfrac{y-4at}{x-4at^2}=\dfrac{1}{t+h}$ ……………………………………………… (2)

將(1)$h=\dfrac{t-1}{t+1}$代入(2)得

$(y-4a)t^2+(2y-x+4a)t-(y+x)=0$ ……………………………… (3)

∵R 爲切點 ∴方程式(3)有等根，判別式$=0$

$(2y-x+4a)^2+4(y-4a)(x+y)=0$

$(x-12a)^2+8y^2=128a^2$ 爲一橢圓

同理將(1)$h=\dfrac{t+1}{1-t}$代入(2)可得$(x-12a)^2+8y^2=128a^2$ 爲一橢圓。

(II)若$\angle POQ=\theta$，$(0<\theta<\pi)$ $\overline{PQ}$ 直線族的包絡線爲一橢圓

$$\tan^2\theta\left[x-\frac{4a(\tan\theta+2)}{\tan 2\theta}\right]^2+4(1+\tan^2\theta)y^2$$

$$=\frac{16a^2}{\tan^2\theta}(\tan^2\theta+4\tan\theta+4-\tan^4\theta)$$

證明：

設 $P(4at^2, 4at)Q(4ah^2, 4ah)$ $\angle POQ=\theta$

斜率 $m_{OP}=\dfrac{1}{t}$ $m_{OQ}=\dfrac{1}{h}$

$$\tan\theta=\frac{\left|\frac{1}{t}-\frac{1}{h}\right|}{1+\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{h}}=\frac{|h-t|}{th+1}$$

$$th\tan\theta+\tan\theta=|h-t|$$

$h=\dfrac{\tan\theta+t}{1-(\tan\theta)\cdot t}$ ……………………………………………… (1)

$$h=\frac{t-\tan\theta}{t\cdot\tan\theta+1}\cdots\cdots(2)$$

設 $\Gamma(x, y)=0$ 爲 $\overline{PQ}$ 直線族之包絡線

$R(x, y)$ 爲 $\overline{PQ}$ 與 $\Gamma(x, y)=0$ 之切點 $\overleftrightarrow{PR}=\overleftrightarrow{PQ}$，將(1)代入

$$\frac{y-4at}{x-4at^2}=\frac{1}{t+h}=\frac{-t\cdot\tan\theta+1}{-t^2\cdot\tan\theta+2t+\tan\theta}$$

$$(y\tan\theta+4a)^2t^2+(4a\cdot\tan\theta-2y-x\cdot\tan\theta)t+(x-y\tan\theta)=0$$

$$\cdots\cdots(3)$$

∵R 爲切點，方程式(3)有等根

∴判別式 $=(4a\cdot\tan\theta-2y-x\tan\theta)^2-4(y\tan\theta+4a)(x-y\tan\theta)=0$

$$\tan^2\theta\left[x-\frac{4a(\tan\theta+2)}{\tan^2\theta}\right]^2+4(1+\tan^2\theta)y^2$$

$$=\frac{16a^2}{\tan^2\theta}(\tan^2\theta+4\tan\theta+4-\tan4\theta)$$

將(2)代入(3)同理可證

(2)設拋物線爲 $y=x^2$，$P(t, t^2)$，$Q(nt, n^2t^2)$ 爲圖形上兩點，則弦族 $\overline{PQ}$ 的包絡線爲一拋物線。

證明：弦 $\overline{PQ}$ 方程式爲

$$x(n+1)t-y-nt^2=0\cdots\cdots(1)$$

(1)式對 t 偏微分 $x(n+1)-2nt=0\cdots\cdots(2)$

(1)(2)式聯立得 $\begin{cases}x=\dfrac{2nt}{n+1}\\ y=nt^2\end{cases}$ 即 $y=\dfrac{(n+1)^2}{4n}x^2$

∴弦族 $\overline{PQ}$ 的包絡線爲 $y=\dfrac{(n+1)^2}{4n}x^2$ 爲拋物線

(3)設拋物線 $y=x^2$，$P(t, t^2)$，$Q(\sqrt{n}t, nt^2)$ 爲圖形上兩點，則弦族 $\overline{PQ}$ 的包絡線爲 $y=\dfrac{(\sqrt{n}+1)^2}{4\sqrt{n}}x^2$

(D)雙曲線上的包絡線

設在雙曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上相異兩點 P，Q 決定了弦 $\overline{PQ}$

(1)若 $P(a\sec\theta, b\tan\theta)$，$Q(a\sec 2\theta, b\tan 2\theta)$ 則 $\overline{PQ}$ 弦族的包絡線

爲 $\begin{cases} x=\dfrac{3a}{2\cos\theta+\cos 2\theta} \\ y=\dfrac{b(2\sin\theta+\sin 2\theta)}{2\cos\theta+\cos 2\theta} \end{cases}$ 的軌跡

(2)若 $P(a\sec\theta, b\tan\theta)$，$Q(a\sec n\theta, b\tan n\theta)$，$n>0$，則 $\overline{PQ}$ 弦族的包絡線爲

$\begin{cases} x=\dfrac{(n+1)a}{n\cos\theta+\cos n\theta} \\ y=\dfrac{b(n\sin\theta+\sin n\theta)}{n\cos\theta+\cos n\theta} \end{cases}$ 的軌跡

(E)摺紙圓錐曲線的探討：

(1)一般摺紙圓錐曲線的研究，通常是在紙上有一定點 P 及一族動點 Q Q 在紙上的一定直線或一定圓上移動，將 P，Q 兩點叠合，而產一條摺痕線，此線爲 $\overline{PQ}$ 的中垂線，那麼 $\overline{PQ}$ 中垂線的包絡線爲一圓錐曲線。

(2)將(1)一般化：

設平面上一定點 P 及定圓 C，而 Q 爲圓 C 上的任意點，R 爲 $\overline{PQ}$ 線段上的點使 $\dfrac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}=t$，（t 爲一定數），則直線段 $\overline{PQ}$ 族所產生的垂線族 $\overline{RT}$（其中 $\overline{RT}$ 垂直 $\overline{PQ}$）的包絡線爲一圓錐曲線（P 在圓上例外）

爲了便於處理我們可以取 P 在 x 軸上

令 $P(a, 0)$，圓 $C：x^2+y^2=r^2$

則 $R(x_0, y_0)$ 滿足 $\overrightarrow{PR}=t\overrightarrow{PQ}$

所以 $(x_0-a, y_0)=t(r\cos\theta-a, r\sin\theta)$

$\therefore R\ \begin{cases} x_0=a(1-t)+tr\cos\theta \\ y_0=tr\sin\theta \end{cases}$

因此 $\overline{PQ}$ 的垂線 $\overleftrightarrow{RT}$ 的方程式爲

$(r\cos\theta-a)x+r(\sin\theta)y=ar(1-2t)\cos\theta+a^2(t-1)+tr^2$ …………(1)

將(1)對 θ 微分得 $x\sin\theta-y\cos\theta=a(1-2t)\sin\theta$ ……………………(2)

所以 $\overline{RT}$ 的包絡線爲(1)與(2)的聯立解的軌跡

由此得到 $\begin{cases} [x+a(2t-1)]\cos\theta+y\sin\theta=\dfrac{1}{r}(ax+k) \\ [x+a(2t-1)]\sin\theta-y\cos\theta=0 \\ k=t(r^2+a^2)-a^2 \end{cases}$

得$(r^2-a^2)[x+a(t-1)]^2+r^2y^2=(r^2-a^2)r^2t^2$……………………………＊

討論：

(一)$a<r$ 時　＊式可化爲 $A^2(x-h)^2+B^2y^2=C^2$ 的型式，$ABC\neq 0$

因此當定點 P 在圓內時，摺痕線的包絡線必爲橢圓。

(二)$a>r$ 時　＊式可化爲 $A^2(x-h)^2-B^2y^2=C^2$ 的型式，$ABC\neq 0$

因此當定點 P 在圓外時，摺痕線的包絡線必爲雙曲線。

(三)$a=r$ 時　＊式可化爲 $y=0$

因此當定點在圓上時，摺痕線的包絡線必爲直線。

(3)設平面上一定點 P 及一直線 ℓ，而 Q 在 ℓ 直線上移動，R 在 $\overline{PQ}$ 線段上使 $\dfrac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}=t$，（t 爲正定數）則直線段 $\overline{PQ}$ 所產生的垂線族 $\overline{RT}$（其中 $\overline{RT}\perp\overline{PQ}$)的包絡線爲一拋物線

證：取 $P(a, 0)$，在 X 軸上，ℓ 直線爲 Y 軸，Q 在 Y 軸上所以令 $Q(0, b)$

則 $R(x_0, y_0)$滿足 $\overrightarrow{PR}=t\overrightarrow{PQ}$

所以$(x_0-a, y_0)=t(-a, b)$

$\therefore R\ \begin{cases} x_0=a(1-t) \\ y_0=bt \end{cases}$

因此 $\overline{PQ}$ 的垂線 $\overleftrightarrow{RT}$ 的方程式爲

$ax-by+b^2t-a^2(1-t)=0$………………………………………………(1)

將(1)式對 b 微分得　$y=2bt$………………………………………………(2)

(1)，(2)式聯立解消去 b 得　$y^2=4atx-4a^2t(1-t)$

所以 $\overleftrightarrow{RT}$ 直線的包絡線必爲一拋物線，當 P 在直線 ℓ 上時例外，包絡線爲一直線。

六、推廣

在前面的探討工作裡，都是平面上的曲線的包絡線，因此，我們也試著來看立體（三度空間）的包絡面的情形。

(一)設球面 $S: x^2+y^2+z^2=a^2$，而 P，Q 爲球面上的兩動點

$P(a\cos\alpha\sin\gamma, a\sin\alpha\sin\gamma, a\cos\gamma)$，$Q(a\cos2\alpha\sin\gamma, a\sin2\alpha\sin\gamma, a\cos\gamma)$，$O(0, 0, 0)$爲球心，則 O，P，Q 三點決定一個平面，以 $\pi_{\alpha-\gamma}$ 表之則 $\pi_{\alpha-\gamma}$ 的方程式爲

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \cos\alpha\sin\gamma & \sin\alpha\sin\gamma & \cos\gamma \\ \cos2\alpha\sin\gamma & \sin2\alpha\sin\gamma & \cos\gamma \end{vmatrix}=0$$

整理得 $\pi_{\alpha-\gamma}$：$x\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\gamma+y\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\gamma+z\cos\frac{\alpha}{2}\sin\gamma=0$ (1)

$\pi_{\alpha-\gamma}$對 α 微分得 $3x\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\gamma-3y\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\gamma+z\sin\frac{\alpha}{2}\sin\gamma=0$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(2)

將(1)(2)兩式聯立消去參數 α 時

由五—(二)—(B)的討論過程及結論，我們知道

如果 γ，z 值取定時，它的包絡線爲心臟線

所以我們推測這平面族 $\pi_{\alpha-\gamma}$ 的包絡面爲心臟線構成的曲面

(二)設球面 S：$x^2+y^2+z^2=a^2$，而 $P(a\cos\alpha\sin\gamma, a\sin\alpha\sin\gamma, a\cos\gamma)$

$Q(a\cos n\alpha\sin\gamma, a\sin n\alpha\sin\gamma, a\cos\gamma)$，n 爲任意整數 $n\geqslant2$

$O(0, 0, 0)$，則平面族 OPQ 的包絡面爲由 n 尖外擺線所形成的曲面

七、結論與展望

本文的研究動機是"從直觀的方法"處理圓上的等距分點的弦族的包絡線，然後嚴密地證明"心臟線"也是某類弦族的包絡線。同時本文也得到下面的結論：

(一)圓上的弦族 $\overline{PQ}$，其中 $P(r\cos\theta, r\sin\theta)$，$Q(r\cos t\theta, r\sin t\theta)$的包絡線爲

$$\begin{cases} x=\dfrac{rt}{1+t}(t\cos\theta+\cos t\theta) \\ y=\dfrac{rt}{1+t}(t\sin\theta+\sin t\theta) \end{cases} \quad 0\leqslant\theta\leqslant2\pi, t>0$$

特別地：(A)$t=2$ 時，包絡線爲心臟線　(B)$t=3$ 時，包絡線爲腎臟線　(C)$t=n+1$ 時，包絡線爲 n 尖　外擺線。$n\in N$

(二)橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的弦族的包絡線對應以圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 的弦族的包絡線它們的對應關係是$(x, \frac{b}{a}y)\leftrightarrow(x, y)$。

(三)拋物線上的弦族 $\overline{PQ}$，如果 O 爲頂點，則使角$\angle POQ$ 爲任意定角的弦族的包絡線必爲橢圓。此外尚有以拋物線爲包絡線的情況。

㈣摺紙錐線：

R 爲定點，圓上的動點 P，在直線 $\overleftrightarrow{PR}$ 上的點 Q 使 $\overrightarrow{RQ}=t\overrightarrow{RP}$，$t\neq 0$　以 R 爲摺點，將 $\overline{RQ}$與 $\overline{RP}$ 疊合則$\overleftrightarrow{PR}$的垂線的摺痕的包絡線

(A)當 R 在圓内時，包絡線爲橢圓。

(B)當 R 在圓上時，包絡線爲一直線。

(C)當 R 在圓外時，包絡線爲雙曲線。

(D)如果圓上的點 P，改換成定直線時，R 在線外，則包絡線是拋物線。

電腦作圖，提供我們研究過程中可行的方向，同時我們也發現包絡線形成了漂亮圖案，適當的選擇可以作爲圖案設計之用。因此從包絡線的研究，可以體會到學術與應用與藝術，可以結合在一起的。例如結論中㈠的 5−尖外擺線可以做爲我國國花的圖案設計之用。

將平面上的直線族的包絡線研究，推展到空間平面族的包絡面或曲線族的包絡線，是值得深入探討的問題，也是我想繼續研究的課題。

八、參考資料

㈠林義雄編著。民國 74 年 8 月初版，中學數學讀物系列——高中數學(1)自然數系。p.300～p.301，p.142～p.143。

㈡楊維哲著，民國 71 年 9 月初版，三民書局。微積分（下）p.17.39～p.17.40。

㈢國立師範大學教育中心發行。民國 79 年 5 月出版科學教育月刊第二十一卷第五期曲線的世界——心臟線，趙文敏，p.373～p.377。

註：本研究內容中所有電腦作圖之執行程式均用“ETBASIC”語言，因程式很多，所以均省略。

評語

對於圓錐曲線之包絡線作很深入且完整之探討。選題很切合高中學生之程度。作者之數學基礎甚佳，表達能力優越。