

# 駐波所生的諧音和樂音音符的關係

## ／以吉他為例

高中組物理科第一名

省立台中女子高級中學

作者：楊如燁、林 潔  
陳亭秀、徐慶玲

指導教師：李瑞華

### 一、研究動機

物理課本上提到，駐波有第一諧音，第二諧音……，但是我們很想知道他們與樂音各音符一一對應的關係，以及各音符之間的頻率關係，於是我們便設計實驗，著手研究。

### 二、研究目的

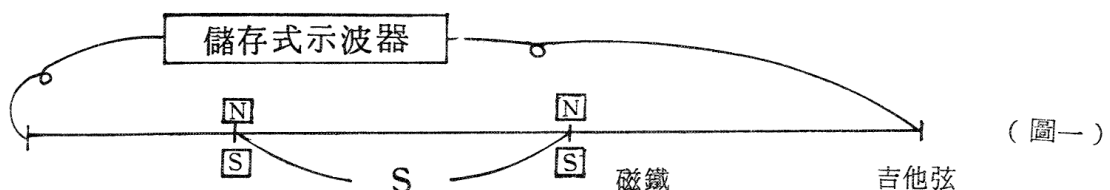
- (一)求弦波速度和張力，線密度的關係。
- (二)找出吉他各弦上之各音的共振頻率。
- (三)找出吉他各弦上之各音的自然頻率，並與共振頻率比較諧音關係。
- (四)找出各音符間的頻率關係。
- (五)找出各音符間的諧音關係。
- (六)以研究結果的關係，自製樂器。

### 三、實驗器材

(一)儲存式示波器 (二)訊號產生器 (三)雙電源供應器 (四)訊號放大器 (五)發光二極體(LED)偵測電路 (六)吉他 (七)強力磁鐵 (八)彈簧秤 (九)釣魚線 (十)竹筷 (十一)保利龍板

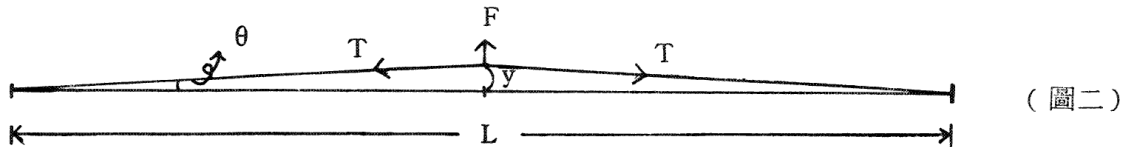
### 四、實驗裝置的設計與原理

- (一)求弦波速度和張力，線密度的關係(如圖一)



弦兩端連接示波器，兩個馬蹄型磁鐵跨放在弦間之任二位置。弦波經磁鐵的磁場時會產生感應電壓，而從示波器顯示出來。當力學脈衝經過磁鐵時，示波器即被觸發，兩磁鐵互靠近些，示波器的相鄰兩波峯亦靠近些。弦波波速為兩磁鐵間的距離除以相鄰兩波峯間的時間間隔： $V = s/t$

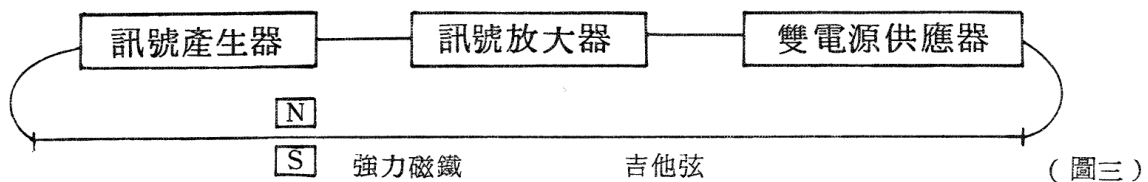
(二)測張力(如圖二)



從弦的中點，用彈簧秤微微拉起，測出拉力 F 和位移 Y ( $\theta$  甚小時)，可得弦的張力 T 為： $F = 2T \cdot \sin \theta \approx 2T \cdot \tan \theta = 2T \cdot \frac{Y}{L/2} = 4TY/L$

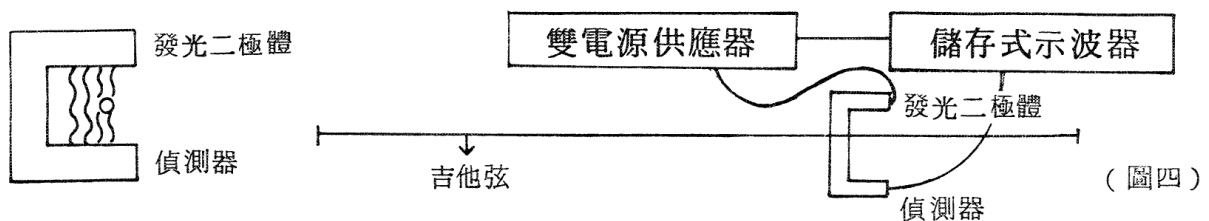
$$\therefore T = FL/4Y$$

(三)找共振頻率(如圖三)



強力磁鐵跨放在吉他頸兩旁，正弦波發生器和訊號放大器接到弦的兩端，電流經過磁場時，弦因載流導線在磁場中受力而振動。且因電流為交流電故受力方向因而為上下交替，( $\therefore F = LI \times B$ )亦即弦的振動頻率為訊號產生器的頻率。

(四)找自然頻率(如圖四)



當弦振動時會遮住光電開關的二極體所發出的部分紅外線，偵測器反應變化至示波器上，從示波器的軌跡可測出弦的振動頻率。

## 五、實驗步驟

(一)求弦波速度和張力、線密度的關係

1. 將吉他弦之兩端與儲存式示波器相連接。
2. 將兩塊馬蹄型磁鐵跨放在弦上適當位置。
3. 以手向上撥弦。

4. 量取示波器上兩波峯之時間間距及兩磁鐵間之距離即可計算出波速。
5. 當張力  $T$  固定時，求波速  $V$  和線密度  $\mu$  的關係。
6. 當線密度  $\mu$  固定時，求波速  $V$  和張力  $T$  的關係。

#### (二)測張力

1. 以調音笛先調音。
2. 以釣魚線為吉他弦高度之基準。
3. 找出吉他弦上各音之中點，以彈簧秤提舉至彈簧秤讀數為  $150\text{gw}$ ，再以游標尺測提舉之微小高度  $Y$  ( $Y$  甚小於  $L$ ， $\theta$  甚小)
4. 利用  $T=FL/4Y$  求出弦之張力( $T$ )。

#### (三)測弦之線密度

1. 取適當長度的一弦，用精密儀器（電動天平）量取質量( $m$ )。
2. 取其餘各弦，重複步驟 1。
3. 利用  $m/L$ ，求出線密度( $\mu$ )。

#### (四)測弦之總長度及各琴格的長度。

#### (五)找吉他弦之共振頻率

1. 將吉他弦兩端通上電流，以強力磁鐵接近待測弦。
2. 調整訊號產生器，使其產生頻率由低漸高，因為電流磁效應使吉他弦產生同頻之振動。
3. 當訊號產生器產生頻率由低漸高時，將會有某些特定頻率時的聲音較大，此即是可產生駐波之頻率，記錄下這些頻率。

#### (六)測各音之自然頻率

1. 將發光二極體偵測電路與儲存式示波器相連接。
2. 將發光二極體偵測電路固定於待測弦上適當位置。
3. 以手撥弦。
4. 讀取示波器上之波形，計算出各音的自然頻率。

#### (七)找出各音符間的頻率關係。

#### (八)找出各音符間的諧音關係。

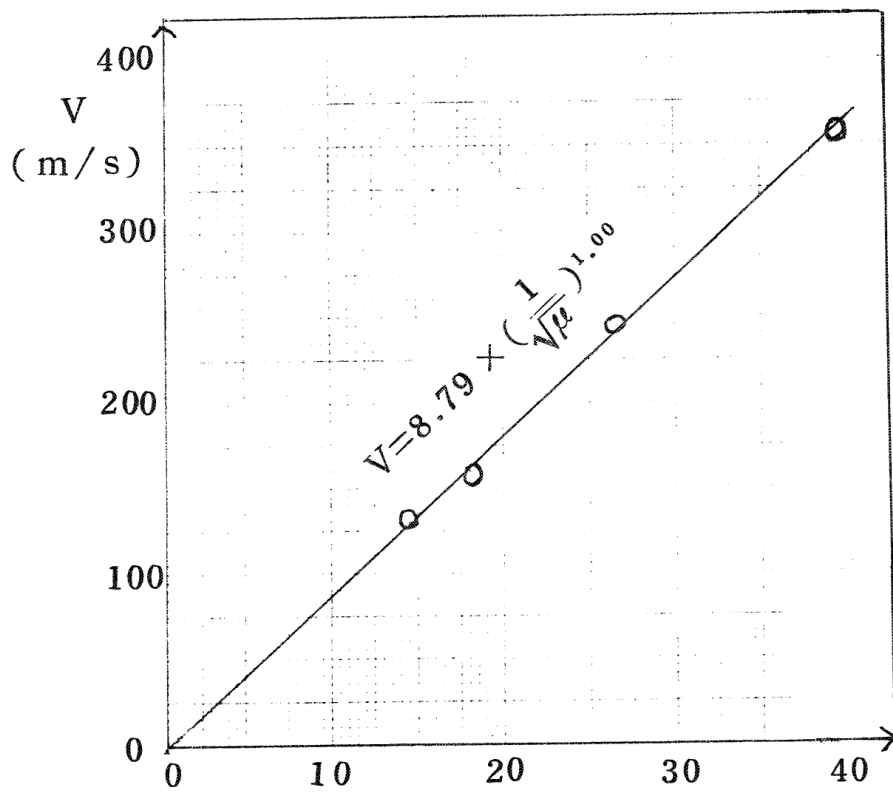
#### (九)以研究結果的關係自製樂器。

## 六、實驗結果

#### (一)弦波速度和張力，線密度關係：

1. 張力  $T$  固定時，波速  $V$  和線密度  $\mu$  的關係  $T=8.03\text{kg}$

線密度(Kg/m)		兩磁鐵間距 S(m)	時間大(sec)		波速 = s/t(m/s) 測量值		$\sqrt{\mu} (\text{Kg}^{1/2}\text{m}^{1/2})$	$\frac{1}{\sqrt{\mu}} (\text{m}^{1/2}\text{Kg}^{-1/2})$
第二根弦	$6.4 \times 10^{-4}$		1	$8.49 \times 10^{-4}$	1	$353.19 + 2.37$		
			2	$8.53 \times 10^{-4}$	2	$351.72 + 0.90$	$2.53 \times 10^{-2}$	39.53
			3	$8.63 \times 10^{-4}$	3	$347.55 - 3.27$		
			平均	$8.55 \times 10^{-4}$	平均	$350.82 \pm 2.18$		
第三根弦	$1.44 \times 10^{-3}$	0.30	1	$1.27 \times 10^{-3}$	1	$237.08 + 2.64$	$3.80 \times 10^{-2}$	26.31
			2	$1.28 \times 10^{-3}$	2	$235.15 + 0.71$		
			3	$1.30 \times 10^{-3}$	3	$231.09 - 3.35$		
			平均	$1.28 \times 10^{-3}$	平均	$234.44 \pm 2.23$		
第四根弦	$2.90 \times 10^{-3}$	0.30	1	$1.78 \times 10^{-3}$	1	$168.32 + 3.04$	$5.39 \times 10^{-2}$	18.51
			2	$1.82 \times 10^{-3}$	2	$164.97 - 0.31$		
			3	$1.85 \times 10^{-3}$	3	$162.55 - 2.73$		
			平均	$1.81 \times 10^{-3}$	平均	$165.28 \pm 2.03$		
第五根弦	$5.00 \times 10^{-3}$	0.30	1	$2.33 \times 10^{-3}$	1	$128.93 + 2.86$	$7.07 \times 10^{-2}$	14.29
			2	$2.38 \times 10^{-3}$	2	$125.88 - 0.19$		
			3	$2.43 \times 10^{-3}$	3	$123.40 - 2.67$		
			平均	$2.37 \times 10^{-3}$	平均	$126.07 \pm 1.91$		



$$\mu^{-1/2} (\text{m}^{1/2}\text{Kg}^{-1/2})$$

波速 V 和線密度的平方根的倒數的關係： $V = 8.79 \times (1/\sqrt{\mu})^{1.00}$

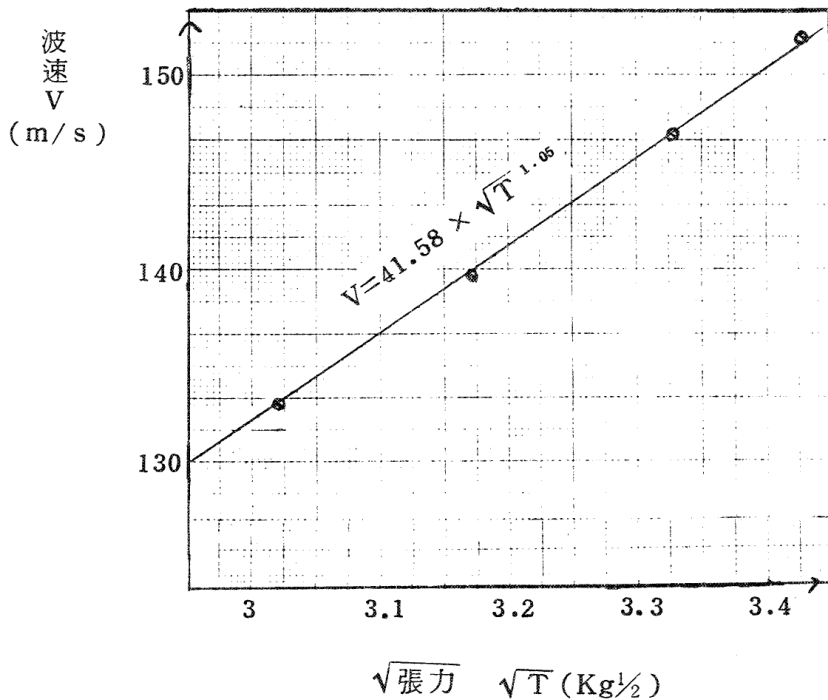
2. 線密度  $\mu$  固定時，波速 V 和張力 T 的關係

$$F = 150\text{gw}$$

$$\mu = 5.00 \times 10^{-3} \text{kg/m}$$

$$L = 65.05\text{cm}$$

提舉高度 Y(cm)	張力(kg) $T = \frac{FL}{4Y}$	兩磁鐵間 距S(m)	時間大 (sec)		波速 $V=s/t$ (m/s)		$\sqrt{T}$ (kg) <sup>1/2</sup>	
					測量值	偏差		
0.20	12.11	0.45	1	$2.88 \times 10^{-3}$	1	156.29	+2.19	3.48
			2	$2.92 \times 10^{-3}$	2	154.08	-0.02	
			3	$2.96 \times 10^{-3}$	3	151.93	-2.17	
			平均	$2.92 \times 10^{-3}$	平均	154.10	$\pm 1.46$	
0.22	11.07	0.45	1	$3.02 \times 10^{-3}$	1	149.23	+2.18	3.33
			2	$3.04 \times 10^{-3}$	2	148.04	+0.99	
			3	$3.13 \times 10^{-3}$	3	143.88	-3.17	
			平均	$3.06 \times 10^{-3}$	平均	147.05	$\pm 2.11$	
0.24	10.03	0.45	1	$3.16 \times 10^{-3}$	1	142.26	+2.51	3.17
			2	$3.21 \times 10^{-3}$	2	140.08	+0.33	
			3	$3.29 \times 10^{-3}$	3	136.91	-2.84	
			平均	$3.22 \times 10^{-3}$	平均	139.75	$\pm 1.89$	
0.27	9.12	0.45	1	$3.36 \times 10^{-3}$	1	134.04	+1.30	3.02
			2	$3.38 \times 10^{-3}$	2	133.12	+0.38	
			3	$3.43 \times 10^{-3}$	3	131.06	-1.68	
			平均	$3.39 \times 10^{-3}$	平均	132.74	$\pm 3.36$	



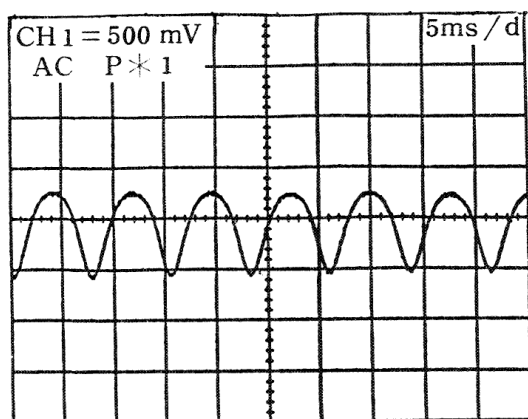
波速 V 和張力 T' 平方根的關係為  $V = 41.58 \times \sqrt{T}^{1.05}$

3. 各音自然頻率與共振頻率的關係比較：第一根弦總長 64.89cm，線密度  $\mu = 5.38 \times 10^{-4} \text{ kg/m}$

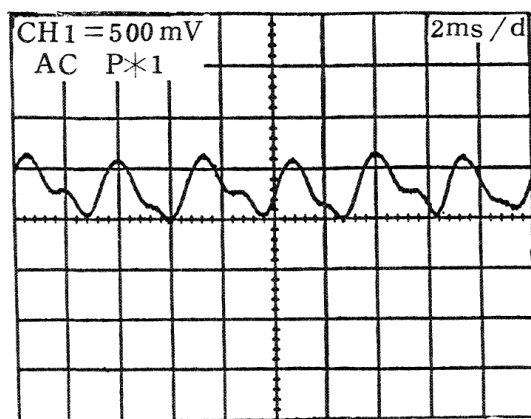
琴格	音名	自然頻率 $f_0$ (Hz)				T張力 (kg)	長度L (cm)	波速 (m/s)	波長 (cm)	其他共振頻率 (Hz)							
		1	2	3	平均					$n=1$	2	3	4	5	6	7	
空弦	E <sub>4</sub>	頻率	329	333	334	332	10.26	64.89	432.23	130.19	331	660	991	1660	1982	2317	1540
		偏差	3	-1	-2	±2.0											
1	F <sub>4</sub>	頻率	347	352	357	352	10.00	61.26	426.86	122.31	350	698	1051	1403	1749	2108	2447
		偏差	5	0	-5	±3.3											
2	F <sub>4</sub> <sup>#</sup>	頻率	368	373	373	371	10.17	57.81	430.48	115.72	372	743	1115	1490	1861	2230	2403
		偏差	3	-2	-2	±2.3											
3	G <sub>4</sub>	頻率	396	391	396	394	10.14	48.52	429.85	109.10	394	786	1180	1579	1968	2361	2760
		偏差	-2	3	-2	±2.3											
4	G <sub>4</sub> <sup>#</sup>	頻率	410	417	417	415	9.96	51.46	425.88	102.87	413	821	1240	1650	2063	2479	2890
		偏差	5	-2	-2	±3.0											
5	A <sub>4</sub>	頻率	435	438	442	438	9.94	48.52	425.47	97.14	441	880	1320	1765	2203	2643	3088
		偏差	3	0	-4	±2.3											
6	A <sub>4</sub> <sup>#</sup>	頻率	464	467	465	465	9.97	45.77	426.08	91.63	466	930	1400	1865	2330	2798	3265
		偏差	1	-2	0	±1.0											
7	B <sub>4</sub>	頻率	495	490	495	493	10.20	43.17	431.03	87.43	495	900	1488	1981	2471	2973	3463
		偏差	-2	3	-2	±2.3											
8	C <sub>5</sub>	頻率	523	520	519	521	10.16	40.72	430.14	82.56	522	1045	1563	2084	2611	3132	3652
		偏差	-2	1	2	±1.7											
9	C <sub>5</sub> <sup>#</sup>	頻率	550	561	556	556	10.27	38.42	432.46	77.92	559	1117	1678	2234	2796	3352	3912
		偏差	6	-5	0	±3.7											
10	D <sub>5</sub>	頻率	582	588	589	586	10.29	36.22	433.00	73.64	590	1181	1769	2363	2952	3540	4131
		偏差	4	-2	-3	±3.0											
11	D <sub>5</sub> <sup>#</sup>	頻率	621	618	625	621	10.49	34.17	437.20	70.29	627	1255	1880	2510	3136	3760	4390
		偏差	0	3	-4	±2.3											
12	E <sub>5</sub>	頻率	657	658	660	660	10.56	32.22	438.62	66.66	660	1321	1985	2643	3308	3965	4621
		偏差	3	2	-6	±3.7											
13	F <sub>5</sub>	頻率	694	694	704	697	10.65	30.37	440.51	63.111	673	1344	2020	2693	3368	4040	4715
		偏差	3	3	-7	±4.3											
14	F <sub>5</sub> <sup>#</sup>	頻率	746	735	746	742	10.32	28.62	433.56	58.51	741	1482	2225	2967	3708	4450	5190
		偏差	-4	7	-4	±5.0											

4. 各音自然頻率

(1) 量取 C<sub>3</sub>~C<sub>4</sub> 各音自然頻率時出現在示波器的圖形



(圖十一)  
C<sub>3</sub> (128 Hz)

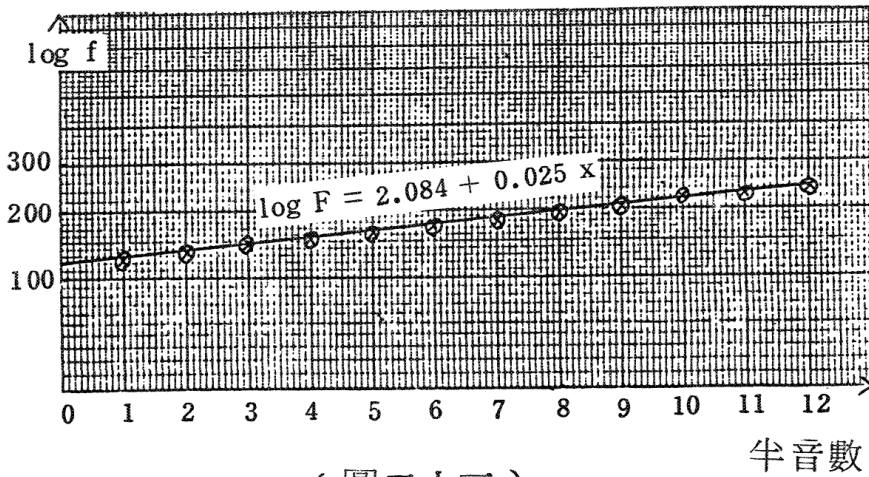


(圖十二)  
D<sub>3</sub> (142 Hz)



5. 各音符之間頻率關係

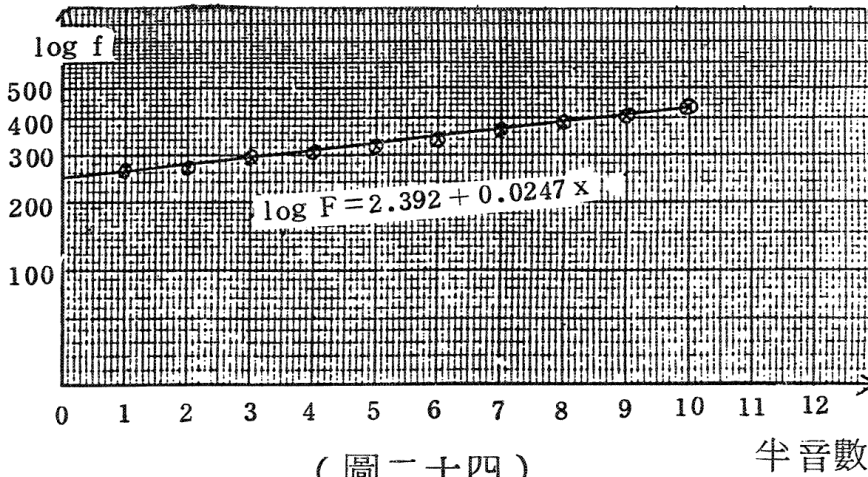
(1)  $C_3 \sim B_3$  (第3音階)



(圖二十三)

設  $f_x = f_0 \cdot N^{\frac{x}{12}}$  則  $\log f_x = \left(\frac{\log N}{12}\right)x + \log f_0$   $\log f_0 = 2.084$   
 $\therefore f_0 = 10^{2.084} = 121.3$ ,  $\frac{\log N}{12} = 0.025$   $\log N = 0.300$   $N \doteq 2$   
 $\therefore f_x = f_0 (N)^{\frac{x}{12}} = f_0 : 2^{\frac{x}{12}}$  故頻率的對數  $\log F$  和半音數  $x$  的關係式為  
 $\therefore \log F = 2.084 + 0.025x$

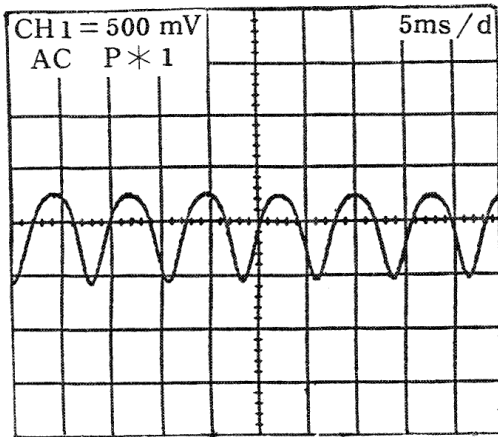
(2)  $C_4 \sim B_4$  (第4音階)



(圖二十四)

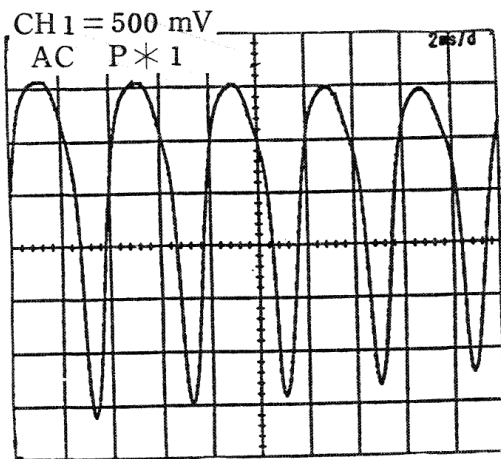


6. 音符間的諧音關係：



(圖二十五)

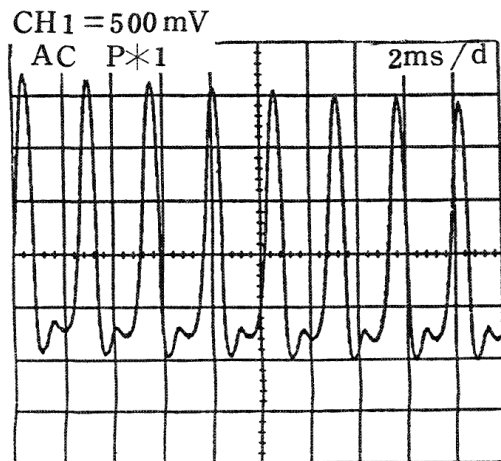
由(4)的結果  $f_x = f_0 \times 2^{\frac{x}{12}}$   
 若以 Do(C<sub>3</sub>) 為  $x = 0$   
 測得其頻率為 128.0 Hz  
 定為第一諧音



(圖二十六)

$x = 12$  時相對音符為 Do(C<sub>4</sub>)

$f_{12} = f_0 \times 2^{\frac{12}{12}} = 2 f_0$   
 測得其頻率為 260.4 Hz  
 (  $\div 128.0 \times 2$  )  
 為第二諧音

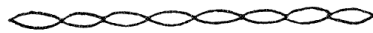


(圖二十七)

$x = 19$  時相對音符為 So(G<sub>4</sub>)

$f_{19} = f_0 \times 2^{\frac{19}{12}}$   
 測得其頻率為 396.0 Hz  
 (  $\div 128.0 \times 3$  )  
 為第三諧音

第八諧音 (  $\dot{1}$  ) Do



第七諧音 (  $\dot{6}$  ) La# ( 909.1 )

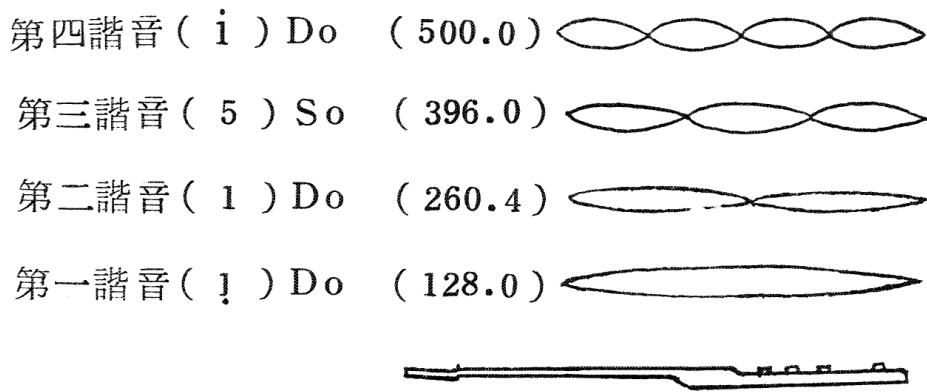


第六諧音 (  $\dot{5}$  ) So ( 757.6 )

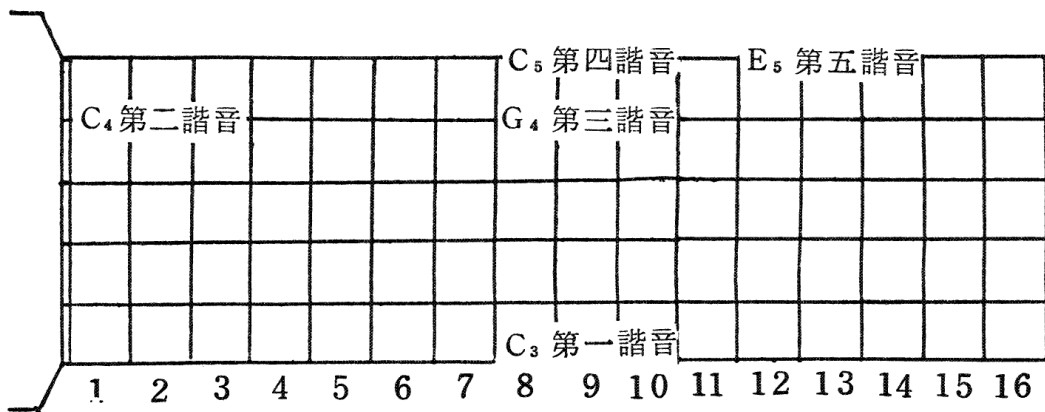


第五諧音 (  $\dot{3}$  ) Mi ( 657.0 )





註：各諧音發音時，皆以基波頻率發音。  
各諧音的頻率關係為  $fn = nf_0$



(圖三十二)

## 七、討論與結論

- (一)弦波波速  $V$  和張力  $T$  成正比，而和弦線密度  $\mu$  平方根成反比，即  $V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ 。
- (二)從實驗中得知，各音振動時，其自然頻率的弦長皆約為駐波波長的一半可知各音頻率均為基波頻率而發音。
- (三)由圖表中得知，不同弦長以訊號產生器（如圖三）產生的共振頻率（最大聲時，即為駐波的諧音，而各音的較高諧音均由其他較細弦線（或張力較大）的基波彈奏出來。
- (四)等振幅、等頻率、反向進行的兩正弦波重疊時，其合成駐波為：

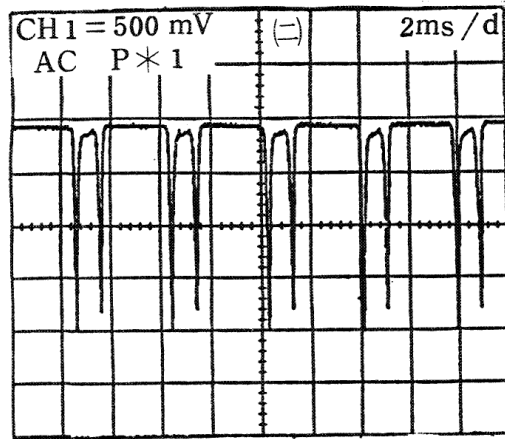
$$y = y_1 + y_2 = y_0 \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + y_0 \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} \right) = 2y_0 \sin \left( \frac{12\pi x}{\lambda} \right) \cos \left( \frac{2\pi t}{T} \right)$$

某一瞬間時（即  $t$  為常數時），合成波在弦上為正弦形式，而當時間持續時，任何定點  $x$  處（除節點外）的質點均作簡諧運動，弦上的點在  $x = \frac{n\lambda}{2}$  處，位移為零，這些點為節點，頻率愈高的駐波，能量愈快消失，因為弦的

彎曲的頻率愈高，使力學能變為熱能。

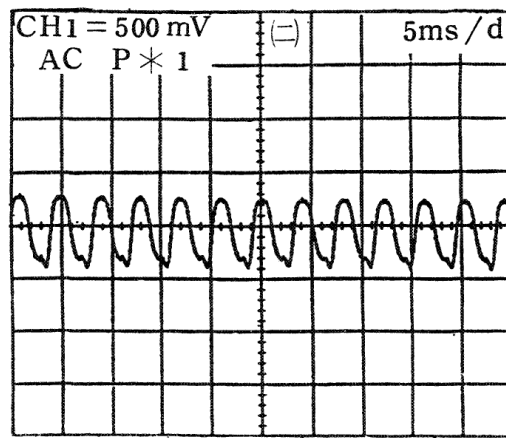
(五) 頻率為 2 : 1 的相鄰高八度音階，有 11 個半音間隔，亦即令  $r^{12} = 2r = 2^{\frac{1}{12}} = 1.05946$ ，即每相鄰半音間頻率的商為  $^{12}\sqrt{2}$  或  $f_{n+1} = f_n \times ^{12}\sqrt{2} = 1.05946f$ 。或  $f_x = f_0 (^{12}\sqrt{2})^x$  (其中  $x$  為半音數)

(六) 因為弦的粗細、張力不同，所以在不同弦上，即使出現同樣頻率之音，其波形亦不相同，在〈測吉他弦之自然頻率〉項實驗中可得印證。



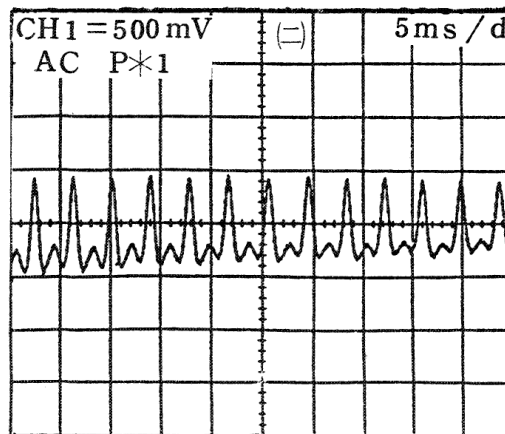
(圖三十三)

第二根弦第一格  
 $f = 266\text{Hz}$



(圖三十四)

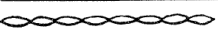
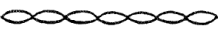
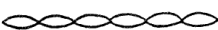


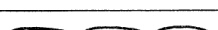

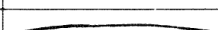
第三根弦第五格  
 $f = 250\text{Hz}$



(圖三十五)

第四根弦第十格  
 $f = 256\text{Hz}$

(七)由實驗得知，樂音音符和駐波諧音的關係圖為： $r = \sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}}$

音符	頻率比	音名(頻率)	諧音順序	諧音頻率關係	諧音波形
$\dot{\dot{1}}$	$\gamma^{36}$	$C_6$	第八諧音	$8f_0$	
$\dot{7}$					
$\dot{6}^\#$	$\gamma^{34}$	$A_5^\#(909)$	第七諧音	$7f_0$	
$\dot{6}$					
$\dot{5}^\#$					
$\dot{5}$	$\gamma^{31}$	$G_5(757)$	第六諧音	$6f_0$	
$\dot{4}^\#$					
$\dot{4}$					
$\dot{3}$	$\gamma^{28}$	$E_5(657)$	第五諧音	$5f_0$	
$\dot{2}^\#$					
$\dot{2}$					
$\dot{1}^\#$					
$\dot{1}$	$\gamma^{24}$	$C_6(500)$	第四諧音	$4f_0$	
7					
6 $^\#$					
6					
5 $^\#$					
5	$\gamma^{19}$	$G_4(396)$	第三諧音	$3f_0$	
4 $^\#$					
4					
3					
2 $^\#$					
2					
1 $^\#$	$\gamma^{13}$				
1	$\gamma^{12}$	$C_4(260)$	第二諧音	$2f_0$	
$\underset{\cdot}{7}$	$\gamma^{11}$				
$\underset{\cdot}{6}^\#$	$\gamma^{10}$				
$\underset{\cdot}{6}$	$\gamma^9$				
$\underset{\cdot}{5}^\#$	$\gamma^8$				
$\underset{\cdot}{5}$	$\gamma^7$				
$\underset{\cdot}{4}^\#$	$\gamma^6$				
$\underset{\cdot}{4}$	$\gamma^5$				
$\underset{\cdot}{3}$	$\gamma^4$				
$\underset{\cdot}{2}^\#$	$\gamma^3$				
$\underset{\cdot}{2}$	$\gamma^2$				
$\underset{\cdot}{1}^\#$	$\gamma^1$				
$\underset{\cdot}{1}$	$\gamma^0$	$C^3(128)$	第一諧音	$f_0$	

(八)各諧音頻率為第一諧音的整數倍  $f_n = nf_0$ ，每高八度的音符頻率關係比為 1 : 2 : 4 : 8……即  $f_m = f_0(12\sqrt[2]{2})^{12m} = f_0(2)^m$  (其中  $m=0, 1, 2, 3, \dots$ )。

(九)由圖(三十六)推知，以任何音為第一諧音時，其第 12, 19, 24, 28, 31, 34, 36……個相鄰半音音符，即分別為二、三、四、五、六、七、八……諧音。

(十)因為  $r=1.05946$ ，故

音符	頻率比	頻率比
Do	1	1
Re	$\gamma^2$	9/8
Mi	$\gamma^4$	5/4
Fa	$\gamma^5$	4/3
So	$\gamma^7$	3/2
La	$\gamma^9$	5/3
Si	$\gamma^{11}$	15/8
Do	2	2

故自製樂器時，各音的弦長  $L$  為：

$$V = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = f \lambda = f \times 2L \quad \therefore L = \frac{n}{2f} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$L_{(Do)} = \frac{1}{2f_{Do}} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad L_{(Re)} = \frac{1}{2f_{Re}} \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{1}{2 \times \frac{9}{8} f_{Do}} \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \left(\frac{8}{9}\right) L_{(Do)}$$

$$L_{(Mi)} = \left(\frac{4}{5}\right) L_{(Do)} \quad L_{(Fa)} = \left(\frac{3}{4}\right) L_{(Do)} \quad L_{(So)} = \left(\frac{2}{3}\right) L_{(Do)}$$

$$L_{(La)} = \left(\frac{3}{5}\right) L_{(Do)} \quad L_{(Si)} = \left(\frac{8}{15}\right) L_{(Do)} \quad L_{(Do)} = \left(\frac{1}{2}\right) L_{(Do)}$$

## 八、參考資料

(一)民謠搖滾吉他實用與突破 郭清界編著 天同出版社

(二)牛頓現代科技大百科 13 物理科學( I )—物理篇

林榮崧、吳程遠、楊玉齡、李傳楷譯 牛頓出版有限公司

(三)The Science of Sound——Thomas D. Rossing——

(四)The Physics of Musical Instruments——Neville H. Fletcher & Thomas. D. Rossing——

(五)活用示波器法 游金湖編譯 建宏出版社

(六) Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences——Bevington——

(七) 中山科學大辭典（物理科） 台灣商務書局

(八) 大學物理學 陳錫桓編著 中央圖書出版社

## 評語

利用磁場對負載電流（來自信號產生器）之琴弦的施力使琴弦振動，用以遮擋光二極體，使信號顯示於示波器，並用二對跨在琴弦上的磁鐵的間距檢拾兩信號之時差計算波速，很有創意。又以信號產生器的輸出頻率找尋琴弦之基頻與各諧音間的關係，探討波速與張力、密度等關係內容充實，且其測量數據亦精確而具有實用性。