十二枚金幣的奧妙

高小組數學科第三名

台北市興隆國民小學

作　　者：江瑋平、廖宜嶢

洪立強、陳政堯

指導教師：曹定智

一、研究動機

在一個偶然的機會裡，知道了一個流傳於同學間的益智趣味數學難題。題目是「國王想為聰明漂亮的女兒，選位夫婿，他必須是全國最有智慧的人；所以國王拿出十二枚金幣，其中有一枚是假的，但不知是較輕或較重，誰能用〞天平〞秤三次，把那枚假的秤出來，誰就能娶得公主……」我和幾位好朋友，以不服輸的精神，突破難題。在研究的過程中，我們也發現許多有關「十二枚金幣的奧妙」。

二、研究目的

①找出十二枚金幣中，含一假金幣，運用天平的解法。

②從各種解法中，分析出最精簡——只秤三次的解法。

③淬取最精簡解法的精神，推導出所有三次的解法。

④推廣解法的模式，成功解出秤四次解之最大金幣數。

⑤能發現任意枚金幣數中，與找出假金幣所需秤次數的關係。

⑥運用「三分法」的精神，幫助我們解決問題。

⑦若已知假金幣的輕或重，與找出假金幣所需秤次數的關係。

三、研究器材

①小塑膠盒（表金幣）數十個。②小鐵片數十個（置盒內表金幣重量）。

③天平砝碼一組、磁鐵板、三色塑膠磁塊。④長尺、圓規、奇異筆。

四、研究過程

問題一：找出十二金幣中之假金幣，使用天平的解法。

活動㈠：最多需秤七次以找出假金幣的解法。

操作㈠：⑴每次取二枚，一邊放一枚的秤法——最多六次。

①　②　　③　④　　⑤　⑥　　⑦　⑧　　⑨　⑩　　⑪　⑫

△　　　△　　　△　　　△　　　△　　　△

⑵判定假金幣的輕重——標準①　⑪┌平　衡（△）：⑫是假且輕。

金幣　△　└不平衡（△）：⑪是假且重。

結果㈠：⑴最快：二次秤出。最慢：要七次秤出。

⑵優點：解法簡單。缺點：次數太多，蠻傚解法。

活動㈡：最多需秤六次以找出假金幣的解法。

操作㈡：⑴改良操作㈠的秤法，前四次與操作㈠相同。

⑵使用三枚標準金幣（①，②，③），比較剩餘金幣。

結果㈡：⑴最快：二次秤出。最慢：要六次秤出。

⑵優點：後兩秤有改良。缺點：前四次過於簡單。

活動㈢：最多需秤五次找出假金幣的解法。

操作㈢：⑴一邊放二枚，不平衡就停止——最多三次。

⑵第四、五秤與操作㈡的步驟⑵相同。

結果㈢：⑴最快：三次秤出。最慢：五次秤出。

⑵優點：保留相互配合的優點。缺點：次數不穩定。

活動㈣：最多需秤四次以找出假金幣的解法。

操作㈣：方法一：一邊放二枚：將活動㈢省略第三秤的改良。

方法二：一邊放三枚

①②③　④⑤⑥　　④⑤⑥　⑦⑧⑨

△　　　　△

⑴找出不一樣的三枚

⑵平衡則　⑩⑪⑫　①②③

△

⑶將不平衡的三個，取二枚比較即可知

方法三：一邊放四枚

①②③④　⑤⑥⑦⑧　　⑤⑥⑦⑧　⑨⑩⑪⑫

△　　　　△

⑴找出不一樣的四枚。

⑵將不平衡的四枚（已知輕重），秤二次，可找出假金幣

方法四：一邊放五枚

①②③④⑤　⑥⑦⑧⑨⑩

△

(1)平衡則比較⑪、⑫

(2)①②③　④⑤⑪　⑥⑦⑧　⑨⑩⑪

△　△

判定假的是那三枚

(3)同方法二步驟(3)

結果(四)：(1)最快：三次秤出。最慢：四次秤出。

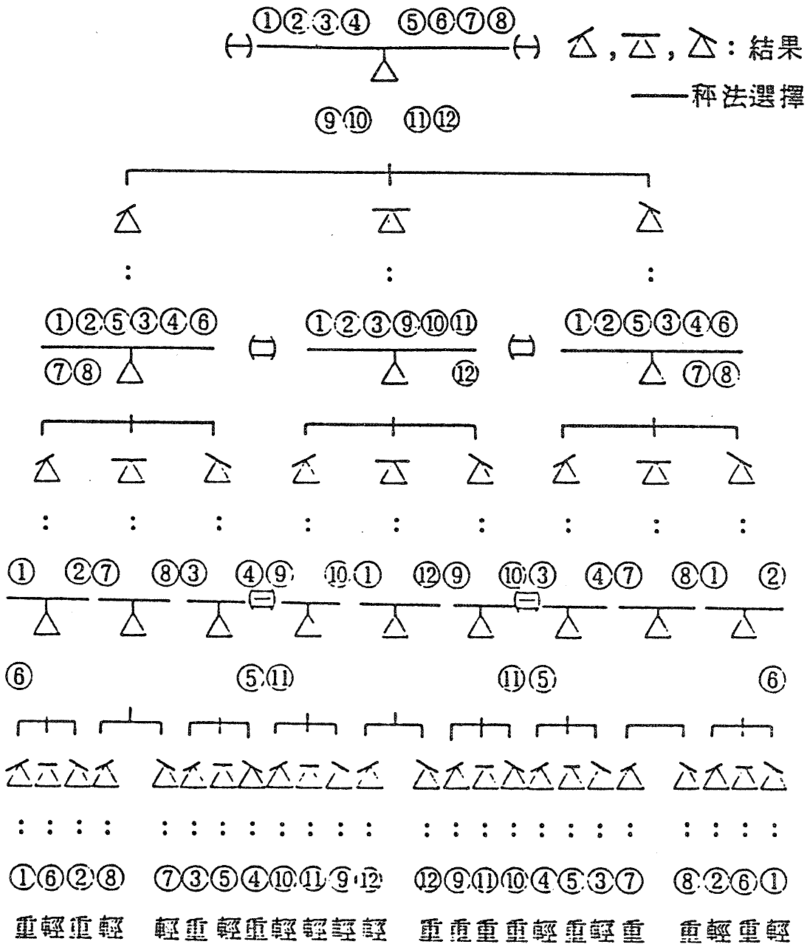
(2)優點：第四秤能與前秤配合。缺點：第一、二秤獨立不相關。

(3)發現：每一秤有三種結果：△：假金幣在左則重、在右則輕。

△：平衡，都是標準金幣。△　假金幣在左則輕、在右則重。

活動(五)：最少次數—只需三次，找出假金幣的解法。

操作(五)：第一秤左右各四枚，並將每一秤結果的推論用於下一秤：



結果㈤：⑴最快、最慢：均在三次完成，是最穩定方法之一。

⑵優點：①前後秤法相互配合，環環相扣，充分利用推論。

②每次秤的三種結果，將其下可能均分為三等分。

⑶發現：①十二枚金幣中，共有廿四種假金幣的可能。

②第一秤的三種結果，平分各有八種可能。

③第二秤的三種結果，無法平分八種可能，成為 3 － 2 － 3 型分配，給我們靈感—是否有其他解法？

問題二：共有幾種秤三次可找出假金幣的解法？

假設情況：⑴第一秤結果均分廿四種可能，故第一秤不變。

第一秤：①②③④⑤⑥⑦⑧ / ⑨⑩△⑪⑫

⑵第一秤平衡時，由活動㈥討論各種解法。

⑶第一秤不平衡時，討論結果：△的可能解法，結果：△可同理相反求解在活動㈦－㈨探討。

活動㈥：第一秤平衡時，第二秤之各種解法。

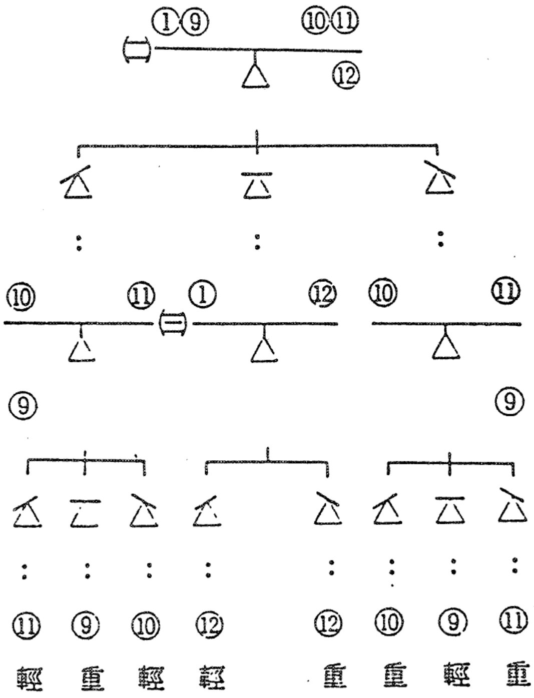
操作㈥：⑴利用一枚標準金幣—①（如下圖）

⑵利用三枚標準金幣—①②③，同活動㈤。

結果㈥：⑴共二種解法。

⑵只能將八種可能分為 3 － 2 － 3 型。

活動㈦：第二秤每邊放三枚的各種解法。



操作(七)：(1) 2 枚同類不秤—如⑦⑧或③④。

例：①②⑤③④⑥同活動(五)
⑦⑧ △

(2) 3 枚同類不秤—如⑥⑦⑧或②③④。

例：①②⑤③④⑨
⑥⑦⑧ △

(3) 2 枚一類，一枚另一類不秤—如④⑦⑧或③④⑧。

例：①②⑤③④⑨
④⑦⑧ △

結果(七)：(1)共 3 種解法。

(2)步驟①—為 3 － 2 － 3 型分配；步驟②—為 2 － 3 － 3 型分配；步驟③—為 3 － 3 － 2 型分配。

活動(八)：第二秤每邊放四枚的各種解法。

操作(八)：(1) 2 枚不秤—如④⑧。

例：①②⑤⑥③⑦⑨⑩
④⑧ △

(2) 3 枚同類不秤—如⑥⑦⑧或②③④。

例：①②③⑤④⑨⑩⑪
⑥⑦⑧ △

(3) 2 枚一類，一枚另一類不秤—如④⑦⑧或③④⑧。

例：①②⑤⑥③⑨⑩⑪
④⑦⑧ △

結果(八)：(1)共 3 種解法。

(2)步驟①—為 3 － 2 － 3 型分配；步驟②—為 2 － 3 － 3 型分配；步驟③—為 3 － 3 － 2 型分配。

活動(九)：第二秤每邊放五枚的解法。

操作(九)：2 枚同類不秤—如⑦⑧或③④。

例：①②③⑤⑥④⑨⑩⑪⑫
⑦⑧ △

結果(九)：(1)共 1 種解法。

(2)十二枚金幣所有解法＝（3＋3＋1）×2＝14，共14類解法。

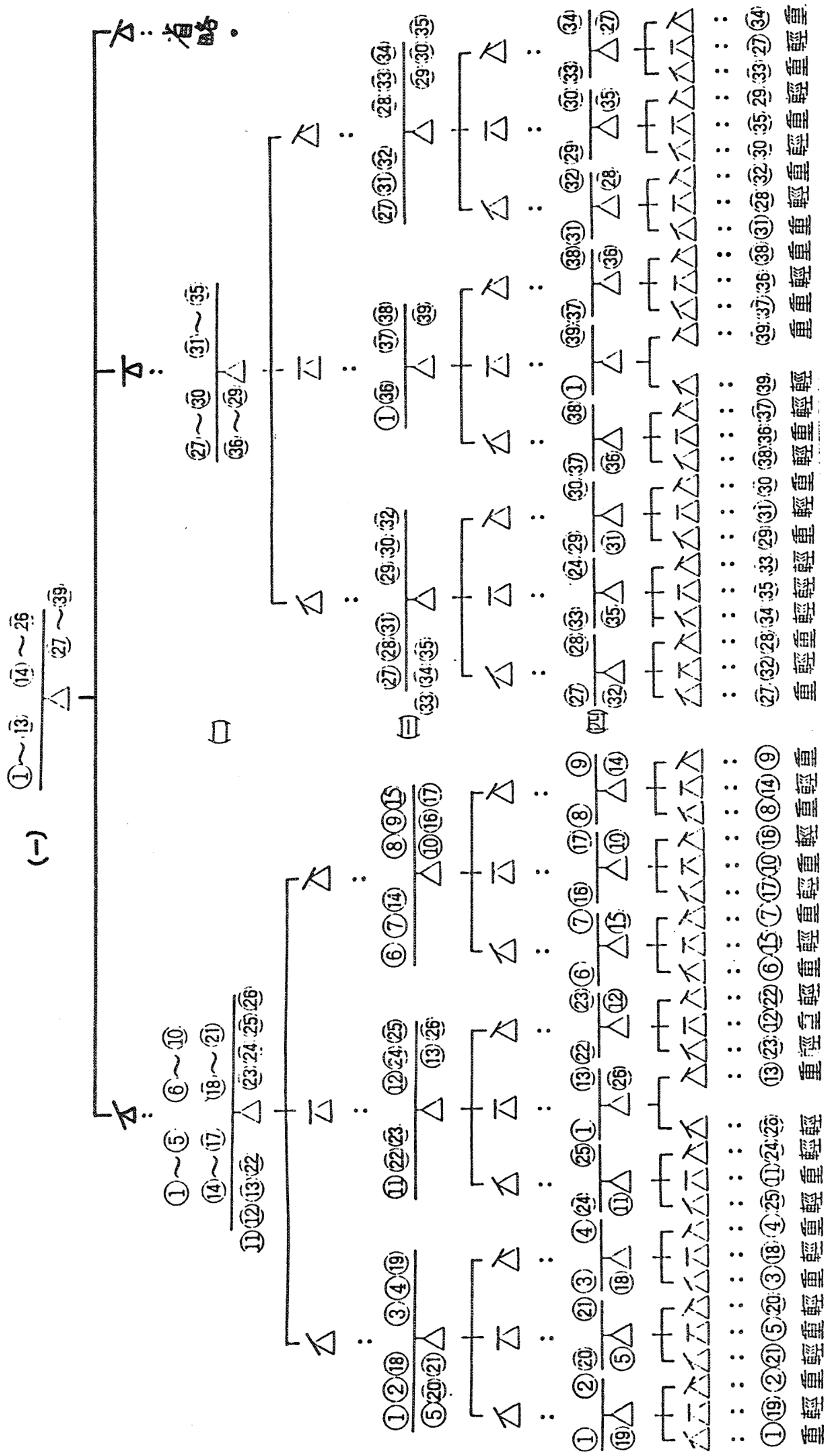
(3)第二秤的各種放法，目的只是將八種可能如何均分而已。

問題三：３９枚金幣中，含有假金幣，需秤幾次？

活動(十)：找出３９枚金幣中的假金幣的解法。

操作(十)：(1)依照１２枚金幣３次秤法的原理。

(2)每一秤將所有可能情形三等分，按下圖方法，可找出秤最少次的解法。



結果(十)：(1)只需秤四次，能解任何情況。

(2)３９枚金幣，共有７８種假金幣出現的情況。

(3)第一秤，將７８種情況三等分為各２６種；第二秤，將２６種情況，三等分為９或８種；第三、四秤，分析方法同問題(二)。

(4)第二秤，為９－８－９型，解法變化在下面探討。

活動(十一)：探討３９枚金幣中含假金幣的解法分析。

操作(十一)：(1)第一秤，可平均三等分，為２６種情形，僅一解。

第一秤：①～⑬　⑭～㉖
△
㉗～㊴。假設結果：△

(2)第二秤：

①９－８－９型，不加標準金幣。見活動(十)。

②９－９－８型，加一枚標準金幣㉗（如圖）的秤法。

(2)第二秤：④～⑤　⑭～⑰　⑱～㉑　⑥～⑨　㉗
△　⑩～⑬　㉒～㉖　㉘～㊴

③９－８－９型，加二枚標準金幣㉗㉘（如圖）的秤法。

第二秤：①～⑥　⑭～⑰　⑥～⑨　⑱～㉑　㉗　㉘
△　⑫～⑬　㉑～㉖　㉙～㊴

④９－９－８型，加三枚標準金幣㉗㉘㉙（如圖）的秤法。

第一秤：①～⑥　⑭～⑰　⑱～⑳　⑦～⑩　㉗㉙㉘
△　⑪～⑬　㉑～㉖　㉚～㊴

結果(十一)：(1)第二秤，分別混合０－３枚標準金幣，就有４種不同的秤法。

(2)共有１３枚標準金幣可供混合比較，故有許多解。

(3)第二秤將２６種情形，三等分為９，９，８的組合。

(4)第三秤，當９種情形時，三等分為３－３－３僅一解。當８種情形時，為３－２－３組合的許多解。

(5)所以３９枚金幣，秤四次解法，可組合出很多解。

問題四：１０００枚金幣中，含有假金幣，需秤幾次？

活動(十二)：如何思考１０００枚金幣含假金幣的解法。

操作(十二)：(1)依照３９枚金幣解法的精神，每秤三等分。

(2)１０００枚金幣可能有２０００種輕重可能情形。

(3)第一秤：２０００÷３≒６６７種情形

第二秤：６６７÷３≒２２３種情形

第三秤：２２３÷３≒７５種情形

第四秤：７５÷３≒２５種情形

第五秤：２５÷３≒９種情形

第六秤：９÷３≒３種情形

第七秤：３÷３≒１種情形

結果(十一)：(1)共秤七次。解出１０００枚金幣中含假金幣的各種可能。

(2)用除以３的次數可以幫助我們找出秤最少次解法所需次數。

問題五：任意枚金幣中含假金幣，與秤次數的關係？

活動(十二)：觀察１２枚，３９枚，１０００枚金幣解法，和次數的關係。

操作(十二)：

12枚＝24種情形		39枚＝78種情形		1000枚＝2000種情形	
$3^2=9$, $3^3=27$		$3^3=27$, $3^4=81$		$3^6=729$, $3^7=2187$	
$3^2=9<24<27=3^3$		$3^3=27<78<81=3^4$		$3^6=729<2000<2187=3^7$	
需　秤	3　次	需　秤	4　次	需　秤	7　次

結果(十二)：需秤次數，是連續乘３最少次數，使積超過所有可能情形。

活動(十四)：任意Ｎ枚金幣中，找出假金幣與秤次數的關係？

操作(十四)：(1)住意Ｎ枚金幣，包含輕、重，共有２×Ｎ種情形。

(2)根據結果(十二)，知道了連續乘以“３”ㄅ，使積超過２Ｎ種情形。

結果(十四)：(1)連續乘３共ㄅ次可$3^{ㄅ}$ 用來表示。

(2)找出ㄅ，使滿足$3^{ㄅ}>2N>3^{ㄅ-1}$則ㄅ可能就是需秤的最少次數。

(3)發現：$3^{ㄅ}$是奇數，不等於Ｎ枚金幣的2N種情形，故我們將繼續討論其關係。

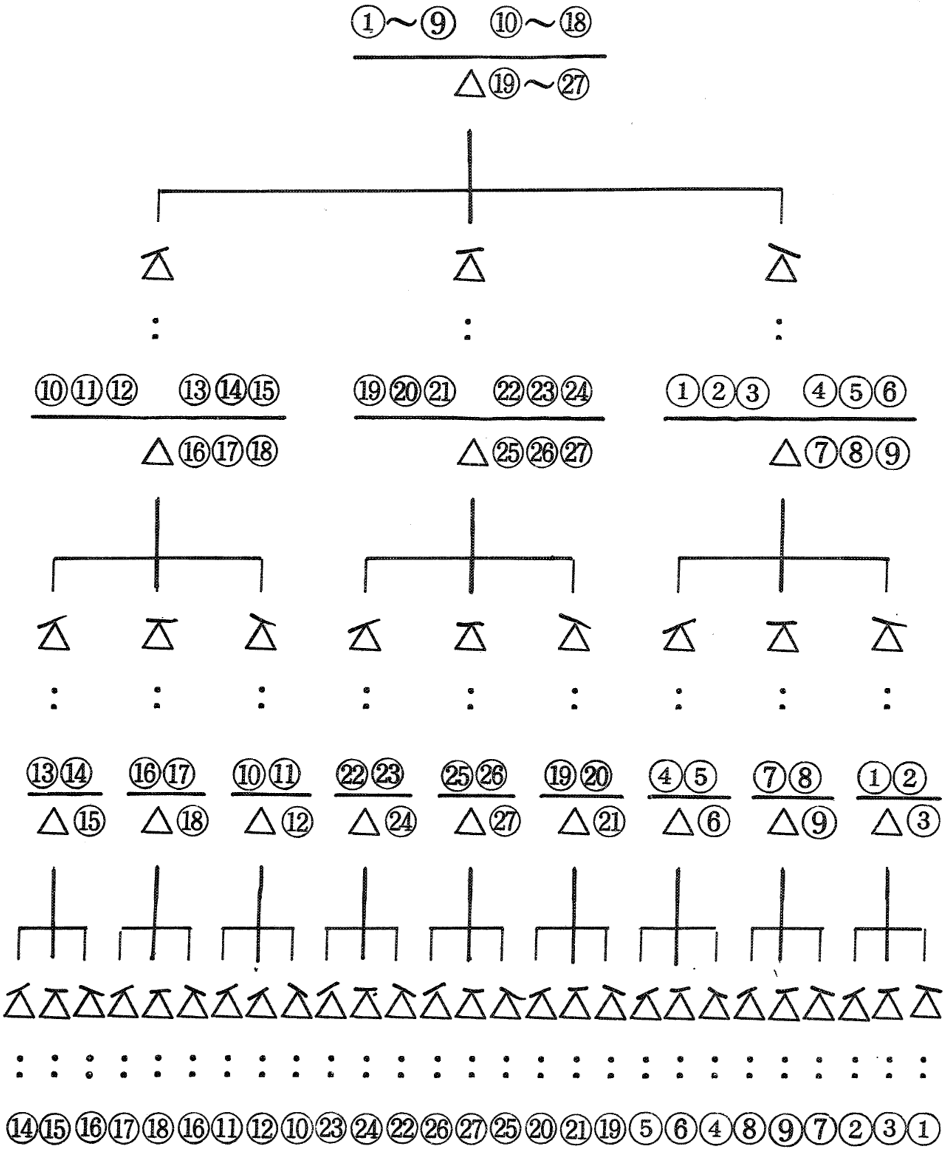
問題六：已知假金幣的輕重，與秤次數的關係？

活動(十五)：操作２７枚金幣中，含一較輕的假金幣，需秤幾次？

操作(十五)：根據「三分法」的精神，我們把２７枚幣，分三等分逐次秤下去（如圖）。

發現(十五)：(1)只需秤３次，就能找出假金幣所有情形。

(2)２７÷３＝9，9÷３＝３，３÷３＝１，除以３次數３次。



活動(十六)：任意N枚金幣中，有一知道輕重之假金幣，要秤幾次？

操作(十六)：⑴根據發現(十五)，知道了需秤次數和除以 3 次數的關係。

⑵重覆算 N ÷ 3 的結算，到商是 1 時，所需相除的次數。

發現(十六)：⑴ N 除以 3 的次數，就是需秤次數。

⑵找出ㄅ滿足$3^{ㄅ}$≧金幣總數＞$3^{ㄅ-1}$，則秤ㄅ次，就可找到假金幣。

五、討論

*1.*根據研究過程知道下面兩點：

①最少秤次數＝金幣總數的兩位（含輕重）除以 3 的次數。

②小於$3^{ㄅ}$（連乘 3 ，ㄅ次的積）種可能情形，秤ㄅ次可以判別。

*2.*秤ㄅ次能判別的最大金幣數的討論。

$3^{\text{ㄅ}}$是奇數，不合金幣總數的兩倍（偶數）。

$3^{\text{ㄅ}-1}$不合第一秤平分三等分的精神（不整除)$3^{\text{ㄅ}}-2$結果同①。

3.故秤ㄅ次能判別最大金幣數＝（$3^{\text{ㄅ}}-3$）÷ 2

4.若已知假金幣輕重，則秤ㄅ次判別的最大金幣數＝$3^{\text{ㄅ}}$，不需除以 2 。

5.從 1 2 到 3 9 枚金幣的秤法，因第二秤不能平均〝三等分〞，故有許多解。

六、結論

1.從研究過程發現，判別假金幣最有效率的方法，就是在每一秤將情形分成三等分。

2.從研究及討論發現—最少秤次數和金幣數的關係：

3.由關係式作成下表：

最少秤數	金幣總數	最少秤數	金幣總數
秤3次	4到12枚	秤5次	40到120枚
秤4次	13到39枚	秤6次	121到363枚

4.若知假金幣輕重，從討論可知秤次數和金幣數的關係：

$3^{\text{ㄅ}} \geq$金幣總數$> 3^{\text{ㄅ}-1}$（ㄅ代表最少秤次數）。

評語

本作品在探討如何以最少的次數所用天秤找出混雜在金幣中之假金幣。這一類問題常見於益智性數學遊戲中，並非作者之創見，但作者能對多種不同情形作很有系統之研究，並能很完整地解決此類問題，確屬難得。