

# 求畢達哥拉斯數的新方法

## 高小組數學科第三名

台北縣明志國民小學

作者：林之平

指導教師：許玉蘭、林建棕

### 一、研究動機

去年暑假爸爸的一位朋友，送我一本關於數學的書叫“木匠的兒子”，我對其中能夠滿足商高定理（ $A^2 + B^2 = C^2$ ）的整數組稱為畢達哥拉斯數（簡稱畢氏數）產生了興趣。其中介紹了一種求得一組畢氏數的方法，也就是：

$$\left. \begin{aligned} A &= m^2 - n^2 \\ B &= 2mn \\ C &= m^2 + n^2 \end{aligned} \right\} m, n \text{ 是任何正整數且 } m > n$$

後來我又看了一些有關的書，又知道只要是奇數也可以很容易求得一組畢氏數，也就是：

$$A = \text{任何大於 } 1 \text{ 的奇數}$$

$$B = (A^2 - 1) / 2$$

$$C = (A^2 + 1) / 2$$

第一種方法計算比較麻煩，第二種方法雖然比較簡單，但是只能求得奇數的畢氏數組。那麼碰到偶數要怎麼辦呢？後來，我就請教老師這個問題，老師知道我曾經參加「第三波」雜誌舉辦的程式比賽得獎，就建議我為什麼不用電腦來解決這個問題呢？因此，我就開始利用電腦來解答這個問題。

### 二、研究目的

1. 利用電腦為工具，找出求得畢氏數組的方法。
2. 經由問題的探討，訓練思考和推理的能力。
3. 體會如何利用電腦來解決數學的問題。

### 三、研究設備器材

1. 硬體設備：IBM/AT 相容電腦。
2. 程式語言：MICROSOFT C 5.1 版。
3. 執行環境：MS-DOS 3.3 + 倚天中文系統。

#### 四、研究過程或方法

- (一)首先設計一個程式，利用三個迴圈把1到1000的所有畢氏數組找出來。  
然後研究它們的關係。初步發現(3, 4, 5)這一組畢氏數是一組基礎的畢氏數。
- (二)我們進一步把部分求得的畢氏數組，分成以奇數開始的和以偶數開始的兩組。  
結果我們發現(3, 4, 5)這一組是奇數組的基礎，而(4, 3, 5)是偶數組的基礎。而他們的關係是一個等差級數。請參考表1。

表一 畢氏數的等差級數的關係

奇數組			偶數組		
A	B	C	A	B	C
3	4	5	4	3	5
	8 <	8 <		5 <	5 <
5	12	13	6	8	10
	12 <	12 <		7 <	7 <
7	24	25	8	15	17
	16 <	16 <		9 <	9 <
9	40	41	10	24	26
	20 <	20 <		11 <	11 <
11	60	61	12	35	37
	24 <	24 <		13 <	13 <
13	84	85	14	48	50
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

(三)根據表一，奇數組和偶數組的等差數列的關係如下：

- 1.以奇數開頭的畢氏數組，B和C相差1，這可以利用前面提到的第二種方法得到證明。而B是以4為首項，以4為公差，所形成的等差數列的和。
- 2.以偶數開始的畢氏數組，B和C相差2，而B是以3為首項，以2為公差，所形成的等差數列的和。

## 五、實驗結果

(一)根據上述的發現，我們可以把求得奇數組和偶數組的畢氏數整理如下：

(1)求奇數組畢氏數的公式：

A = 大於 3 的任何奇數。

$$N = (A - 3) / 2 + 1。$$

$$B = N * [ 2 * 4 + (N - 1) * 4 ] / 2$$

$$C = B + 1。$$

例 1：A = 9

$$N = (9 - 3) / 2 + 1 = 4$$

$$B = 4 * (8 + 1 * 2) / 2 = 40$$

$$C = 40 + 1 = 41$$

例 2：A = 13

$$N = (13 - 3) / 2 + 1 = 6$$

$$B = 6 * (8 + 5 * 4) / 2$$

$$C = 84 + 1 = 85$$

(2)求偶數組畢氏數的公式：

A = 大於 4 的任何偶數。

$$N = (A - 4) / 2 + 1$$

$$B = N * [ 2 * 3 + (N - 1) * 2 ] / 2$$

$$C = B + 2$$

例 3：A = 8

$$N = (8 - 4) / 2 + 1 = 3$$

$$B = 3 * [ 2 * 3 + (3 - 1) * 2 ] / 2 = 15$$

$$C = 15 + 2 = 17$$

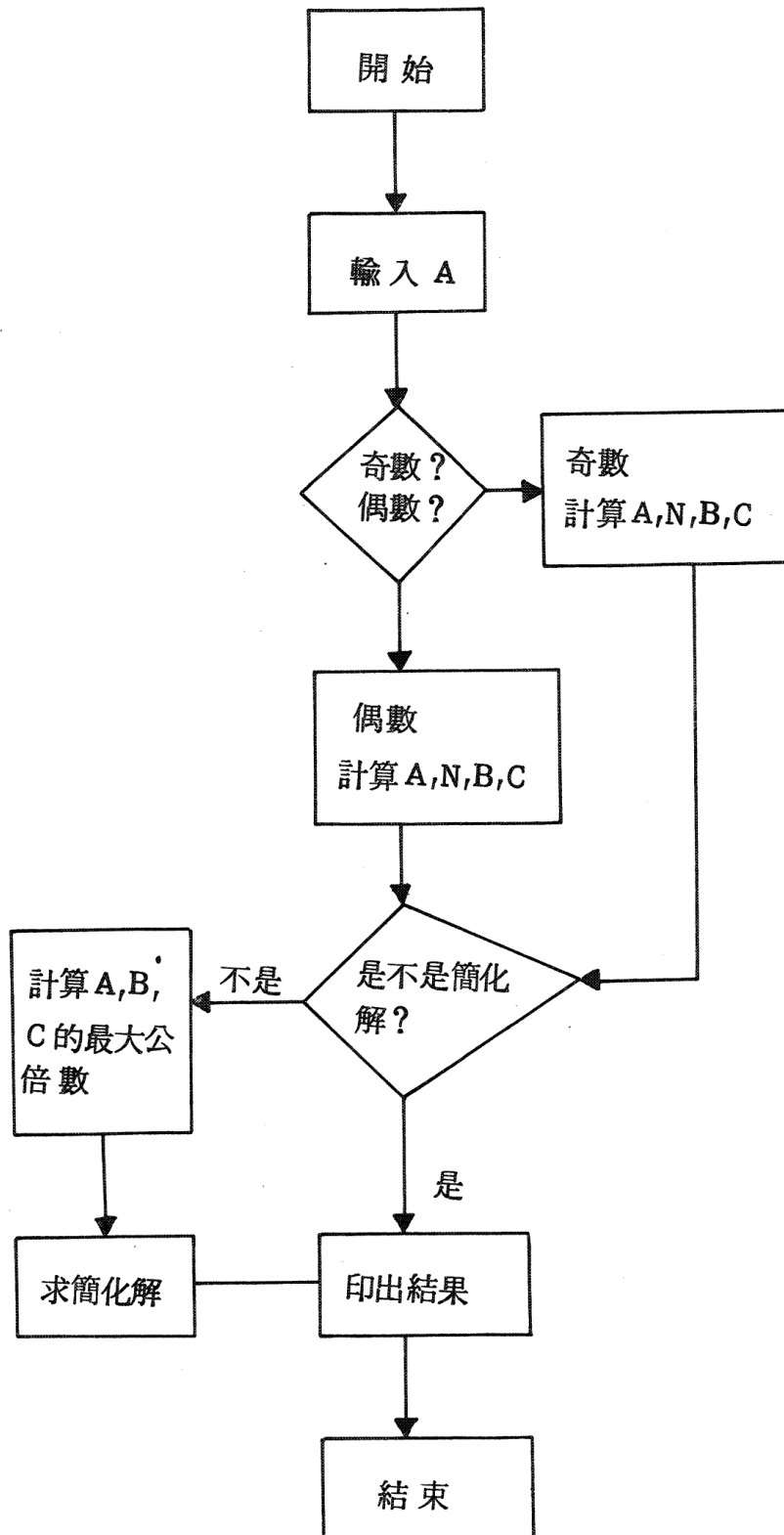
例 4：A = 14

$$N = (14 - 4) / 2 + 1 = 6$$

$$B = 6 * [ 2 * 3 + (6 - 1) * 2 ] / 2 = 48$$

$$C = 48 + 2 = 50$$

(二)根據上面的結果，利用 C 語言設計了一個程式，可以讓使用者輸入任何數而得到一組畢氏數。然後判斷它是不是一組  $A^2 + B^2 + C^2$  的簡化解，假如不是再進一步求得原來的簡化解。其流程圖如下：



判斷簡化解是利用：C 一定是奇數，A、B 一定是一奇一偶的組合的特性。  
 程式執行的情形結果如下：

請輸入(9000)內任何一個整數?14

14.000000 48.000000 50.000000

這不是一組畢氏數的簡化解。

它們有最大公倍數：2.000000

而它們的簡化解是：7.000000 24.000000 25.000000

請輸入(9000)內任何一個整數?120

120.000000 3599.000000 3601.000000

這是一組畢氏數的簡化解。

## 六、討論

(→)在研究的過程，我們發現許多有趣的畢氏數組。例如：

(1) (3, 4, 5) 是唯一由連續數構成的畢氏數。

(2) (6, 8, 10) 是唯一由連續偶數構成的畢氏數。

(3) A, B 是連續偶數的畢氏數，在一千萬裡面，只有下列九組。

6	8	10
40	42	58
238	240	338
1392	1394	1970
8118	8120	11482
47320	47322	66922
275806	275808	390050
1607520	1507522	2273378
9369318	9369320	13250218

(4)  $B = 2 \times A$  在 10000 中有下列 4 組畢氏數。

4181	8362	9349
5473	10946	12238
8362	16724	18698
9654	19308	21587

(5)  $B = 3 * A$  在 1 0 0 0 0 中有下列 7 組畢氏數。

1405	4215	4443
2810	8430	8886
4215	12645	13329
5620	16860	17772
7025	21075	22215
8430	25290	26658
9835	20505	31101

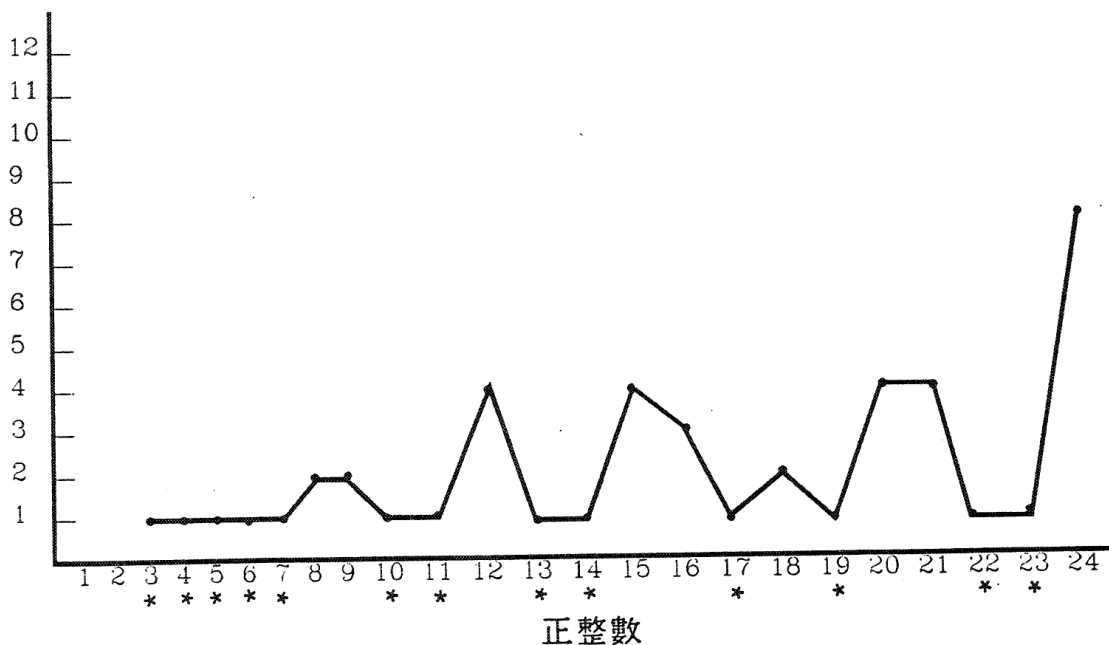
(6)  $C = 2 * A$  在 1 0 0 0 0 中有下列 3 組畢氏數。

5042	8733	10084
7173	12424	14346
7953	13775	15906

(二) 一個數到底有多少組的畢氏數？我們首先把求得部分的畢氏數加以統計如下

圖：

畢氏數組



從上圖中，我們發現：

- (1) 除了 1, 2 外每一個正整數，至少有一組畢氏數。
- (2) 質數或是質數 2 倍的數，只有一組畢氏數。例如：3, 5, 7, 9, 11, 13, ……是質數，所以只有一組畢氏數。又如：4 = 2 × 2, 6 = 2

$\times 3, 10 = 2 \times 5, 14 = 2 \times 7, \dots 86 = 2 \times 43, \dots$ 都是質質的 2 倍，也只有一組畢氏數。

(3)除了質數或質數兩倍以外的數，都有兩組以上的畢氏數。到底一個數能有多少組的畢氏數，則要把這個數因數分解後，看它有多少個質因數，再加上自己的簡化解，及重覆他數的畢氏數組。例如：

$$15 = 3 * 5 \quad 3 \text{ 開頭那組的 } 5 \text{ 倍。}$$

$$15 = 5 * 3 \quad 5 \text{ 開頭那組的 } 3 \text{ 倍。}$$

$$15 = 1 * 15 \quad \text{自己的簡化解。}$$

而實際上，15 的畢氏組共有四組如下：

$$15, 8, 17 \quad \text{是 } (8, 15, 17) \text{ 的重覆組。}$$

$$15, 20, 25 \quad \text{是 } (3, 4, 5) \text{ 的 } 5 \text{ 倍。}$$

$$15, 36, 39 \quad \text{是 } (5, 12, 13) \text{ 的 } 3 \text{ 倍。}$$

$$15, 112, 113 \quad \text{是自己的簡化解。}$$

利用上述的結果，設計了另外一個程式，可以求出任何數的所有畢氏數組，除了重覆組外，程式執行結果如下：

這個程式可以計算並列出任何整數的畢氏數組(除了重複組外)。

爲了計算方便及速度---請輸入(150)以內的整數? 100

因數分解	原簡化解	該數的畢式數組
4 * 25	4 3 5	100 75 125
5 * 20	5 12 13	100 240 260
10 * 10	10 24 26	100 240 260
20 * 5	20 99 101	100 495 505
25 * 4	25 312 313	100 1248 1252
50 * 2	50 624 626	100 1248 1252
100 * 1	100 2499 2501	100 2499 2501

## 七、結論

- (一)本研究中，提出一個新的方法，能夠求得任何數的一組畢氏數。並進一步求得一個數所有可能畢氏數的組合。
- (二)我們的方法是利用等差數列求和的方法，跟目前其他兩個方法比較，如果是利用電腦計算，數目越大我們的方法越快。因為其他兩種方法都要用到平方的計算。
- (三)本研究利用電腦來解決數學的問題，能夠解決運算的速度。例如：一開始我們求  $1 - 1000$  的所有畢氏數，如果沒有電腦的幫助幾乎是不可能，因為要計算： $1000 \times 1000 \times 1000 = 1000000000$  次  
在研究的過程中，為了證明我們的結果，而從 1 算到 50 億（差不多是全世界的人口），程式一跑就兩、三天，如果沒有電腦的協助，這也不可能。

## 八、參考資料

- 1.黃武雄著，木匠的兒子，民生報叢書，聯經出版公司，第 181 - 193 頁。
- 2.牛頓出版社，科學教授——數學，第 100 - 102 頁。
- 3.黃敏晃著，數學解題規則，牛頓出版社。
- 4.周文其等，畢達歌拉斯數，北縣第 30 屆中小學科學展，國中組，林口國中。

## 評語

作者首先列出小於 1000 的所有畢氏數，而從這些數中觀察到排列的特性，最後根據這些特性，利用等差數列求和的方式得到求畢氏數的方法，係一創新的方法。

作者的方法相當有創意，分析，綜合與歸納的能力很好，對於電腦的操作也相當熟練。