

探索有趣的正多面體

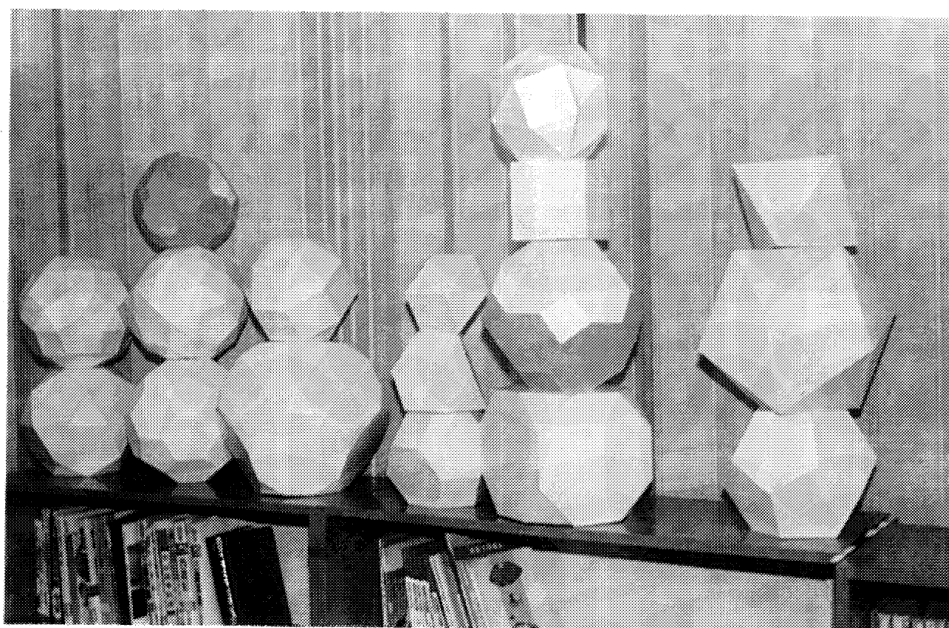
高小組數學科第二名

台北市光復國民小學

作者：吳俊賢、周書屹

邱熙亭、陳潤德

指導教師：張淑鈴、蔡慶華



一、研究動機

四下的數學課本中，所介紹的正方體，是由 6 個一樣大的正方形所組合而成。它和元宵節時我所看到的一個外型像足球的燈籠一樣，外型都是由正多邊形所組合而成。我將我的發現告訴老師，老師認為我觀察得很仔細，值得鼓勵，同時，她還告訴我，這兩個都是屬於正多面體。因此，引發了我對正多面體的好奇。在周、邱、陳三位同學的支持下，開始了我們的探索活動。

二、研究目的

- (一)研究：外型均由一樣大的正多邊形所組成的正多面體，並探討它們的特點和相關。
- (二)研究：外型是由不一樣形狀的正多邊形所組成的正多面體，並探討它們的特點和相關。
- (三)探討：研究一和研究二所發現之二種正多面體的異同和相關。

三、研究設備和器材

智慧片、油土、卡紙、量角器、圓規、尺、剪刀、美工刀、膠水、膠帶、相機。

四、研究過程和方法

(研究一)

(一)內容：每次只用一種正多邊形拼成正多面體的外型，這樣所拼成的正多面體，共有哪幾種？有何特殊之處或特別之相關？

(二)方法：

- 1.每次研究只用一種正多邊形來拼組，先由正三形開始，再正四邊形，再正五邊形、正六邊形……，依序下去。
- 2.若是拼組不成時，便共同探究原因。

(三)結果：由本研究中，所拼組成的正多面體共有五種：1.正四面體；2.正六面體；3.正八面體；4.正十二面體；5.正二十面體。

(四)發現：

- 1.至少要有三個面才能拼成一個角錐，角錐的度數和不能等於或大於 360° ，否則就變成一個平面或另一體了。
- 2.邊形數越多的正多邊形，它的每一個角的角度越大。
- 3.正六邊形的一個角是 120° ，三個角的度數和是 $120^\circ \times 3 = 360^\circ$ ，所以三個正六邊形不能拼成一個角錐；同理，正七邊形、正八邊形、正九邊形……，也都不能拼成一個角錐。所以，只有正三角形、正方形、正五邊形，這三種正多邊形能拼組成正多面體。
- 4.每一個正多面體的外型都由同樣形狀、同樣大小的正多邊形所拼組而成，它所需要的正多邊形數量和它的名稱數相同：
正四面體是由4個正三角形所組合而成。
正六面體是由6個正方形所組合而成。
正八面體是由8個正三角形所組合而成。
正十二面體是由12個正五邊形所組合而成。
正二十面體是由20個正三角形所組合而成。
- 5.在同一正多面體中，每個頂點所接觸的面數、邊數均相同（如表1）：
而其面數、邊數和頂點數均有相同的奇妙關係（如表2）：

表 1

	每一頂點所接觸的面	每一頂點所接觸的邊
正四面體	3	3
正六面體	3	3
正八面體	4	4
正十二面體	3	3
正二十面體	5	5

表 2

	邊 數	面 數	頂 點 數
正四面體	6	4	4
正六面體	12	6	8
正八面體	12	8	6
正十二面體	30	12	20
正二十面體	30	20	12

- (1) 邊數 = 面數 - 2 + 頂點數。
- (2) 面數 = 邊數 + 2 - 頂點數。
- (3) 頂點數 = 邊數 + 2 - 面數。
- (4) 正六面體和正八面體的邊數相同，而面數和頂點數卻正好相反；正十二面體和正二十面的邊數也相同，面數和頂點數也正好相反。

(研究二)

(一)內容：能用二種或二種以上的正多邊形拼成正多面體嗎？若有可能，能拼成哪幾種？是否有特殊之處？

(二)方法：

- 1.取出二種形狀不同、邊長相同的正多邊形之智慧片，加以拼組，並研究它的組態。
- 2.取出三種形狀不同、邊長相同的正多邊形之智慧片，加以研究拼組，若得以拼組成，則再研究它的組態。
- 3.取出三種以上形狀不同但邊長相同的正多邊形之智慧片，加以研究拼組，並探討其他可能。

(三)討論與結果：

我們總共拼出了十三種很像研究一的正多面體的新「正多面體」，但是它們和研究一的正多面體又有些微不同，因此，我們不敢稱這13種新發現為「正多面體」，經過多次討論，我們決定替這十三種新的正多面體，取名為「類似正多面體」，並以發現之先後加以編號：由①號類似正多面體至⑬號類似正多面體。（各類似正多面體之模型照片和展開圖照片，因篇幅所限，因此省略）

(四)發現：

1.這十三種類似正多面體有幾點相同之處：

- (1)以每一種類似正多面體而言，它的每一個頂點都接觸相同數量的面和邊。
- (2)同一種類似正多面體中，它的每一頂點所接觸的面，都有一定的序列（各頂點的組成形態都相同）：（如表3）
- (3)同一種類似正多面體中，它的每個兩面角（每兩個面所形成的夾角）都相等。

表 3

編號別 面的形狀	①號	②號	③號	④號	⑤號	⑥號	⑦號	⑧號	⑨號	⑩號	⑪號	⑫號	⑬號
	(各項點側面的構成序列)	正四邊形	正四邊形	正四邊形	正五邊形	正五邊形	正六邊形	正八邊形	正十邊形	正六邊形	正六邊形	正五邊形	正四邊形
	正四邊形	正三角形	正三角形	正三角形	正三角形	正六邊形	正八邊形	正十邊形	正六邊形	正六邊形	正四邊形	正六邊形	正六邊形
	正四邊形	正四邊形	正三角形	正三角形	正五邊形	正三角形	正三角形	正三角形	正四邊形	正五邊形	正三邊形	正八邊形	正十邊形
	正三角形	正三角形	正三角形	正三角形	正三角形						正四邊形		
			正三角形	正三角形									

2. 這十三種類似正多面體的外型和組態可歸納成下表：(如表 4)

3. 類似正多面體和正多面體之外型，有些互相類似：

- (1) ①號和②號、③號、⑦號、⑫號等五種類似正多面體，都很類似「正六面體」。
- (2) ②號和⑨號、⑫號等三種類似正多面體，都類似「正八面體」。
- (3) ⑥號類似正多面體則與「正四面體」有點類似。
- (4) ④號和⑤號、⑧號、⑪號、⑬號等五種類似正多面體，都和「正十二面體」很類似。
- (5) ⑤號和⑩號、⑬號等三種類似正多面體，則與「正二十面體」類似。

表 4

面 數	邊 數	頂 點 數	各頂點側面的構成序列						所需各正多邊形的面數					
			3 4 5 6 8 10	代表正三角形 代表正四邊形 代表正五邊形 代表正六邊形 代表正八邊形 代表正十邊形	正 三 角 形	正 四 邊 形	正 五 邊 形	正 六 邊 形	正 八 邊 形	正 十 邊 形				
①號	26	42	22	4	4	4	3		8	18	0	0	0	0
②號	14	24	12	4	3	4	3	3	8	6	0	0	0	0
③號	38	60	24	4	3	3	3	3	32	6	0	0	0	0
④號	92	150	60	5	3	3	3		80	0	12	0	0	0
⑤號	32	60	20	5	3	5	3		20	0	12	0	0	0
⑥號	8	18	12	6	6	3			4	0	0	4	0	0
⑦號	14	36	24	8	8	3			8	0	0	0	6	0
⑧號	32	90	20	10	10	3			20	0	0	0	0	12
⑨號	14	36	24	6	6	4			0	6	0	8	0	0
⑩號	32	90	60	6	6	5			0	0	12	20	0	0
⑪號	62	120	60	5	4	3	4		20	30	12	0	0	0
⑫號	26	72	78	4	6	8			0	12	0	8	6	0
⑬號	62	180	120	4	6	10			0	30	0	20	0	12

(研究三)

(一)內容：在研究二中，我們發現有些類似正多面體和正多面體之外型十分類似，因此，我們想進一步探究它們之間之相關。

(二)方法：

- 1.我們將每一種正多面體和類似正多面體以卡紙做成模型，以方便做外型之觀察和比較。
- 2.以智慧片做為隨時拼組成模型或拆開研究其組成形態之研究和比較時之用。
- 3.以油土做成模型，以做為切割比較時之用。

(三)發現

- 1.如果將正多面體的角或角、邊截去，甚至再度截去角、邊時，只要使同一正多面體的每一個切面都呈正多邊形，而且它的每一條邊的邊長都相等，每一個兩面角的角度都相同時，就能成爲一種「類似正多面體」。
- 2.在切割的過程中，我們發現了一個十分有趣的現象：②號和⑩號不但可由正六面體切割而成，也可由正八面體切割而成；⑤號和⑬號也不但可由正十二面體切割而成，亦可由正二十面體切割而成。我們認爲這有趣的現象是和研究一中所發現的「正六面體和正八面體的邊數相同，而頂點數和面數卻正好相反；正十二面體和正二十面體的邊數也相同，而頂點數和面數卻也正好相反。」有著密切的關係。
- 3.正多面體變化成類似正多面體的原因和其間之關係，可以簡略歸納成表 5

表 5

由正多面體變化的原因	正四面體	正六面體	正八面體	正12面體	正廿面體
將角截去	⑥號	⑦號	⑨號	⑧號	⑩號
將角由邊的中間截去	正八面體	②號	②號	⑤號	⑤號
截邊又截角		①號		⑪號	
截角又截邊		⑫號	⑫號	⑬號	⑬號
截邊截角後再度截角又截邊		③號		④號	

五、討論和結論

(一)正多面體只有五種，而類似正多面體卻至少有十三種之多（或許尚有我們的研究所未發現的）。

(二)類似正多面體是由正多面體切割而成的，因切割的方式不同，而發展成的類似正多面體也不同，因此，類似正多面體的數量比正多面體的數量多。

(三)正多面體和類似正多面體之間有許多相同之處，也有不同之處：

1. 相同之處：

(1)均為凸多面體（每一角錐均為向外突出，而無向內凹入者）

(2)每個面均為正多邊形。

(3)同一體中，每一頂點所接觸的面數、邊數均相同。

(4)每個形成頂點錐之側面角的角度和，一定小於 360° 度。

(5)同一體中，每個兩面角的角度，一定都相等。

(6)同一體中，所有的邊都一定等長。

2. 不同之處：

(1)在正多面體的同一體中，各面之形狀和大小都相同；而在類似正多面體的同一體中，面之形狀不一定相同，大小當然也不一定相同。

(2)在正多面體中，同一體的各项點錐之側面的形狀一定相同；而在類似正多面體中，同一體的各项點錐之側面的形狀雖不完全相同，但它們卻都有相同的組成形態。

(四)正六面體和正八面體的邊數相同，而面數和頂點數卻正好相反；正十二面體和正二十面體的邊數也相同，而面數和頂點數卻也正好相反。因以上之特別關係，在切割成類似正多面體時，就產生了一些完全相同的形狀，如②號、⑤號、⑫號、⑬號。

六、參考書目

- | | |
|----------------|----------|
| (一)國小數學課本（第八冊） | 國立編譯館 |
| (二)中學數學百科全書 | 九章文化出版公司 |
| (三)趣味的數學 | 國語日報社 |
| (四)數學 | 時代出版社 |
| (五)數學百科 | 牛頓出版社 |
| (六)數學圖書館 | 圖文出版社 |
| (七)增進計算能力的數學遊戲 | 豐群出版社 |

(八)高思兒童遊戲數學

高思出版社

(九)人類與科學

佳慶文化公司

(十)智慧片解說書

童心園

七、心得與感想

在一年多的研究中，我們曾經因有新的發現，而發瘋似的又叫又跳；也曾因長久的無進展而生絕望之心，企圖放棄研究，幸好有兩位老師的熱心鼓勵和協助，研究才得以繼續；更曾因對研究的興趣大發，而廢寢忘食，令父母心疼，幸好他們都有包容的心，能體諒我們，支持我們，使我們的研究不致中斷……。因為此研究，我們四人親如手足，我們的父母和老師都成了好朋友。因此，除了研究主題的各項發現和結果之外，我們更體會了經驗分享的喜悅，堅持到底的重要、互相包容的偉大。由錯誤中學習的……，我們的收穫之豐碩，是筆墨難以形容的，也是外人所想像不到的！對於這難得的經驗，我們將永生難忘。

評語

本作品對於正多面體作深入且有系統之探討。對於五種正多面體之展開圖以及各面之間的組成關係有很透澈之分析，並實際作出五種正多面體之模型。利用油土之切割，由已知之五個正多面體切出十三種類似多面體。

本作品之優點乃在於分析透澈，歸類完整，而且實際作出各種型體之模型。