向“黑盒子”挑戰

高小組數學科第一名

高雄市立忠孝國民小學　　　　　　作　　者：許祐豪、謝佩樺
曹嘉玲、歐家銘
指導教師：黎家雲、陳美霞

一、研究動機

“黑盒子”—魔術拼盤的組成爲：

(一)每邊皆爲8公分的正方形底盤。

(二)內有八塊形狀各不相同，但各塊面積皆相等（都是8平方公分）的“小拼塊”。

而其遊戲規則爲：

(一)任選一塊“小拼塊”，將其一邊固定於拼盤之左上角。

(二)憑著自己的判斷力，將剩下的其他“小拼塊”排入盤內，使其恰好能將拼盤完全排滿。

“小拼塊”的面積、形狀、塊數和魔術拼盤的完成，有什麼關係？我們能不能找出“魔術拼盤”的秘密，自己來發明變化更多、更好玩的魔術拼盤呢？

二、研究目的

(一)魔術拼盤，只能由八塊小拼盤組成嗎？七塊？六塊？五塊？……行不行？

(二)用什麼方法，才能將合於遊戲規則的拼塊，其各種變化形狀找出來？

(三)能不能自己創造，設計不同於市面上的”新”魔術拼盤？並且，找出若干不同的組合方式？

(四)培養創造思考的能力，和追根究底的精神。

三、研究工具

(一)魔術拼盤（一般市面文具店可購得）。

(二)方格紙（取得容易，切割各種形狀方便，但實際操作時仍稱“拼塊”）。

(三)筆、小刀、計算紙。

四、研究過程

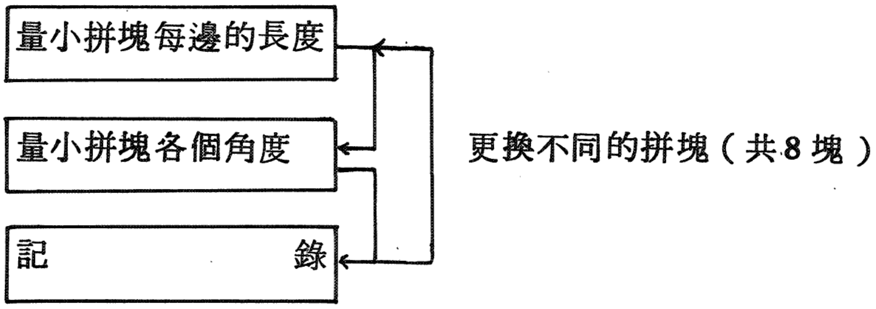
(一)觀察魔術拼盤，找出研究的頭緒。

*1.*分析：

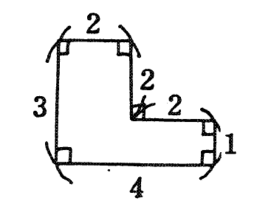
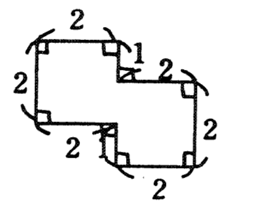
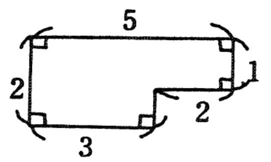
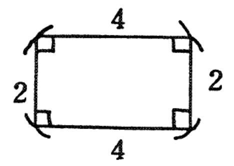
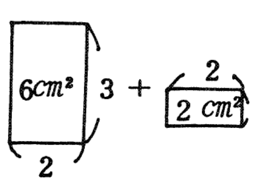
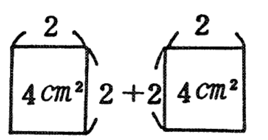
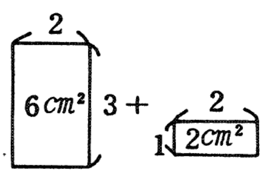
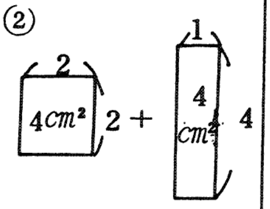
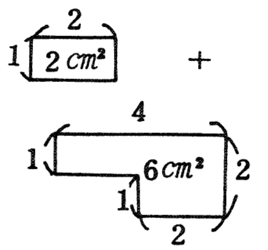
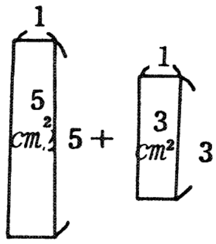
(1)底盤之面積爲 8 ㎝ × 8 ㎝ ＝ 6 4 ㎠

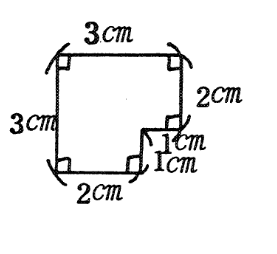
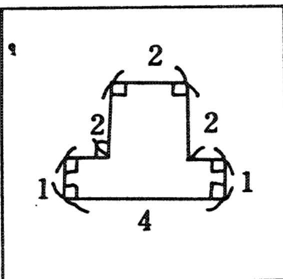
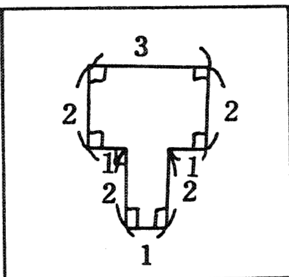
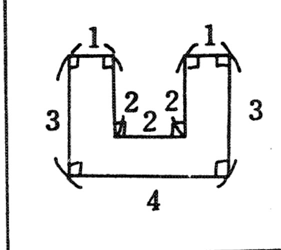
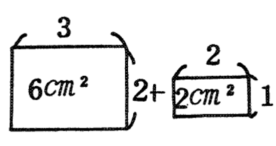
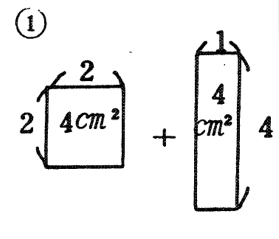
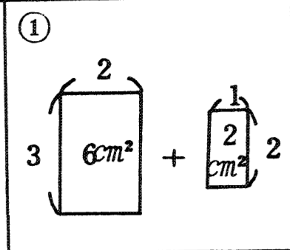
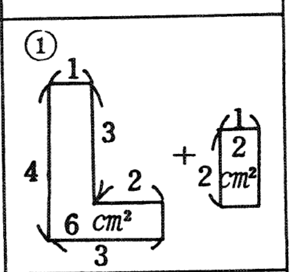
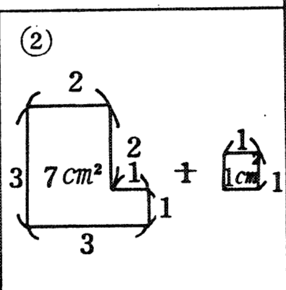
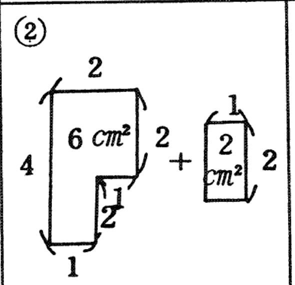
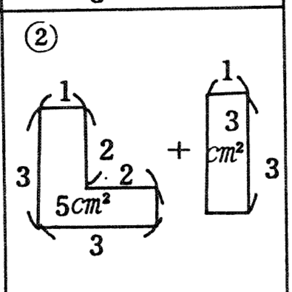
(2)恰好切割成 8 塊 8 ㎠的“小拼塊”（形狀各不相同）“魔術拼盤”爲什麼要這樣組成呢？

*2.*操作：



*3.*結果：（單位爲 ㎝ ）

小拼塊圖形				
由拼塊缺角處分解成二塊	① 		① 	※爲一完整長方形，無缺角，故不予分解
	② 		② 	
數學式	① 6 ＋ 2	4 ＋ 4	① 6 ＋ 2	8 ＋ 0
	② 4 ＋ 4	2 ＋ 6	② 5 ＋ 3	

小拼塊圖形				
由拼塊缺角處分解成二塊				
				
數學式	6 ＋ 2	① 4 ＋ 4	① 6 ＋ 2	① 6 ＋ 2
		② 7 ＋ 1	② 6 ＋ 2	② 5 ＋ 3

4.發現：

⑴每一塊小拼塊的切割角度都是直角（９０°）

⑵拼塊切割的最小單位是１公分（即最小的邊長是１公分）

⑶“８”的因數爲１、２、４、８，而每塊“小拼塊”至少都可以分解成面積爲因數的數值和（８—因數）兩小塊。

㈡計算魔術拼盤正方形面積。

1.操作：

⑴已知：正方形面積＝邊長×邊長＝（邊長）^{2}

假設：魔術拼盤中，有ㄅ個小拼塊，而每個小拼塊的面積皆爲ㄆcm^2，底盤的邊長爲ㄇcm

∴ㄅ×ㄆcm^2＝（ㄇcm）^{2}＝ㄇ^2 cm^2

→ㄅ×ㄆ＝ㄇ^2

已知，由市面上購得的魔術拼盤中，ㄅ＝8　ㄆ＝8　ㄇ＝8

∴ㄅ×ㄆ＝8×8＝64＝8^2＝$ㄇ^2$

→ㄅ×ㄆ＝$ㄇ^2$

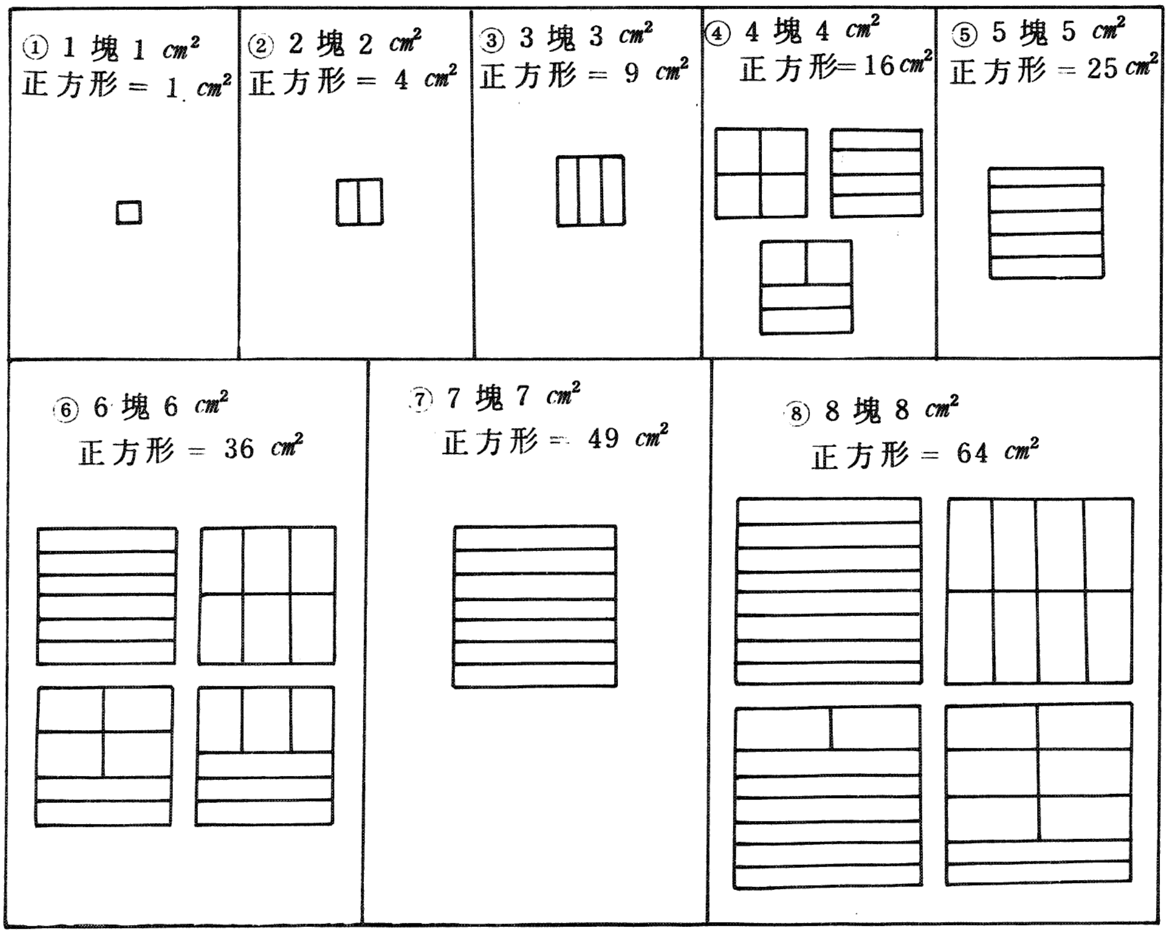
⑵討論ㄅ＝ㄆ＝ㄇ≦8的各種情形。（如下表）

⑶將討論出來的ㄅ、ㄆ、ㄇ，在不考慮拼塊的形狀相同與否的情況下，以最簡單的例子，排排看，能不能排成一正方形。

2.結果：

切成塊數（ㄅ）	1	2	3	4	5	6	7	8
每塊面積（ㄆ）	1	2	3	4	5	6	7	8
排成之正方形面積（$ㄇ^2$）	1	4	9	16	25	36	49	64

根據上表，不同的塊數、拼塊面積、正方形總面積，以最簡單的例子來排排看：（1格爲1㎠）



3.發現：

在“小拼塊〞的數目與面積相等，但不考慮〝小拼塊〞形狀是否不同的情況下，都可以用最簡單的例子排成正方形。

㈢找出〝小拼塊〞的各種形狀：

1.分析：由過程㈠、過程㈡所累積的經驗，發現到“小拼塊〞的面積可以分解成二塊，即其面積因數的值和（面積值－因數）。因此，若由這二個數值的排塊形狀互相配合變化，應可將同一面積的所有圖形變化出來。

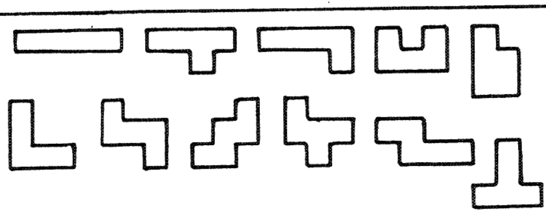
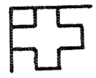
2.操作：

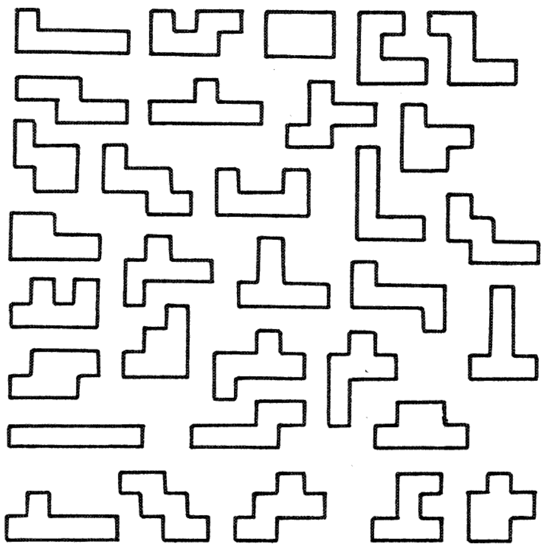
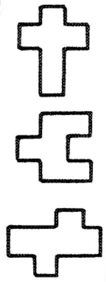
⑴先找出不同面積值的因數

⑵以其面積（小拼塊）之因數值和（面積值－因數）來推演相同面積、不同形狀的各種“小拼塊〞。

3.結果：

由上面的操作可得到各種相同面積、不同形狀的“小拼塊〞，整理如下表：（每一小格代表 1 ㎝²）

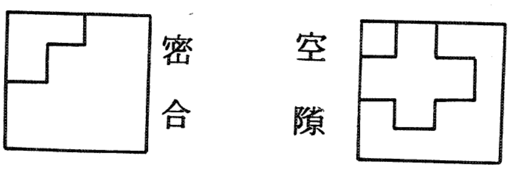
小拼塊數目	各種變化情形	有幾種變化	每塊小拼塊面積	拼成正方形之面積	備註
一塊		1	1 ㎝²	1 ㎝²	
二塊		1	2 ㎝²	4 ㎝²	
三塊		2	3 ㎝²	9 ㎝²	
四塊		5	4 ㎝²	16 ㎝²	
五塊		11	5 ㎝²	25 ㎝²	 不符合遊戲規則

小拼塊數目	各種變化情形	有幾種變化	每塊小拼塊面積	拼成正方形之面積	備註
六塊		32	6 cm^2	36 cm^2	 以上三圖不符合遊戲規則
七塊	以同樣的方法，便可推得其變化情形				
八塊	……………………				

4.發現：

(1)“小拼塊”的面積愈大，變化的形狀種類也愈多。

(2)若變化出來的圖形，任一邊置於拼盤左上角都會出現空隙時，則此圖不符合遊戲規則，予以刪除。例：



(3)若利用拼塊面積之因數值+（面積值－因數），可將所有變化的情形找出來。

(4)不同面積值的變化形狀，其實是環環相扣，密不可分的。因爲 1 是任一數值的因數，故推演的最簡單方法便是 1 +（面積值－ 1）。所以，實際操作時，爲求迅速，1 cm^2 的變化情形是 2 cm^2 變化的基礎，2 cm^2

是 3 cm^2 的基礎，同理，拼塊面積為ㄉcm^2，則可用（ㄉ－1）為基礎，來找出變化的情形。

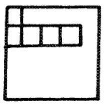
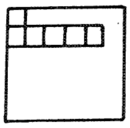
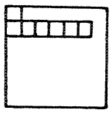
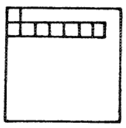
⑸拼塊數目七塊，八塊的情形，也可以用面積因數值＋（面積值－因數）來推演。

㈣在每個“小拼塊”形狀都不重覆的情況下，都能完成魔術拼盤嗎？

⑴操作：

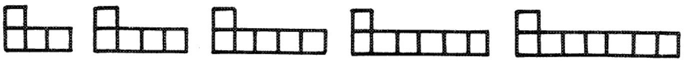
將過程㈢所推得之各種小拼塊，按面積大小來分組，並用白紙將其畫下來，剪好，配合適當的魔術底盤，實際來拼拼看，能不能拼成魔術拼盤呢？

⑵結果：（如下表）

拼盤中所需小拼塊的數目	能不能拼成魔術拼盤	備註
一塊	能	能拼成正方形，但變化單調，無挑戰性
二塊	不能	必須用到“重複出現”的小拼塊，故不符合遊戲規則
三塊	不能	必須用到“重複出現”的小拼塊，故不符合遊戲規則
四塊	不能	小拼塊的形狀必須重複出現，才能排滿正方形，故不符合遊戲規則
五塊	能	只要找出五塊小拼塊的各種變化形狀，任選一塊固定於底盤左上角後，一定能再找出四個小拼塊（形狀不同）來將正方形排滿，成為“新”魔術拼盤。  此圖違反“形狀不重複”原則，故須予以刪除。
六塊	能	除  此圖違反“形狀不重複”原則，予以刪除外，其餘拼塊則可組成“新”魔術拼盤。
七塊	能	除  此圖違反“形狀不重複”原則，予以刪除外，其餘拼塊則可組成“新”魔術拼盤。
八塊	能	除  此圖違反“形狀不重複”原則，予以刪除外，其餘拼塊則可組成“新”魔術拼盤。

⑶發現：

⑴由 5 塊“小拼塊〞以下所組成的拼盤（不包括五塊），在每個拼塊面積都相等的情況下，形狀不重覆，則無法完成魔術拼盤。

⑵ 

以上各圖，不符合魔術拼盤原則，故予以刪除。

⑶以不同形狀的拼塊，隨意固定於底盤的左上角後，一定能找出適合的其他拼塊，排滿正方形底盤。

⑷即使以同一小拼塊固定於底盤左上角後，其能完成魔術拼盤的組合也不止一種。

⑸圖形旋轉或翻轉，也可產生不同的變化。

五、結論與討論

㈠魔術拼盤不一定只能由八塊小拼塊組成，經我們研究後，還發現拼塊數爲“五塊〞、“六塊〞、七塊”的“新〞魔術拼盤。

㈡經由拼塊之面積因數值＋（面積值－因數）互相配合，能把小拼塊的所有變化形狀找出來。而變化出的形狀愈多，能拼成正方形的組合也愈多。

㈢小拼塊的面積值愈大，其形狀的變化情形也愈多。

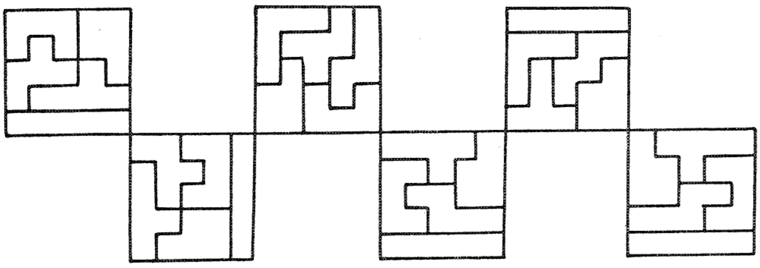
㈣魔術拼盤內，小拼塊的數目愈多，其成排滿底盤的組合方式也愈多。

㈤根據操作的結果，我們發現由 8 塊小拼塊所組成的“新〞魔術拼盤（拼塊爲 8 cm^2，底盤 6 4 cm^2），其拼塊的形狀變化最多，組合情形也最多，最具挑戰性。

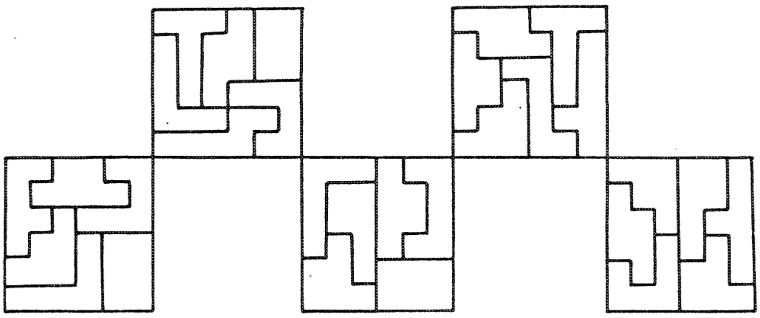
㈥從今以後，再也不必花錢到市面上去買魔術拼盤了，經由上面的活動，我們自己能設計出“新〞魔術拼盤，其組合情形更多、更具思考性、創造性與挑戰性。

㈦經由此次研究活動後，不但使我們對“黑盒子〞有更多的了解，還發明了“新〞魔術拼盤，眞是獲益匪淺，最後我們將“新〞魔術拼盤的部分組合方式記錄於後。

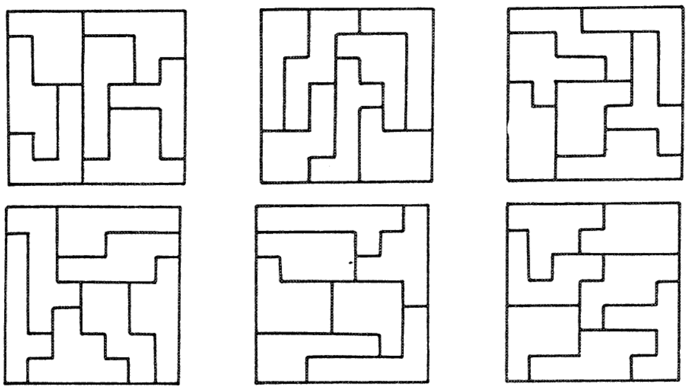
五塊



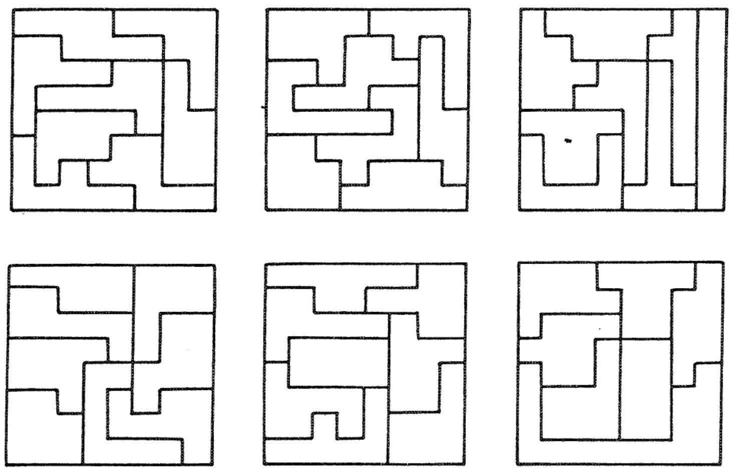
六塊



七塊



八塊



評語

本作品對於拼圖之問題作深入之探討而且得到完整之結果。本作品之優點在於作者對於拼塊之形狀作很深入之分析並作各種不同之推廣。作者對於整個研究內容解說非常清楚，並將各種不同之結論圖示得很清晰。