

# 3 6 9 魔數

## 初小組數學科第三名

澎湖縣龍門國民小學

作者：林宜慧、李孟怡

陳碧蕙、李盈德

指導教師：陳採桂、宋艷秋



### 一、研究動機

上數學課前，老師要全班先背一遍九九乘法表 2 到 5 都背得很順口，也背得很快，但是  $4 \times 9 = 36$  就常有同學背成  $4 \times 9 = 32$ 。孟怡和我還有碧蕙就大叫起來， $4 \times 9$  怎麼會 32 呢？老師就點點頭叫大家繼續背，6 的乘數背的速度就比前面的 5 慢，7 和 8 更慢，而且雜音很多，背錯的同學都伸長舌，慢慢的背到  $9 \times 4$  又是 32。

等大家都背完  $9 \times 9 = 81$ ，老師就從 2 的倍數開始教大家算一算，它的倍數會變什麼魔數？讓大家認識九九乘法的變數，老師教大家做一做，我們覺得很有趣因為：

(一)

$$\begin{array}{l}
2 \times 1 = 2 \quad 0 + 2 = 2 \\
2 \times 2 = 4 \quad 0 + 4 = 4 \\
2 \times 3 = 6 \quad 0 + 6 = 6 \\
2 \times 4 = 8 \quad 0 + 8 = 8 \\
2 \times 5 = 10 \quad 1 + 0 = 1 \\
2 \times 6 = 12 \quad 1 + 2 = 3 \\
2 \times 7 = 14 \quad 1 + 4 = 5 \\
2 \times 8 = 16 \quad 1 + 6 = 7 \\
2 \times 9 = 18 \quad 1 + 8 = 9 \\
2 \times 10 = 20 \quad 2 + 0 = 2
\end{array}$$

(二)

$$\begin{array}{l}
3 \times 1 = 3 \quad 0 + 3 = 3 \\
3 \times 2 = 6 \quad 0 + 6 = 6 \\
3 \times 3 = 9 \quad 0 + 9 = 9 \\
3 \times 4 = 12 \quad 1 + 2 = 3 \\
3 \times 5 = 15 \quad 1 + 5 = 6 \\
3 \times 6 = 18 \quad 1 + 8 = 9 \\
3 \times 7 = 21 \quad 2 + 1 = 3 \\
3 \times 8 = 24 \quad 2 + 4 = 6 \\
3 \times 9 = 27 \quad 2 + 7 = 9 \\
3 \times 10 = 30 \quad 3 + 0 = 3
\end{array}$$

(三)

$$\begin{array}{l}
4 \times 1 = 4 \quad 0 + 4 = 4 \\
4 \times 2 = 8 \quad 0 + 8 = 8 \\
4 \times 3 = 12 \quad 1 + 2 = 3 \\
4 \times 4 = 16 \quad 1 + 6 = 7 \\
4 \times 5 = 20 \quad 2 + 0 = 2 \\
4 \times 6 = 24 \quad 2 + 4 = 6 \\
4 \times 7 = 28 \quad 2 + 8 = 10 \quad 1 + 0 = 1 \\
4 \times 8 = 32 \quad 3 + 2 = 5 \\
4 \times 9 = 36 \quad 3 + 6 = 9 \\
4 \times 10 = 40 \quad 4 + 0 = 4
\end{array}$$

(四)

$$\begin{array}{l}
5 \times 1 = 5 \quad 0 + 5 = 5 \\
5 \times 2 = 10 \quad 1 + 0 = 1 \\
5 \times 3 = 15 \quad 1 + 5 = 5 \\
5 \times 4 = 20 \quad 2 + 0 = 2 \\
5 \times 5 = 25 \quad 2 + 5 = 7 \\
5 \times 6 = 30 \quad 3 + 0 = 3 \\
5 \times 7 = 35 \quad 3 + 5 = 8 \\
5 \times 8 = 40 \quad 4 + 0 = 4 \\
5 \times 9 = 45 \quad 4 + 5 = 9 \\
5 \times 10 = 50 \quad 5 + 0 = 5
\end{array}$$

(五)

$$\begin{array}{l}
6 \times 1 = 6 \quad 0 + 6 = 6 \\
6 \times 2 = 12 \quad 1 + 2 = 3 \\
6 \times 3 = 18 \quad 1 + 8 = 9 \\
6 \times 4 = 24 \quad 2 + 4 = 6 \\
6 \times 5 = 30 \quad 3 + 0 = 3 \\
6 \times 6 = 36 \quad 3 + 6 = 9 \\
6 \times 7 = 42 \quad 4 + 2 = 6 \\
6 \times 8 = 48 \quad 4 + 8 = 12 \quad 1 + 2 = 3 \\
6 \times 9 = 54 \quad 5 + 4 = 9 \\
6 \times 10 = 60 \quad 6 + 0 = 6
\end{array}$$

(六)

$$\begin{array}{l}
7 \times 1 = 7 \quad 0 + 7 = 7 \\
7 \times 2 = 14 \quad 1 + 4 = 5 \\
7 \times 3 = 21 \quad 2 + 1 = 3 \\
7 \times 4 = 28 \quad 2 + 8 = 10 \quad 1 + 0 = 1 \\
7 \times 5 = 35 \quad 3 + 5 = 8 \\
7 \times 6 = 42 \quad 4 + 2 = 6 \\
7 \times 7 = 49 \quad 4 + 9 = 13 \quad 1 + 3 = 4 \\
7 \times 8 = 56 \quad 5 + 6 = 11 \quad 1 + 1 = 2 \\
7 \times 9 = 63 \quad 6 + 3 = 9 \\
7 \times 10 = 70 \quad 7 + 0 = 7
\end{array}$$

| (七)                |              |             | (八)                |             |
|--------------------|--------------|-------------|--------------------|-------------|
| $8 \times 1 = 8$   | $0 + 8 = 8$  |             | $9 \times 1 = 9$   | $0 + 9 = 9$ |
| $8 \times 2 = 16$  | $1 + 6 = 7$  |             | $9 \times 2 = 18$  | $1 + 8 = 9$ |
| $8 \times 3 = 24$  | $2 + 4 = 6$  |             | $9 \times 3 = 27$  | $2 + 7 = 9$ |
| $8 \times 4 = 32$  | $3 + 2 = 5$  |             | $9 \times 4 = 36$  | $3 + 6 = 9$ |
| $8 \times 5 = 40$  | $4 + 0 = 4$  |             | $9 \times 5 = 45$  | $4 + 5 = 9$ |
| $8 \times 6 = 48$  | $4 + 8 = 12$ | $1 + 2 = 3$ | $9 \times 6 = 54$  | $5 + 4 = 9$ |
| $8 \times 7 = 56$  | $5 + 6 = 11$ | $1 + 1 = 2$ | $9 \times 7 = 63$  | $6 + 3 = 9$ |
| $8 \times 8 = 64$  | $6 + 4 = 10$ | $1 + 0 = 1$ | $9 \times 8 = 72$  | $7 + 2 = 9$ |
| $8 \times 9 = 72$  | $7 + 2 = 9$  |             | $9 \times 9 = 81$  | $8 + 1 = 9$ |
| $8 \times 10 = 80$ | $8 + 0 = 8$  |             | $9 \times 10 = 90$ | $9 + 0 = 9$ |

發現：(1) 2 . 4 . 5 . 7 . 8 . 的乘法它們的積數，十位和個位數字相加所得的和 1 到 9 的數字都有，【如(一)(三)(四)(六)(七)】。

(2) 3 和 6 的乘法，積數的十位數和個位數相加所得的和都是 3、6、9 三個數字【如(二)(五)】。

(3) 9 的乘法，積數的十位數和個位數字相加，所得的和都是 9 的數字【如(八)】。

(4) 3 . 6 . 9 的倍數，要怎麼認呢？

## 二、研究目的

(一)隨便的一個 3 和 6 的倍數，它的積數的數字和都是 3、6、9 三個數字。

(二)隨便的一個 9 的倍數，它的積數的數字和，都是 9 的數字。

(三)隨便找兩個或三個數字相加，和是 9，它就是 9 的倍數。

(四)隨意找兩個或三個數字相加，和是 3 或 6，它就是 3、6 的倍數。

## 三、研究設備

九九乘法表、黑板、粉筆、計算紙、尺、原子筆。

## 四、研究過程

(一)問題一：隨便的一個 3 和 6 的倍數，它的積數的數字和，都是 3、6、9 三個數字嗎？

1. 假如找隨意的二位數乘以 3，所得的結果是怎樣的？（三年級上學期末學到三位數的乘法，因此用連加法算）

- (1)  $11 \times 3 = 11 + 11 + 11 = 33$        $3 + 3 = 6$   
 (2)  $87 \times 3 = 87 + 87 + 87 = 261$        $2 + 6 + 1 = 9$   
 (3)  $26 \times 3 = 26 + 26 + 26 = 78$        $7 + 8 = 15$      $1 + 5 = 6$   
 (4)  $70 \times 3 = 70 + 70 + 70 = 210$        $2 + 1 + 0 = 3$

2. 找隨意的三位數，乘以 3 所得的結果，是不是也跟二位數一樣？

- (1)  $406 \times 3 = 1218$       (2)  $321 \times 3 = 963$

$$\begin{array}{r} 406 \\ 406 \\ + 406 \\ \hline 1218 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 321 \\ 321 \\ + 321 \\ \hline 963 \end{array}$$

$1 + 2 + 1 + 8 = 12$      $1 + 2 = 3$      $9 + 6 + 3 = 18$      $1 + 8 = 9$

- (3)  $500 \times 3 = 1500$

- (4)  $917 \times 3 = 2751$

$$\begin{array}{r} 500 \\ 500 \\ + 500 \\ \hline 1500 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 917 \\ 917 \\ + 917 \\ \hline 2751 \end{array}$$

$1 + 5 + 0 + 0 = 6$

$2 + 7 + 5 + 1 = 15$      $1 + 5 = 6$

討論：發現隨意的二位數或三位數乘以 3，所得的積數，每一位數字相加，和都是 3、6、9 三個數其中的一個數。

3. 找隨意的二位數乘以 6，所得的積數的數字和，是怎樣？

- (1)  $16 \times 6 = 96$

- (2)  $42 \times 6 = 252$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ + 16 \\ \hline 48 \end{array} \quad \begin{array}{r} 48 \\ + 48 \\ \hline 96 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ 42 \\ + 42 \\ \hline 126 \end{array} \quad \begin{array}{r} 126 \\ + 126 \\ \hline 252 \end{array}$$

$9 + 6 = 15$      $1 + 5 = 6$

$2 + 5 + 2 = 9$

$$(3) 83 \times 6 = 498$$

$$\begin{array}{r}
 83 \\
 83 \\
 + 83 \\
 \hline
 249
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 249 \\
 + 249 \\
 \hline
 498
 \end{array}$$

$$4 + 9 + 8 = 21 \quad 2 + 1 = 3 \quad 3 + 4 + 2 = 9$$

$$(4) 57 \times 3 = 342$$

$$\begin{array}{r}
 57 \\
 57 \\
 + 57 \\
 \hline
 171
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 171 \\
 + 171 \\
 \hline
 342
 \end{array}$$

4. 找隨意的三位數乘以 6，所得的結果是不是跟二位數一樣？

$$(1) 207 \times 6 = 1242$$

$$\begin{array}{r}
 207 \\
 207 \\
 + 207 \\
 \hline
 621
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 621 \\
 + 621 \\
 \hline
 1242
 \end{array}$$

$$1 + 2 + 4 + 2 = 9$$

$$(3) 190 \times 6 = 1140$$

$$\begin{array}{r}
 190 \\
 190 \\
 + 190 \\
 \hline
 570
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 570 \\
 + 570 \\
 \hline
 1140
 \end{array}$$

$$1 + 1 + 4 + 0 = 6$$

$$(2) 618 \times 6 = 2508$$

$$\begin{array}{r}
 618 \\
 618 \\
 + 618 \\
 \hline
 1254
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1254 \\
 + 1254 \\
 \hline
 2508
 \end{array}$$

$$2 + 5 + 0 + 8 = 15 \quad 1 + 5 = 6$$

$$(4) 452 \times 6 = 2712$$

$$\begin{array}{r}
 452 \\
 452 \\
 + 452 \\
 \hline
 1356
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1356 \\
 + 1356 \\
 \hline
 2712
 \end{array}$$

$$2 + 7 + 1 + 2 = 12 \quad 1 + 2 = 3$$

討論：發現隨意的二位數或三位數乘以 6，積數的數字和都是 3、6、9 三個數字。

(二) 問題二：隨便的一個 9 的倍數，它的積數的數字和都是 9 的數字嗎？

1. 假如找隨意的二位數，乘以 9 結果怎樣？

$$(1) 46 \times 9 = 414$$

$$\begin{array}{r}
 46 \\
 46 \\
 + 46 \\
 \hline
 138
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 138 \\
 + 138 \\
 \hline
 414
 \end{array}$$

$$4 + 1 + 4 = 9$$

$$(2) 25 \times 9 = 225$$

$$\begin{array}{r}
 25 \\
 25 \\
 + 25 \\
 \hline
 75
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 75 \\
 + 75 \\
 \hline
 225
 \end{array}$$

$$2 + 2 + 5 = 9$$

$$(3) 61 \times 9 = 549$$

$$\begin{array}{r}
 61 \\
 61 \\
 +61 \\
 \hline
 183
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 183 \\
 183 \\
 +183 \\
 \hline
 549
 \end{array}$$

$$5 + 4 + 9 = 18 \quad 1 + 8 = 9$$

$$(4) 97 \times 9 = 873$$

$$\begin{array}{r}
 97 \\
 97 \\
 +97 \\
 \hline
 291
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 291 \\
 291 \\
 +291 \\
 \hline
 873
 \end{array}$$

$$8 + 7 + 3 = 18 \quad 1 + 8 = 9$$

2. 隨意的三位數乘以 9，是不是也跟二位數一樣？

$$(1) 317 \times 9 = 2853$$

$$\begin{array}{r}
 317 \\
 317 \\
 +317 \\
 \hline
 951
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 951 \\
 951 \\
 +951 \\
 \hline
 2853
 \end{array}$$

$$2 + 8 + 5 + 3 = 18 \quad 1 + 8 = 9$$

$$(2) 484 \times 9 = 4356$$

$$\begin{array}{r}
 484 \\
 484 \\
 +484 \\
 \hline
 1452
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1452 \\
 1452 \\
 +1452 \\
 \hline
 4356
 \end{array}$$

$$4 + 3 + 5 + 6 = 18 \quad 1 + 8 = 9$$

$$(3) 555 \times 9 = 4995$$

$$\begin{array}{r}
 555 \\
 555 \\
 +555 \\
 \hline
 1665
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1665 \\
 1665 \\
 +1665 \\
 \hline
 4995
 \end{array}$$

$$4 + 9 + 9 + 5 = 27 \quad 2 + 7 = 9$$

$$(4) 999 \times 9 = 8991$$

$$\begin{array}{r}
 999 \\
 999 \\
 +999 \\
 \hline
 2997
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2997 \\
 2997 \\
 +2997 \\
 \hline
 8991
 \end{array}$$

$$8 + 9 + 9 + 1 = 27 \quad 2 + 7 = 9$$

討論：發現隨意的二位數或三位數乘以 9 所得的積數，它們的數字和都是 9。

疑問：如果隨便找二個或三個數字，把它們相加，所得的和是 9 那這二位數或三位數是不是 9 的倍數呢？

(三) 問題三：怎樣知道它是 9 的倍數？

1. 隨便找二個數字相加，它們的和是 9，除以 9 以後有沒有餘數？

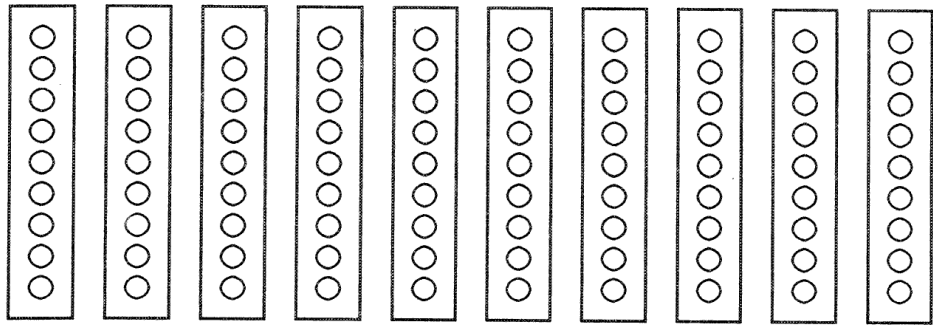
$$(1) 27 = 2 + 7 = 9$$

$$27 \div 9 = 3$$

$$\begin{array}{r}
 3 \\
 9 \overline{) 27} \\
 \underline{27} \\
 0
 \end{array}$$

$$(2) 90 = 9 + 0 = 9$$

$$90 \div 9 = 10$$



2. 隨意找三個數相加，它們的和是 9，除以 9 以後有沒有餘數？

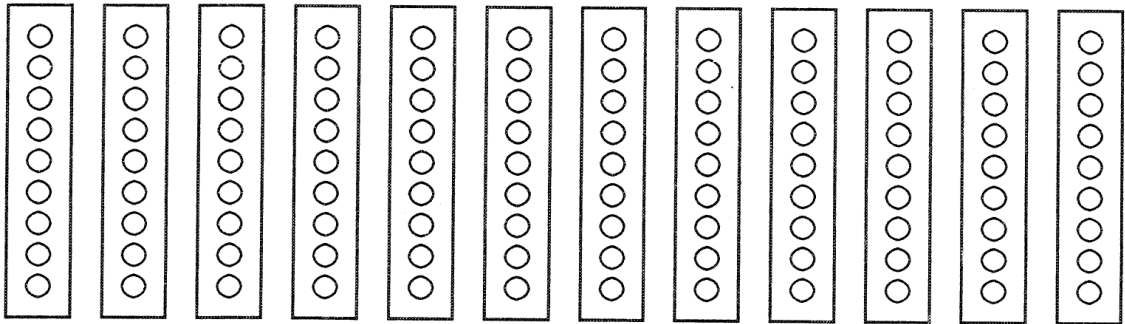
$$(1) 108 = 1 + 0 + 8 = 9$$

$$(2) 630 = 6 + 3 + 0 = 9$$

$$108 \div 9 = 12$$

$$630 \div 9 = 70$$

$$63 \div 9 = 7$$



討論：發現  $\cup$ 。隨便二個數相加，和是 9 除以 9 以後沒有餘數。

$\cup$ 。隨便三個數相加，和是 9 除以 9 以後也沒有餘數。

$\sqcap$ 。二個數或三個數字相加所得的和是 9，可以說它們就是 9 的倍數。

疑問：如果二個數或三個數相加，和是 3、6，那它們除以 3、6 以後，沒有餘數？它們就是 3、6 的倍數嗎？

四問題四：3 和 6 的倍數在那裡？

1. 隨便找二個相加，它們的和是 3，除以 3 以後，有沒有餘數？

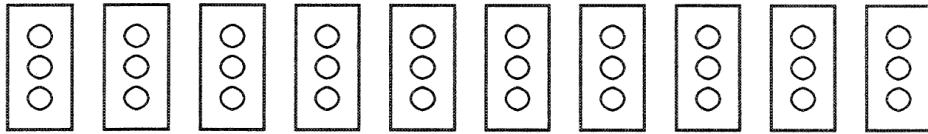
$$(1) 12 = 1 + 2 = 3$$

$$(2) 30 = 3 + 0 = 3$$

$$12 \div 3 = 4$$

$$30 \div 3 = 10$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 3 \overline{) 12} \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$



2.隨便找三個數相加，它們的和也是3，是不是跟二位數一樣除以3以後，沒有餘數？

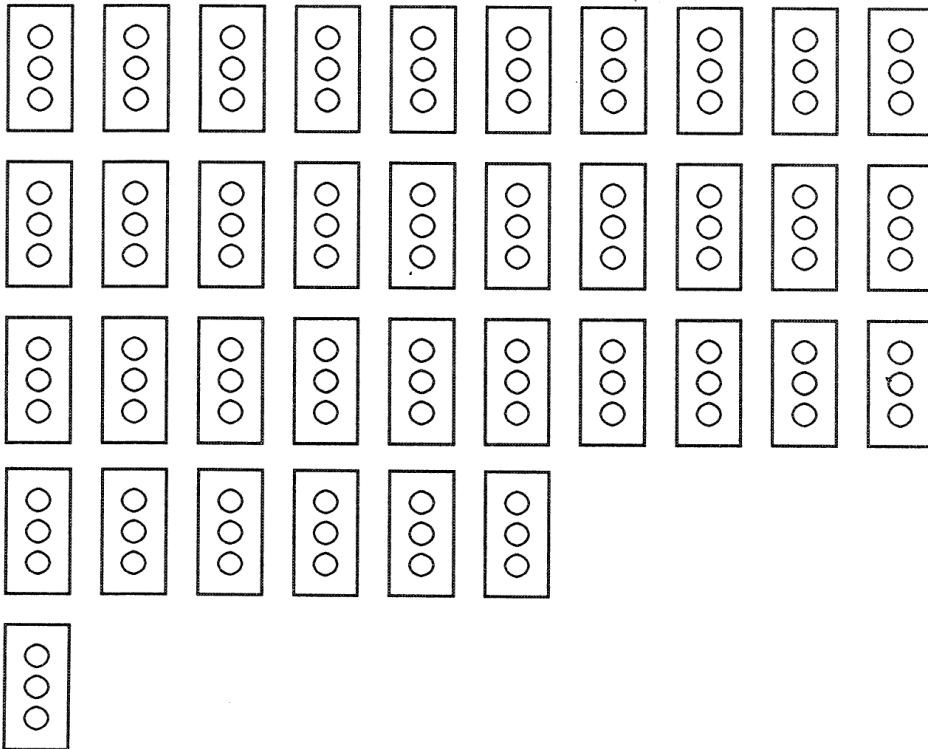
$$(1) 111 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$111 \div 3 = 37$$

$$(2) 210 = 2 + 1 + 0 = 3$$

$$210 \div 3 = 70$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ 3 \overline{)21} \\ \underline{21} \\ 0 \end{array}$$



結果：發現兩個數或三個數相加，和是3，除以3以後都沒有餘數。

3.隨便找二個數相加，和是6再除以6以後會怎樣？

$$(1) 42 = 4 + 2 = 6$$

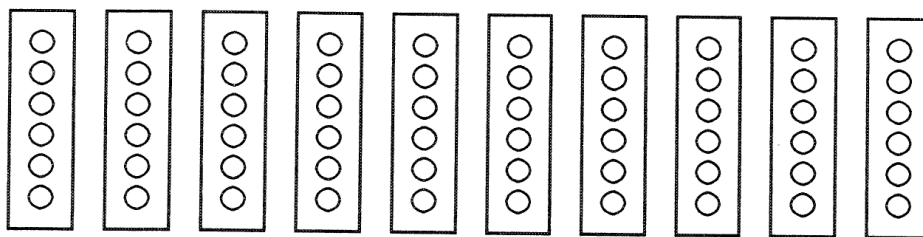
$$42 \div 6 = 7$$

$$(2) 60 = 6 + 0 = 6$$

$$60 \div 6 = 10$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ 6 \overline{)42} \\ \underline{42} \\ 0 \end{array}$$





討論：3 3、1 5、5 1 三個數雖然相加和 6，可是它們除以 6 以後還有餘數，我想這三個數不是 6 的倍數。

4. 隨便找三個數相加，和是 6，再除以 6 跟兩位數有什麼不同？

$$(1) 3\ 3\ 0 = 3 + 3 + 0 = 6$$

$$(2) 5\ 1\ 0 = 5 + 1 + 0 = 6$$

$$3\ 3\ 0 \div 6 = 5\ 5$$

$$5\ 1\ 0 \div 6 = 8\ 5$$

$$3\ 3\ 0 = 3\ 0\ 0 + 3\ 0$$

$$5\ 1\ 0 = 4\ 8\ 0 + 3\ 0$$

$$3\ 3\ 0 \div 6 = 5\ 0$$

$$4\ 8\ 0 \div 6 = 8\ 0$$

$$3\ 0 \div 6 = 5$$

$$3\ 0 \div 6 = 5$$

$$(3) 1\ 5\ 0 = 1 + 5 + 0 = 6$$

$$(4) 4\ 0\ 2 = 4 + 0 + 2 = 6$$

$$1\ 5\ 0 \div 6 = 2\ 5$$

$$4\ 0\ 2 \div 6 = 6\ 7$$

$$1\ 5\ 0 = 1\ 2\ 0 + 3\ 0$$

$$4\ 0\ 2 = 3\ 6\ 0 + 4\ 2$$

$$1\ 2\ 0 \div 6 = 2\ 0$$

$$3\ 6\ 0 \div 6 = 6\ 0$$

$$3\ 0 \div 6 = 5$$

$$4\ 2 \div 6 = 7$$

討論：發現剛才的二位數中 3 3、1 5、5 1 除以 6 以後都有餘數，如果個位加一個 0，變成三位數以後，除以 6 就沒有餘數，它們就是 6 的倍數。

## 五、結論

(一) 隨意找二位數或三位數乘 3、6 所得的積數和，都是 3、6、9 三個數字。

(二) 隨意的二位數或三位數乘以 9 所得的積數和，都是 9。

(三) 不管是二位數或三位數，它們的數字和是 9，它們都是 9 的倍數。

(四) 如果數字和是 3、6，它們就是 3、6 的倍數。

## 評語

初小三年級學生，尚未學習除法而能將任意數是否為 3，6，9 的倍數討論出來，值得鼓勵。