魔方戲法我會變

初小組數學科第二名

台南縣崑山國民小學

作　　者：劉冠志、劉姿旻
林冠甫等三十人

指導教師：徐世和、林瑞成

一、研究動機

二上數學課本綜合應用三（第７０頁），有一練習題，１、２、３、４、５、６、７、８、９九個整數中，那三個整數加起來會等於１５，你能寫出幾種？

我是用１＋９＋５＝１５、６＋８＋１＝１５……等多種不同的加法，可是卻發現和同學們的寫法不太一樣，我們都覺得很奇怪，就請問老師，經過老師的詳細說明，大家才知道，原來這一題的答案是有很多種不同的寫法，不是單一固定的。我們對這些像魔術般富有變化的數字遊戲，都很感興趣。因此，在同學們的渴望求知、老師的鼓勵，又配合本校校刊一數學遊戲的有獎徵答，大家都很熱烈的參與討論，於是就請老師指導我們做有趣的魔術九方格數字研究。

二、研究目的

㈠研究九方格填法，並歸納成簡易法則，使易懂易學，將有趣的數學遊戲普遍化。

㈡探討九方格中數（中央位）取法。

㈢探討九方格常模及多種的填法。

㈣研究各種不同數的填法，並加整理、歸納成規律性。

㈤從學習遊戲化中，增強數學科的興趣，進而激發思考、創造發明。

三、研究過程

㈠以１～９的連續整數，分別填入九方格（不可重覆，如圖），使每直、橫、斜的和都相同。

1.分析與討論：

⑴ 1～9 的總和 4 5，九方格的直、橫各有三行，把九方格平分三等分，每直、橫的和是 $45 \div 3 = 15$，直、橫每行均爲 1 5，在直、橫、斜的和希望相同下，斜行的和唯一可能性只有 1 5（除非不存在）。

⑵中央格的塡法：1～9 每數依次由 1 分別塡入中央格。

ㄅ. 1 的塡法：如圖

	1	
	2	

1 塡入中央格，其餘八數分別任意塡在八空格，若 2 塡此，則 $1+2=3$，$3+9=12$，$12<15$，不管 2 出現在八空格中的那一格，1 與 2 所成線（直、橫、斜）之和永遠不可能 1 5，因此確定 1 不可塡中央格。

ㄆ. 2、3、4、6、7、8、9 的塡法與 1 相同，確定不可塡中央格。

ㄇ. 5 的塡法：如圖

	1	
	5	
	9	

5 塡入中央格，其餘八數分別取二數與 5 成一線，該二數和必定要 1 0，（1，9）（2，8）（3，7）（4，6）四組數的和均爲 1 0，若 1 塡此，則 $9+1=10$，$10+5=15$，因此 5 有可能塡在中央格。

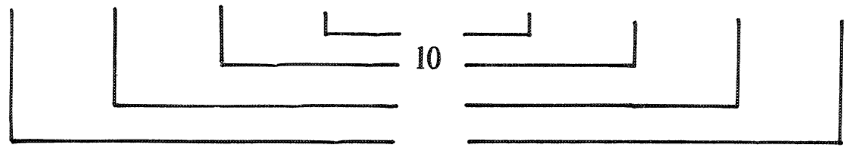
⑶結果：唯有 5 塡在中央格（1、2、3、4、6、7、8、9 均不可），才有可能使每直、橫、斜的和爲 1 5。

2.研究與討論：

經過大家熱烈研討後發現：1～9 的整數中

⑴由小至大排列

首位	二位	三位	四位	五位	六位	七位	八位	九位
1	2	3	4	5	6	7	8	9



(2)由大至小排列

首位	二位	三位	四位	五位	六位	七位	八位	九位
9	8	7	6	5	4	3	2	1

10

5 均爲中央位數，以 5 爲中心，其兩邊分別由內至外或外至內，可配對成和爲１０的組合，（９，１）（８，２）（７，３）（６，４），１０＋５＝１５（５爲中央數），因此可由四組配對，分別試塡在以 5 爲中央格的九方格。

3.試塡九方格：

	9	
	5	
	1	

→

4	9	2
	5	
	1	

→

4	9	2
	5	
8	1	6

以 5 固定中央格，將配對組合爲１０的四組，分別塡於九方格四周，使其或直或橫或斜的組合相配對爲１０，則１０＋５＝１５。在組合１０的二數中，我們嘗試各種塡法，其中有一成功的例子，（９，１）配對爲一線（如圖），可知 9 左右兩邊的和爲１５－９＝６，左右之和出現爲 6 的可能情形（１，５）（２，４）（３，３），但（１，５）（３，３）均不可能，所以只有（２，４）如圖，依此可推演塡成如下圖一式。

結果：確定以 5 塡在中央格，有八式可使直、橫、斜的和均爲１５，如下圖示。

在每直、橫、斜的和均爲１５的九方格八式中，我們有下列發現

ㄅ．由八式中，可確立九方格塡數是有規則性，基本模式如圖一

一、

4	9	2
3	5	7
8	1	6

左旋 →

二、

2	7	6
9	5	1
4	3	8

左旋 →

三、

6	1	8
7	5	3
2	9	4

左旋 →

四、

8	3	4
1	5	9
6	7	2

五、左右↓互換

2	9	4
7	5	3
6	1	8

六、左右↓互換

6	7	2
1	5	9
8	3	4

七、左右↓互換

8	1	6
3	5	7
4	9	2

八、左右↓互換

4	3	8
9	5	1
2	7	6

ㄆ. 二、三、四式之塡法，可依一式依次向左轉如圖式，五、六、七、八式之塡法，則分別爲一、二、三、四式左右互換。

ㄇ. 由1～9的塡數中，不論由小至大或大而小排列，每位差都是1，是等差數，因此，我們就以位差相等的等差數，繼續下面的研究：

(二)以各種不同等差數塡入九方格：

*1.*連續整數位差1的等差數。

位數	一位	二位	三位	四位	五位	六位	七位	八位	九位
塡數	10	11	12	13	14	15	16	17	18
位	1	1	1	1	1	1	1	1	
差	等				差				

連續整數位差1的等差數，可塡成直、橫、斜和均等的八式。

一、

13	18	11
12	14	16
17	10	15

左右↓互換

左旋→

二、

11	16	15
18	14	10
13	12	17

左右↓互換

左旋→

三、

15	10	17
16	14	12
11	18	13

左右↓互換

左旋→

四、

17	12	13
10	14	18
15	16	11

左右↓互換

五、

11	18	13
16	14	12
15	10	17

六、

15	16	11
10	14	18
17	12	13

七、

17	10	15
12	14	16
13	18	11

八、

13	12	17
18	14	10
11	16	15

(1)八式各直、橫、斜的和各爲42爲中央數3倍。

(2)（一、九）（二、八）（三、七）（四、六）位數和

$10+18=11+17=12+16=13+15=28=14\times2$

，爲中央數2倍（即直、橫、斜去掉中央數＝中央數×2）。

(3)總和 $10+11+12+13+14+15+16+17+18=126=14\times9$ 爲中央數的9倍。

*2.*位差是5的等差數

位數	一位	二位	三位	四位	五位	六位	七位	八位	九位
塡數	10	15	20	25	30	35	40	45	50
位	5	5	5	5	5	5	5	5	
差	等差								

連續整數位差 5 的等差數，可塡成直、橫、斜和均等的八式。驗證其他等差數，均能使每直、橫、斜的和相等。

結果：確定位差相等的等差數均適塡九方格。

由上研究確定等差數均適塡九方格，同學們意猶未盡，並試著以不同位差來塡，結果意外發現，如甲1甲2……形式位差，塡入九方格中也能滿足直、橫、斜的和都相同，因此，我們更進一步研究非等差的塡數。

㈢以各種非等差數，塡入九方格。用非等差，位差不等的數塡入九方格，有的不可以使每直、橫、斜的和均等，但具有如下規則的可以

ㄅ．甲1 位差 1、1、2、1、1、2、1、1 的非等差數

位數	一位	二位	三位	四位	五位	六位	七位	八位	九位
塡數	1	2	3	5	6	7	9	10	11
位	1	1	2	1	1	2	1	1	
差	非等差								

可塡成直、橫、斜和均等的八式。

一、

5	11	2
3	6	9
10	1	7

左右↓互換

左旋→

二、

2	9	7
11	6	1
5	3	10

左右↓互換

左旋→

三、

7	1	10
9	6	3
2	11	5

左右↓互換

左旋→

四、

10	3	5
1	6	11
7	9	2

左右↓互換

五、

2	11	5
9	6	3
7	1	10

六、

7	9	2
1	6	11
10	3	5

七、

10	1	7
3	6	9
5	11	2

八、

5	3	10
11	6	1
2	9	7

甲2 位差1、1、3、1、1、3、1、1的非等差數

位數	一位	二位	三位	四位	五位	六位	七位	八位	九位
塡數	100	101	102	105	106	107	110	111	112
位差	1	1	3	1	1	3	1	1	
	非等差								

可塡成直、橫、斜和均等的八式。

依上甲1甲2法亦可類推如下位差

1、1、1、1、1、1、1、1　（等差）

1、1、2、1、1、2、1、1

1、1、3、1、1、3、1、1

1、1、4、1、1、4、1、1

：　：　：　：　：　：　：　：

：　：　：　：　：　：　：　：

：　：　：　：　：　：　：　：

逐式一一驗證，確實能使直橫斜和均等，足證此推論正確。

乙1 位差2、2、1、2、2、1、2、2的非等差數。

位差	一位	二位	三位	四位	五位	六位	七位	八位	九位
塡數	1	3	5	6	8	10	11	13	15
位差	2	2	1	2	2	1	2	2	
	非等差								

可塡成直、橫、斜和均等的八式。

乙2 位差2、2、3、2、2、3、2、2的非等差數。

位數	一位	二位	三位	四位	五位	六位	七位	八位	九位
塡數	200	202	204	207	209	211	214	216	218
位差	2	2	3	2	2	3	2	2	
	非等差								

可填成直、橫、斜和均等的八式。

依上乙1乙 2 法亦可類推如下位差

2、2、1、2、2、1、2、2

2、2、2、2、2、2、2、2　　(等差)

2、2、3、2、2、3、2、2

2、2、4、2、2、4、2、2

:　:　:　:　:　:　:　:

:　:　:　:　:　:　:　:

:　:　:　:　:　:　:　:

逐式一一驗證，確實能使直橫斜和均等，足證此推論正確。

依上述甲1甲2乙1乙 2所得，可整理如下規則位差表。

從甲1、甲2所得類推								從乙1、乙2所得類推								從甲1、甲2、乙1、乙2所得類推																									
1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	2	2	3	3	1	3	3	1	3	3	4	4	1	4	4	1	4	4	5	5	1	5	5	1	5	5	•	•
1	1	2	1	1	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	2	3	3	2	3	3	4	4	2	4	4	2	4	4	5	5	2	5	5	2	5	5	•	•
1	1	3	1	1	3	1	1	2	2	3	2	2	3	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	3	4	4	3	4	4	5	5	3	5	5	3	5	5	•	•
1	1	4	1	1	4	1	1	2	2	4	2	2	4	2	2	3	3	4	3	3	4	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	4	5	5	4	5	5	•	•
1	1	5	1	1	5	1	1	2	2	5	2	2	5	2	2	3	3	5	3	3	5	3	3	4	4	5	4	4	5	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
• A	• A	• B	• A	• A	• B	• A	• A	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

結果：凡位差按AABAABAA規則排列的九個整數，都可填成直、橫、斜和均等的八式。

夊.

甲1 位差2、1、1、1、1、1、1、2的非等差數

位數	一位	二位	三位	四位	五位	六位	七位	八位	九位
塡數	20	22	23	24	25	26	27	28	30
位	2	1	1	1	1	1	1	2	
差	非等差								

甲2 位差3、2、1、2、2、1、2、3的非等差數

位數	一位	二位	三位	四位	五位	六位	七位	八位	九位
塡數	30	33	35	36	38	40	41	43	46
位	3	2	1	2	2	1	2	3	
差	非等差								

乙1 位差3、1、2、1、1、2、1、3的非等差數

位差	一位	二位	三位	四位	五位	六位	七位	八位	九位
塡數	2	5	6	8	9	10	12	13	16
位	3	1	2	1	1	2	1	3	
差	非等差								

乙2 位差4、2、2、2、2、2、2、4的非等差數

位數	一位	二位	三位	四位	五位	六位	七位	八位	九位
塡數	2	6	8	10	12	14	16	18	22
位	4	2	2	2	2	2	2	4	
差	非等差								

均可塡成直、橫、斜和均等的八式。

從甲1、甲2所得類推								從乙1、乙2所得類推								從甲1、甲2、乙1、乙2所得類推																									
2	1	1	1	1	1	1	2	3	1	2	1	1	2	1	3	4	1	3	1	1	3	1	4	5	1	4	1	1	4	1	5	6	1	5	1	1	5	1	6	•	•
3	2	1	2	2	1	2	3	4	2	2	2	2	2	2	4	5	2	3	2	2	3	2	5	6	2	4	2	2	4	2	6	7	2	5	2	2	5	2	7	•	•
4	3	1	3	3	1	3	4	5	3	2	3	3	2	3	5	6	3	3	3	3	3	3	6	7	3	4	3	3	4	3	7	8	3	5	3	3	5	3	8	•	•
5	4	1	4	4	1	4	5	6	4	2	4	4	2	4	6	7	4	3	4	4	3	4	7	8	4	4	4	4	4	4	8	9	4	5	4	4	5	4	9	•	•
6	5	1	5	5	1	5	6	7	5	2	5	5	2	5	7	8	5	3	5	5	3	5	8	9	5	4	5	5	4	5	9	10	5	5	5	5	5	5	10	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
• A	• B	• C	• B	• B	• C	• B	• A	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

結果：凡位差按ABCBBCBA規則排列的九個整數，都可塡成直、橫、斜均等的八式。（A－B＝C）

㈣結果應用：

*1.*上述研究結果具有如下事實：每直橫斜的和爲中位數 3 倍，任何數去掉中位數必爲中位數 2 倍，九個數中最大數必出現在四周之直、橫線的中間格。

*2.*用上述特性，定中位數，設兩組數（其和爲中位數 2 倍，第一組爲最大數與最小數組合，第二組數均必小於最大數）亦可完成九方格，使直、橫、斜和均相等的八式。

四、研究結論

㈠塡九方格八式方法

*1.*由小而大或大而小排列定位數。2.以第五位數塡入中央格。3.按三、㈠. 3.ㄅ. ㄆ. 法即可塡成八式。

㈡適塡九方格的任何組數：

*1.*每直、橫、斜的和＝中央數 3 倍。2.直、橫、斜線之和去掉中央數＝中央數 2 倍。3.總數和＝中央數 9 倍。4.最大的數均位九方格四周之直、橫線的中間隔。

㈢本研究結論適用連續整數、等差整數、有限的非等差整數。

㈣非等差整數ㄅ法：A、B分別爲位差代號，凡位差按A A B A A B A A規則排列的整數，即可塡成八式。

㈤非等差整數ㄆ法：A、B、C分別爲位差代號，凡位差按A B C B B C B A（A－B＝C）規則排列的整數，可塡成八式。

㈥綜合上述結論，再用定中位數，設兩組數之推算法，亦可輕易完成九方格，使直、橫、斜的和均等的八式。

評語

本作品，學生將九方格之塡法，由常模，連續整數位差，左旋，互換，…等方法加以整理並歸納成規律性。學生操作非常純熟，是爲不錯之作品。