矩形的比例分割與其衍生數列之探討

國中組數學科第三名

高雄縣立鳳山國民中學

作　　者：但漢聲、陳世文

指導教師：林景塘

一、研究動機

黃金矩形與費氏數列的關係是數學上十分著名的例子，國民中學數學課本第四冊曾介紹以一元二次方程式來解決黃金矩形的長寬比值問題，此種方法使我們感到新奇，想看看是否能加以推廣？是否能找到類似於黃金矩形而可無限次分割的矩形？若是能找到這種矩形，那麼它的長寬比值，是否類似黃金矩形和費氏數列之關係，而伴隨一個數列？此數列能不能發掘出它內涵的規則所在？這些新穎的問題，使我們興起了研究的動機，試著去探討，希望能解決這些問題。

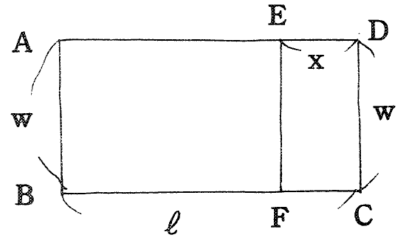
二、研究目的

把黃金矩形的特例加以推廣，得到很多類似的矩形，並尋找與其相對應的數列，此數列的第n項與第（n－1）項的比值（n較大時）逼近於矩形分割之長寬比值。

三、研究內容

(一)長寬不等矩形，必可從較長的一邊割去一矩形，使剩下的矩形長寬比值等於原來矩形的長寬比值。

＜說明＞如圖，矩形ＡＢＣＤ中，長為ℓ，寬為w，在矩形ＡＢＣＤ中可另作一矩形ＥＦＣＤ，使其寬為x，長為w，而$\ell : w = w : x$

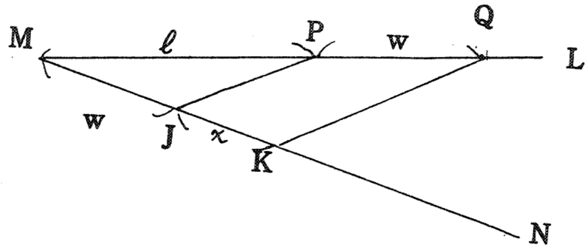


$$\frac{\ell}{w}=\frac{w}{x} \quad x=\frac{w^2}{\ell}$$

（x必為正數，x＜w）

x長度之作法如下：1.在直線Ｌ上任取一點Ｍ，過Ｍ另作一直線Ｎ，（直線Ｎ不平行於直線Ｌ，亦不重合）

2.在直線Ｌ上，截取$\overline{MP}=\ell$，$\overline{PQ}=w$



3.在直線N上，截取$\overline{MJ}=w$

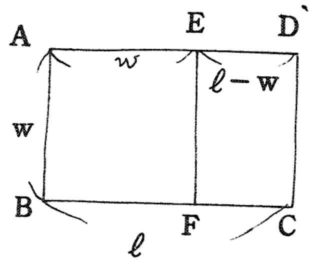
4.連$\overline{PJ}$，並作一直線通過Q，且平行$\overline{PJ}$交直線N於K，則$\overline{JK}=X$

$$\frac{\ell}{w}=\frac{w}{x}$$

$$\therefore x=\frac{w_2}{\ell}$$

∴長寬不等的矩形可依此法作無限次分割。

<特例>如圖，$\overline{AE}=w$時，ABCD為黃金矩形。



$\overline{AE}=w$

$\overline{AB}=w$

$\overline{AD}=\ell$

$\overline{ED}=\frac{w_2}{\ell}=\ell-w$

設$\frac{w}{\ell}=r$，則$\frac{\ell}{w}=\frac{w}{\ell-w}$

$$\Rightarrow\frac{w}{\ell}=\frac{\ell-w}{w}$$

$$\frac{1}{r}=r-1$$

$$r^2-r-1=0$$

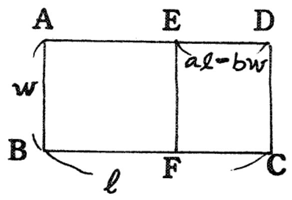
$$r=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\text{（}r=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\text{不合）}$$

$$\therefore r=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

∴當矩形為黃金矩形時，$\ell=\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\cdot w$

(二)黃金矩形的推廣：

1.考慮$\overline{ED}$是$\ell\times a$與$w\times b$之差：$a\ell-bw$（a、b為正整數）的形式



$$\frac{\ell}{w}=\frac{w}{a\ell-bw}$$

$$\frac{w}{\ell}=\frac{a\ell-bw}{w}=a\cdot\frac{\ell}{w}-b$$

令 $r=\frac{\ell}{w}$ 則上式可成爲 r 的一元二次方程式

$$\because \frac{1}{r}=ar-b$$

$$\therefore ar^2-br=1$$

$$ar^2-br-1=0$$

$$r=\frac{b\pm\sqrt{b^2+4a}}{2a}\ (\frac{b-\sqrt{b^2+4a}}{2a}\text{不合})$$

$$\Rightarrow r=\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2a}$$

2. 討論：$a\ell-bw$（a、b 爲正整數）的條件限制：

$$\therefore 0<a\ell-bw<w$$

$$\therefore \begin{cases} a\ell-bw>0 \cdots\cdots\cdots ① \\ a\ell-bw<w \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

由①$\Rightarrow a\ell>bw$

$\frac{\ell}{w}>\frac{b}{a}$（$\because a，w>0$）　即 $r=\frac{\ell}{w}=\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2a}>\frac{b}{a}$

$\because a>0$，同乘以 a，$\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}>b$

$$\therefore b+\sqrt{b^2+4a}>2b$$

同減 b，$\sqrt{b^2+4a}>b$

兩邊平方　$b^2+4a>b^2$

$$4a>0$$

$$a>0$$

由②$\Rightarrow a\ell-bw<w$

$$a\ell<(b+1)w$$

$\because a，w>0$　同除以 aw，　$\frac{\ell}{w}<\frac{b+1}{a}$

即 $r=\frac{\ell}{w}=\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2a}<\frac{b+1}{a}$

$$b+\sqrt{b^2+4a}<2b+2\ (\because a>0)$$

$$\sqrt{b^2+4a}<b+2$$

兩邊平方　$b^2+4a<b^2+4a+4$

$(\because \sqrt{b^2+4a}$，$(b+2)$均爲正數$)$

$$4a<4b+4$$

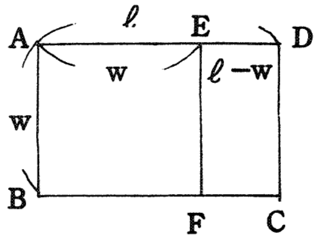
$$a<b+1$$

故 $a\ell-bw$ 中 $a>0$，且 $a<b+1$

及 a，b 均爲正整數爲我們考慮的條件限制。

㈢幾何意義：

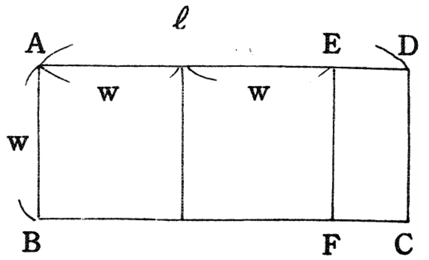
1\. $a=1$，$b=1$，$r=\dfrac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2a}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$



如圖所割下的矩形ABFE爲正方形時 $\overline{DE}=\ell-w$ 則表ABCD爲黃金矩形，其長寬比值

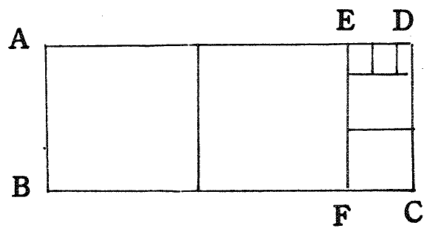
$$r=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

2\. $a=1$，$b=2$，$r=\dfrac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2a}=1+\sqrt{2}$

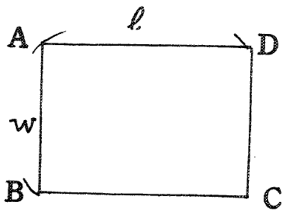


如圖 $\overline{DE}=\ell-2w$ 表從 $\overline{AD}$ 上割下二邊長爲w的正方形時矩形EDCF的長寬比值仍爲 $1+\sqrt{2}$，故EDCF與ABCD爲相似形。

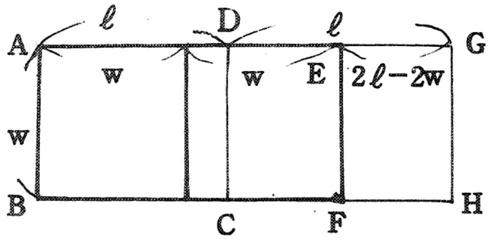
同理，矩形EDCF亦可再繼續分割下去，如下圖：



3\. $a=2$，$b=2$，$r=\dfrac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2a}=\dfrac{2+\sqrt{4+8}}{4}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

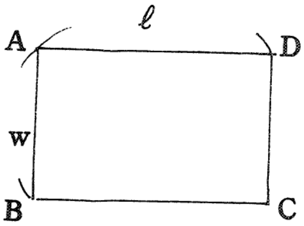


$$\frac{\ell}{w}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

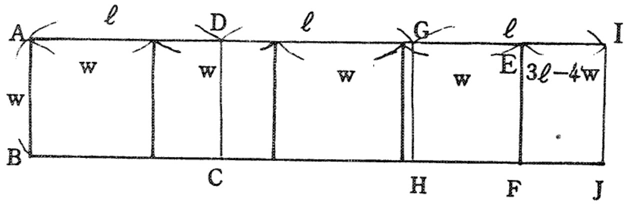


如圖 a ＝ 2 ，b ＝ 2 ，可考慮爲二個矩形並排得$\overline{AG}=2\ell$，從$\overline{AG}$上割去 2 個邊長爲w的正方形，留下的矩形ＥＧＨＦ的長寬比值爲$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，即ＥＦＨＧ與ＡＢＣＤ相似，ＥＦＨＧ可再無限次分割下去。

4. $a=3$，$b=4$，$r=\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2a}=\frac{4+16+12}{6}=\frac{2+\sqrt{7}}{3}$



$$\frac{e}{w}=\frac{2+\sqrt{7}}{3}$$



如圖 a ＝ 3 ，b ＝ 4 ，可考慮爲三個原矩形並排得$\overline{AI}=3\ell$，從$\overline{AI}$上割去 4 個邊長爲w的正方形，留下的矩形ＥＦＪＩ的長寬比值爲

$\frac{2+\sqrt{7}}{3}$ ，∴ＥＦＪＩ與ＡＢＣＤ相似，而ＥＦＪＩ可再無限次分割下去

。

(四) $r=\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2a}$ 與數列關係

1. $a=1$，$b=1$ $r=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\doteqdot 1.618033989$

矩形爲黃金矩形

費氏數列：0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987…………。

說明：費氏數列的規則是首項爲 0，第二項爲 1 ，而第 n 項a_nn＝a_{n-2}＋a_{n-1}，也就是說費氏數列是由此規則所構成，可一直延伸到無限多項。n 愈大時，$a_n／a_{n-1}$之值會愈逼進 r 值，此數列規則亦可視爲 $a_n=\frac{1}{a}\times a_{n-2}+\frac{b}{a}\times a_{n-1}$，由於 $a=b=1$，所以規則仍是一樣的。

（註：$a_n／a_{n-1}$ 之比值請參考下頁列表。）

2. $a=1$，$b=2$，$r=1+\sqrt{2}\doteqdot 2.414213562$

數列：0,1,2,5,12,29,70 ,169,408,985,2378,5741,13860……

。

考慮由費氏數列規則的推廣，令 $a_1=0$，$a_2=1$，第 n 項 a_n 由 $a_{n-2}\times 1$ 與 $a_{n-1}\times 2$ 之和所成（$a_n=a_{n-2}\times 1+a_{n-1}\times 2$），可得數列，而 a_n/a_{n-1} 之值逼近於 $1+\sqrt{2}\doteqdot 2.414213562$，n 越大，此值越接近。

3. $a=2$，$b=2$，

$a_1=0$，$a_2=1$，$a_n=\frac{1}{2}\times a_{n-2}+\frac{2}{2}\times a_{n-1}$

4. $a=3$，$b=4$，

$a_1=0$，$a_2=1$，$a_n=\frac{1}{3}\times a_{n-2}+\frac{4}{3}\times a_{n-1}$

5. 由以上的觀察可得當 $r=\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2a}$，在 a，b 爲正整數，且 $a<b+1$ 的條件限制下，考慮一個數列，

此數列可由下列規則產生：

令首項 $a_1=0$，第二項 $a_2=1$，第 n 項 $a_n=\frac{1}{a}\times a_{n-2}+\frac{b}{a}\times a_{n-1}=0$，

，1，$\frac{b}{a}$，$\frac{a+b^2}{a^2}$，$\frac{ab+b(a+b^2)}{a^3}$，$\frac{a(a+b^2)+b[ab+b(a+b^2)]}{a^4}$

…………………。只要 a，b 符合條件限制，我們發現此數列 a_n/a_{n-1} 都會逼近 $\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2a}$，n 愈大則 a_n/a_{n-1} 愈逼近；而經反覆推敲、尋找出規則的本數列，在極多次的實驗下，都是精準且合理的。

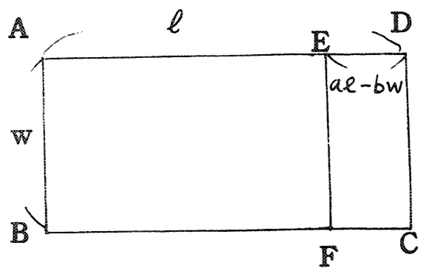
6. 列表如下：（如下頁表）

四、結論

(一)長寬不等的矩形，可無限次分割出與原形相似的矩形。

(二)黃金矩形是上述分割的一種特例。

(三)如圖矩形ABCD的長爲 ℓ，寬爲 w，（$\ell>w$）時，從 ℓ 上分割出一矩形 EFCD 使 $\overline{ED}=a\ell-bw$（a，b 爲正整數；$a<b+1$）時，可得無限多個類似黃金矩形的矩形，其長寬比值 $\frac{\ell}{w}=\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2a}$，即 EFCD 與 ABCD 爲相似矩形。



a	b	r																
1	1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	數 列	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377
r ≒	1.618033989		a_n / a_{n-1}		1	2	1.5	1.6666667	1.6	1.625	1.6153846	1.6190476	1.6176471	1.6181818	1.6179775	1.6180556	1.6180258	

a	b	r																
1	2	$1+\sqrt{2}$	數 列	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741	13860	33461	80782
r ≒	2.414213562		a_n / a_{n-1}		2	2.5	2.4	2.4166667	2.4137931	2.4142857	2.4142012	2.4142157	2.4142132	2.4142136	2.4142136	2.4142136	2.4142136	

a	b	r															
1	3	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	數 列	0	1	3	10	33	109	360	1189	3927	12970	42837	141481		
r ≒	3.302775638		a_n / a_{n-1}		3	3.3333333	3.3	3.3030303	3.3027523	3.3027778	3.3027754	3.3027756	3.3027756	3.3027756			

a	b	r																
2	2	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	數 列	0	1	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{11}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{41}{8}$	$\frac{56}{8}$	$\frac{153}{16}$	$\frac{209}{16}$	$\frac{571}{32}$	$\frac{780}{32}$	$\frac{2131}{64}$	$\frac{2911}{64}$
r ≒	1.366025404		a_n / a_{n-1}		1	1.5	1.3333333	1.375	1.3636364	1.3666667	1.3658537	1.3660714	1.3660131	1.3660287	1.3660245	1.3660256	1.3660253	

a	b	r																
2	3	$\frac{3+\sqrt{17}}{4}$	數 列	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{39}{8}$	$\frac{130}{16}$	$\frac{468}{32}$	$\frac{1664}{64}$	$\frac{5928}{128}$	$\frac{21112}{256}$	$\frac{75192}{512}$	$\frac{267800}{1024}$	$\frac{953784}{2048}$	$\frac{3396952}{4096}$	$\frac{12098424}{8192}$
r ≒	1.780776406		a_n / a_{n-1}		1.5	1.8333333	1.7727273	1.6666667	1.8	1.7777778	1.78125	1.7807018	1.7807881	1.7807746	1.7807767	1.7807764	1.7807764	

a	b	r																
2	4	$\frac{2+\sqrt{6}}{2}$	數 列	0	1	2	$\frac{9}{2}$	10	$\frac{81}{4}$	$\frac{91}{2}$	$\frac{809}{8}$	225	$\frac{8009}{16}$	$\frac{8909}{8}$	$\frac{79281}{32}$	$\frac{44095}{8}$	$\frac{784801}{64}$	$\frac{872991}{32}$
r ≒	2.224744871		a_n / a_{n-1}		2	2.25	2.222222	2.025	2.246986	2.222527423	2.22496908	2.224722222	2.22474715	2.22474464	2.224744895	2.224744869	2.22474482	

a	b	r																
3	3	$\frac{3+\sqrt{21}}{6}$	數　列	0	1	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{19}{9}$	$\frac{24}{9}$	$\frac{91}{27}$	$\frac{115}{27}$	$\frac{436}{81}$	$\frac{551}{81}$	$\frac{2089}{243}$	$\frac{2640}{243}$	$\frac{10009}{729}$	$\frac{12649}{729}$
r ≒	1.263762616	a_n / a_{n-1}		1	1.3333333	1.25	1.26666667	1.26315789	1.26388889	1.263736264	1.263768116	1.263761468	1.263762855	1.26376255	1.263762626	1.263762614		

a	b	r															
3	4	$\frac{2+\sqrt{7}}{3}$	數　列	0	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{19}{9}$	$\frac{88}{27}$	$\frac{409}{81}$	$\frac{1900}{243}$	$\frac{8827}{729}$	$\frac{41008}{2187}$	$\frac{190513}{6561}$	$\frac{885076}{19683}$	$\frac{4111843}{59049}$	$\frac{19102600}{177147}$	$\frac{88745929}{531441}$
r ≒	1.54858377	a_n / a_{n-1}		1.3333333	1.5833333	1.5438596	1.5492424	1.5484923	1.5485965	1.5485820	1.5485840	1.5485838	1.5485838	1.5485838	1.5485838		

a	b	r															
3	5	$\frac{5+\sqrt{37}}{6}$	數　列	0	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{28}{9}$	$\frac{155}{27}$	$\frac{859}{81}$	$\frac{4760}{243}$	$\frac{26377}{729}$	$\frac{146165}{2187}$	$\frac{809956}{6561}$	$\frac{4488275}{19683}$	$\frac{24871243}{59049}$	$\frac{137821040}{177147}$	$\frac{763718929}{531441}$
r ≒	1.847127088	a_n / a_{n-1}		1.6666667	1.8666667	1.8452381	1.8473118	1.8471090	1.8471289	1.8471269	1.8471271	1.8471271	1.8471271	1.8471271	1.8471271		

a	b	r $\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2a}$	數　列	0	1	$\frac{b}{a}$	$\frac{a+b^2}{a^2}$	$\frac{ab+b(a+b^2)}{a^3}$	$\frac{a(a+b^2)+b[ab+b(a+b^2)]}{a^4}$	…………………………………………
（a、b是須滿足 $a<b+1$ 之正整數）		a_n / a_{n-1}	推測：$a_n / a_{n-1} \xrightarrow{\text{n越大時}} \frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2a}$							

且在 a ，b 爲正整數時有其幾何意義，它們的構圖有如黃金矩形般的美觀、協調、神奇、奧妙。

(四)每一比值 $r=\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2a}$ （ a ，b 爲正整數，$a<b+1$ ）都對應著一數列，此數列首項 $a_1=0$ ，第二項 $a_2=1$ ，$a_n=\frac{1}{a}\times a_{n-2}+\frac{b}{a}\times a_{n-1}$，而費氏數列只是此數列其中之 $a=1$ ，$b=1$ 的一種特列罷了！

(五)我們的研究是借助於掌上型計算器的計算，古代的數學老師前輩因爲尚未有此高科技的協助，無法作到小數後十位以上的艱辛運算，較不容易得到此新式數列的排列規則，我們的研究，驗證了許多新矩形與新數列的存在，把黃金矩形與費氏數列的性質，作了一般性的推廣。至於推測 $a_n/a_{n-1}\rightarrow\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2a}$ 的一般式嚴密數學證明，尚待專家們的指導。

評語

本作品能借助黃金分割及費氏數列之提示，推算出一新數列，而使費氏數列爲其特例，若能將應用部份加以推展則必爲最佳之作品。