多邊形形上點面積等分線探討

國中組數學科第三名

台北縣永和國民中學　　作　者：王秋富、林凱揚
指導教師：鄭再添

一、研究動機

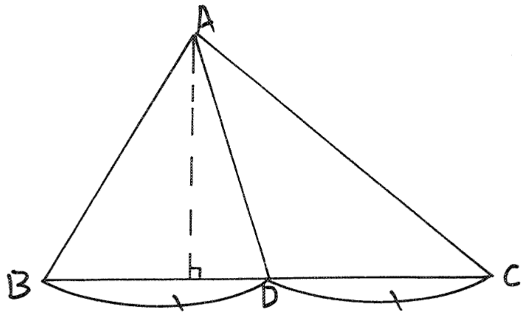
一年級下學期，老師在講授平行線尺規作圖的運用時，曾補充過三角形面積平分線的作法，數月前我們在科展優勝專輯裡看到〝多邊形面積平分研究〞作品內容時，對相關的作圖問題再度引起深入研究的興趣。本文是我們參考過有關作品後，在老師的指導下，對多邊形形上點面積等分線作圖所獲得幾點研究心得，敬請大家多多指教！

二、基本原理

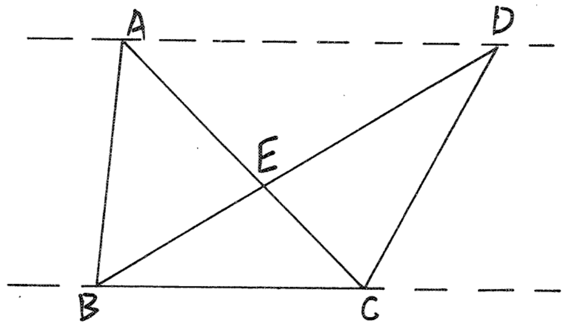
在本文中所利用的基本原理主要者有二：

㈠等底同高的兩三角形面積相等；
㈡等高同底的兩三角形面積相等。

由㈠極易得知：三角形的中線平分三角形面積。如圖㈠所示，若$\overline{BD}=\overline{CD}$，則$\triangle ABD=\triangle ACD$；由㈡則可得到，若$\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$，則$\triangle ABC=\triangle DBC$，如圖㈡所示。若進一步說，尚有$\triangle ABE=\triangle DCE$。



圖㈠



圖㈡

三、研究過程

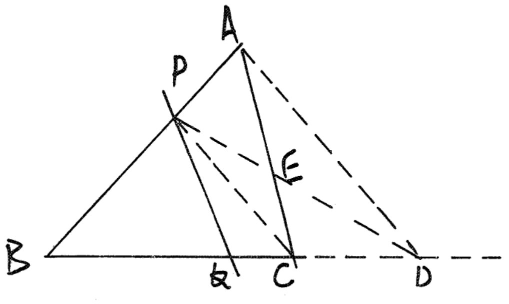
(一)面積平分線

1.三角形——過P作一直線平分△ABC，常見作法有兩種分述如下：

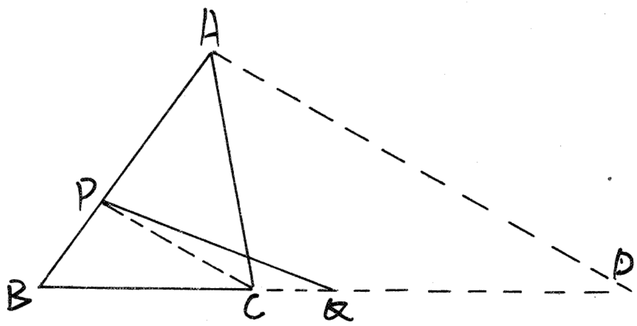
〔作法一〕參見圖(三)所示，設P在$\overline{AB}$上，則
1.連$\overline{PC}$，過A作$\overleftrightarrow{AD} \parallel \overline{PC}$交$\overleftrightarrow{BC}$於D；
2.取$\overline{BD}$中點Q，連$\overleftrightarrow{PQ}$，則$\overleftrightarrow{PQ}$平分△ABC。

說明：1.連輔助線$\overline{PD}$交$\overline{AC}$於E，則根據原理(二)知△APE＝△DEC故△ABC＝△PBD；
2.$\overline{PQ}$為△PBD中線，根據原理(一)知$\overleftrightarrow{PQ}$平分△PBD，亦平分△ABC。

討論：以上述作法作圖時，可能出現圖(四)的情形：Q點不在△ABC上，則$\overleftrightarrow{PQ}$無法平分△ABC。此時，我們可有兩種變通方式——



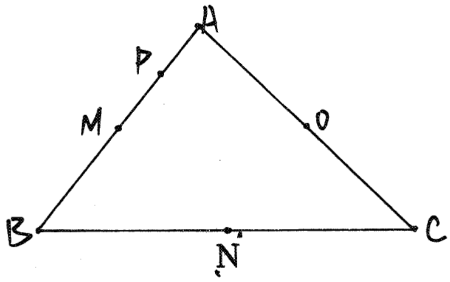
圖三



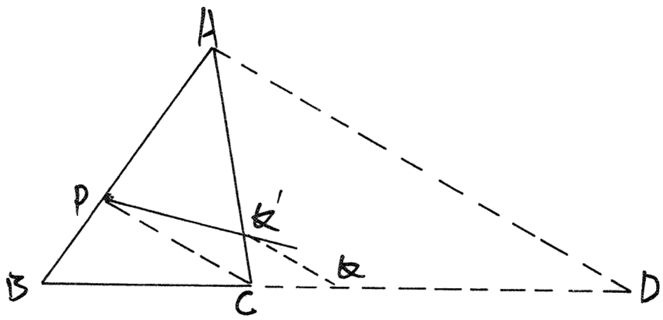
圖四

1.當P在$\overline{AB}$上，且$\overline{PA}>\overline{PB}$時，改作$\overleftrightarrow{BD} \parallel \overline{PC}$交$\overleftrightarrow{AC}$於D，則$\overline{AD}$的中點Q必在△ABC上，$\overleftrightarrow{PQ}$即為所求。事實上，若在作圖前先以三邊中點稍加判定，即可避免換邊再作的麻煩：如圖(五)，若P在$\overline{AM}$或$\overline{AO}$上，則需延長$\overline{BC}$；同理，若P在$\overline{BM}$或$\overline{BN}$上，則延長$\overleftrightarrow{AC}$；若P在$\overline{CN}$或$\overline{CO}$上，則延長$\overleftrightarrow{AB}$。

2.圖(四)中之$\overleftrightarrow{PQ}$雖不是△ABC的平分線，但並未前功盡棄；若再過Q作$\overline{PC}$的平行線與$\overline{AC}$交於Q′，則由原理(二)知△PCQ′＝△PCQ，故得$\overleftrightarrow{PQ}$平分△ABC，如圖(六)所示。



圖五

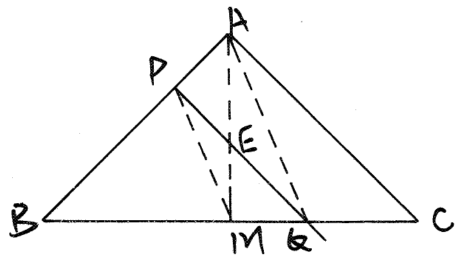


圖六

〔作法二〕參考圖(七)所示，設P在$\overline{AB}$上，則

1.取$\overline{BC}$中點M，連$\overline{AM}$，$\overline{PM}$；

2.過A作$\overline{AQ}$∥$\overline{PM}$交$\overline{BC}$於Q，連$\overleftrightarrow{PQ}$，則$\overleftrightarrow{PQ}$平分△ABC。



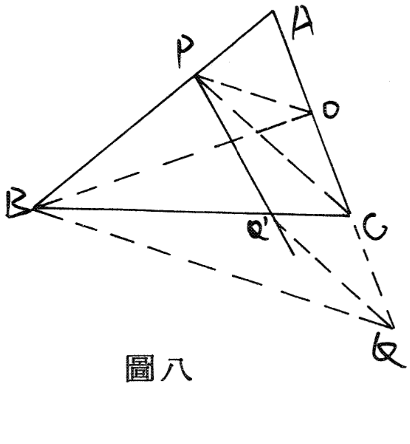
圖七

說明：1.由原理(一)知，$\overline{AM}$為中線，則△ABM＝△ACM；

2.由原理(二)知，$\overline{AQ}$∥$\overline{PM}$，則△AEP＝△EMQ，故$\overleftrightarrow{PQ}$平分△ABC。

討論：1.如圖(七)情形（P在$\overline{AB}$上，$\overline{PA}$＜$\overline{PB}$）時，可作中線$\overline{AM}$或$\overline{CN}$，再利用原理(二)作出面積平分線$\overleftrightarrow{PQ}$；但若作中線$\overline{BO}$時，則步驟2作圖將如圖(八)所示，與$\overleftrightarrow{AC}$交在△ABC外，此時$\overleftrightarrow{PQ}$已非所求。但若再使用上述之討論(2)方式求得$\overline{BC}$上之Q'點，則$\overline{PQ'}$可平分△ABC。

2.比較兩種作法之異同，其實都根據原理(一)及(二)而得。〔作法一〕先使用原理(二)再利用原理(一)，〔作法二〕則恰好相反。兩者間並無優劣可分，能視情況靈活運用基



圖八

本原理即是最佳作法。

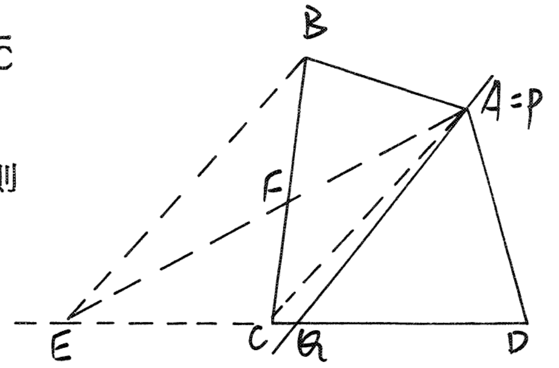
2.四邊形——在三角形中，有中線為面積平分線可以利用；在四邊形中，卻無所謂的〝中線〞存在，因此，我們的處理原則是：先將四邊形化為以P為頂點的等積三角形，再取對邊中點以平分之，以下我們由P為四邊形的某頂點情形開始討論：

(1) P在四邊形ABCD的頂點上（如圖(九)）

〔作法〕

1.連 $\overline{PC}$，過B作 $\overline{BE} /\!/ \overline{PC}$ 交 $\overleftrightarrow{CD}$ 於E；

2.取 $\overline{ED}$ 中點Q，連 $\overleftrightarrow{PQ}$，則 $\overleftrightarrow{PQ}$ 平分四邊形ABCD



圖(九)

說明：1.連輔助線 $\overline{PE}$ 交 $\overline{BC}$ 於F，則由原理(二)知△BFP＝△FEC，故得△PED＝四邊形ABCD；

2. $\overline{PQ}$ 為△PED中線，故 $\overleftrightarrow{PQ}$ 平分△PED；亦平分四邊形ABCD。

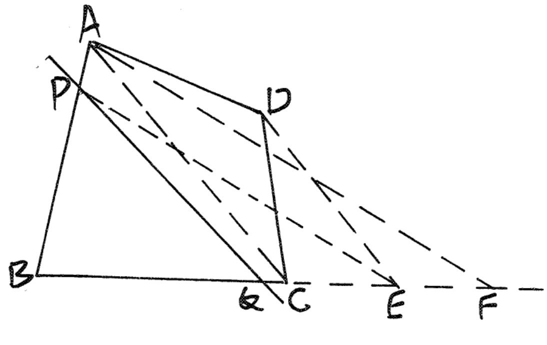
(2) P不在頂點上，如圖(十)所示，設P在 $\overline{AB}$ 上，則可延長 $\overline{BC}$ 為底線。

〔作法〕

1.連 $\overline{AC}$，過D作 $\overline{DE} /\!/ \overline{AC}$ 交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於E；

2.連 $\overline{PE}$，過A作 $\overline{AF} /\!/ \overline{PE}$ 交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於F；

3.取 $\overline{BF}$ 中點Q，連 $\overleftrightarrow{PQ}$，則 $\overleftrightarrow{PQ}$ 平方四邊形ABCD。



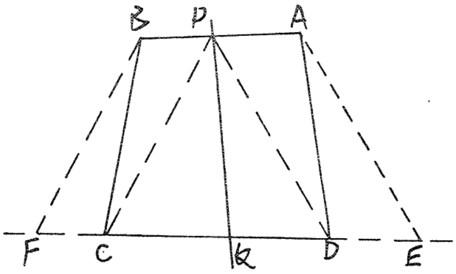
圖(十)

說明：1.第一步目的在於將四邊形ABCD化為等積△ABE；

2.第二步再進而將△ABE化為等積的△PBF，使P為頂點；

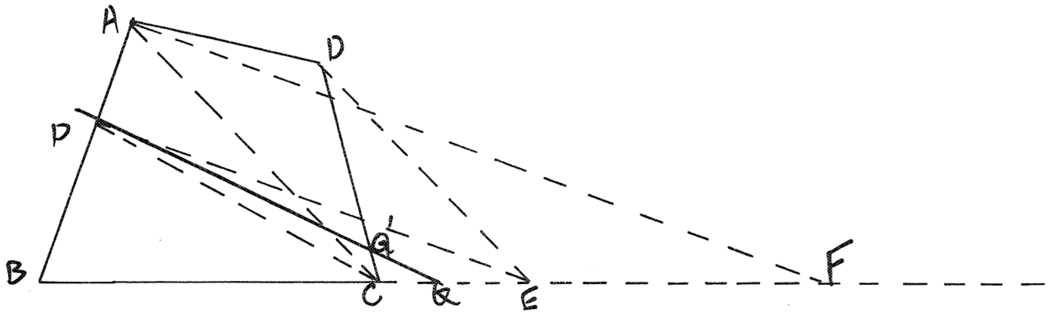
3.因$\overline{PQ}$為△PBF中線，且Q在$\overline{BC}$，故$\overleftrightarrow{PQ}$平分△PBF，亦平分四邊形ABCD。

討論：1.隨P點所在位置不同， $\overline{BC}$延長許多，作圖上有所不便有時可能須將$\overline{CD}$為底線，如圖(十一)所示，呈〝左右開弓〞架式，將ABCD化成以P為頂點的等積三角形。



圖(十一)

2.無論是以鄰邊或以對邊為底線作圖，都可能有Q不在四邊形上的情形發生。此時可仿三角形中之討論所提方式加以〝補救〞。參見圖(十二)所示：



圖(十二)

圖中$\overline{DE}$∥$\overline{AC}$，$\overline{AF}$∥$\overline{PE}$，Q為$\overline{BF}$中點，但$\overleftrightarrow{PQ}$非面積平分線。故再作$\overline{QQ'}$∥$\overline{PC}$交$\overleftrightarrow{CD}$於Q′，即$\overleftrightarrow{PQ}$可將四邊形$\overline{AB}$ $\overline{CD}$兩等分。設若Q′亦不在$\overline{CD}$上，即須再作$\overline{Q'Q''}$∥$\overline{PD}$。

3.有時使用一點直觀判斷可以省去不少麻煩：設P在$\overline{AB}$上，則觀察△PAD及PBC是否遠小於另一四邊形部分？果然，則Q點必在$\overline{CD}$上；反之，若△PAD大於四邊形ABCD面積的一半，則選擇$\overline{AD}$為底線，自可馬到成功，無須作拉回去的動作。

3.五邊形以上——由三角形到四邊形的探討過程裡，我們領悟到它的處理原則。再一次在五邊形上應驗後，即可推廣到一般N邊形形上點的面積平分線作法，提供一副原理簡明，動作一貫的系統性作法。以下是五邊形的例子：（如圖(十三)）

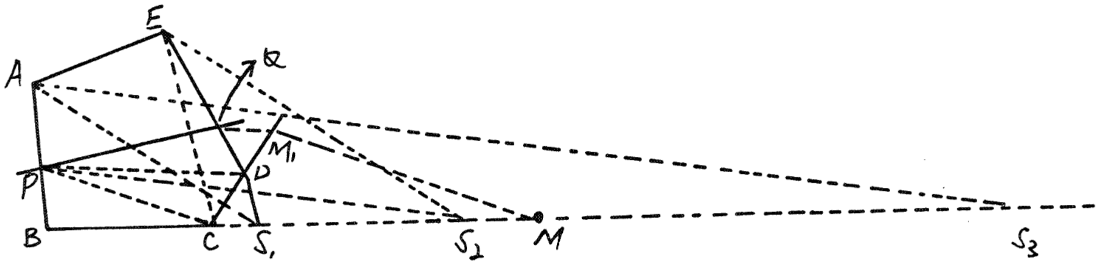
〔作法〕1.連$\overline{EC}$，過D作$\overline{DS_1}$∥$\overline{EC}$交$\overrightarrow{BC}$於S_1 ；

2.連$\overline{AS_1}$，過E作$\overline{ES_2}$∥$\overline{AS_1}$交$\overrightarrow{BC}$於S_2 ；

3.連$\overline{PS_2}$，過A作$\overline{AS_3}$∥$\overline{PS_2}$交$\overrightarrow{BC}$於S_3 ；

4.取 $\overline{BS_3}$ 中點M，過M作 $\overline{MM_1}$ ∥ $\overline{PC}$ 交 $\overleftrightarrow{CD}$ 於 M_1；

5.過 M_1 作 $\overline{M_1Q}$ ∥ $\overline{PD}$ 交 $\overline{DE}$ 於Q，連 $\overleftrightarrow{PQ}$，則 $\overleftrightarrow{PQ}$ 平分△P B S_3，亦平分五邊形A B C D E。



圖(十三)

說明：1.步驟一將A B C D E化為等積四邊形A B S_1 E；步驟二將A B S_1E化為等積三角形△A B S_2；步驟三將△A B S_2 化為△P B S_3；

2. $\overline{PM}$ 為△P B S_3 中線，但不能平分五邊形A B C D E；經過兩次拉回去的動作才得一Q在 $\overline{DE}$ 上，由於△P C M_1 =△P C M且△P D Q =△P D M_1，故知四邊形P C D Q =△P C M，即P B C D Q =△P B M $=\frac{1}{2}$△P B S_3 $=\frac{1}{2}$A B C D E。

討論：若使用上述四邊形中討論3所提方法先判定Q點將在 $\overline{DE}$ 上，再配合方式進行〝左右開弓〞作圖，將省去〝拉回去〞的動作，圖也會更簡單明瞭。但有時在作直觀判斷時，可能會有困難，尤其是邊數較多時。

4.一般N邊形

P為N邊形 A_1A_2 ………An上一點，設P在 $\overline{AnA_1}$ 上，我們將上述作法推廣，可以敘述如下：

〔作法〕

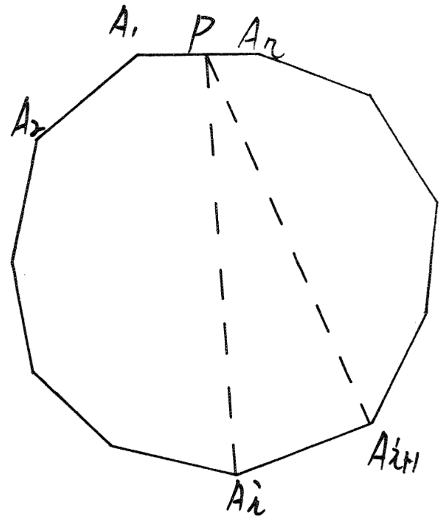
1.過 A_3 作 $\overline{A_3S_1}$ ∥ $\overline{A_4A_2}$ 於 S_1；過 A_4 作 $\overline{A_4S_2}$ ∥ $\overline{A_5S_1}$ 交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 於 S_2；

………過An作 $\overline{AnS_{n-2}}$ ∥ $\overline{PS_{n-3}}$ 交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 於 S_{n-2}。

2.取 $\overline{A_1S_{n-2}}$ 中點M，若M在 $\overline{A_1A_2}$ 上，則 $\overleftrightarrow{PM}$ 即為所求。否則，再作 $\overline{MM_1}$ ∥ $\overline{PA_2}$ 交 $\overline{A_2A_3}$ 於M；若 M_1 在 $\overline{A_2A_3}$ 上，則 $\overleftrightarrow{PM_1}$ 即為所求。否則重複上述步驟，直到某一 M^i 在 $\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$ 上為止。

連 $\overline{PM_i}$ ，則 $\overleftrightarrow{PM_i}$ 平分此多邊形。

我們使用P所在邊 $\overline{A_nA_1}$ 的鄰邊 $\overline{A_1A_2}$ 爲底線進行，是爲了將作圖原則便於表達出來，眞正在作圖時，可儘量先行直觀判定，即連 $\overline{PA_2}$ ，$\overline{PA_3}$ ………，對△ PA_1A_2 、四邊形 $PA_1A_2A_3$ ……的面積加以估測，是否已大於整個多邊形的一半？設若到某一 i 值，PA_1A_2 …… A_i 部分的面積小於整個多邊形的一半，而 PA_1A_2 …… PA_{i+1} 部分又可確知已大於整個面積的一半，則表示 M_i 點將落在 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 邊上。（參見圖㈬）若一開始便選它爲底線，進行〝左右開弓〞方式作圖，自可方便許多。



圖㈬

整個作法中，所運用的原理總不出貳中列兩點，呈現相當一致的系統與條理，讓我們有一種〝萬法不離其宗〞的感受。這種〝吾道一言以貫之〞的心得彷彿在告訴我們：已找到了問題的根源！處理的原則是淺而易見的，特將它列出以作爲㈠部分的結語：

(1)將多邊形化爲以P爲頂點的等積三角形，作中線平分之。

(2)作中線 $\overline{PM}$ 平分時，若M不在形上，則利用原理㈡作平行線，直至將它拉回至形上爲止。

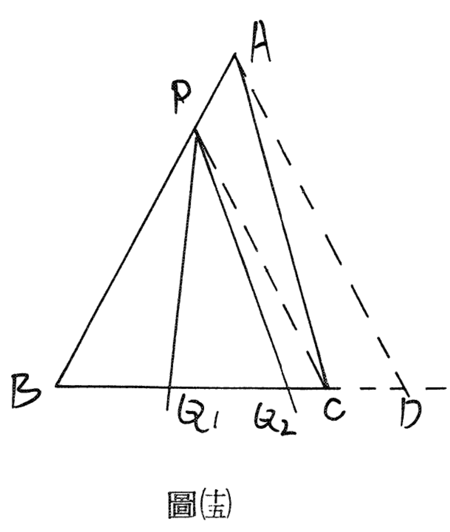
㈡任意等分線

1. N等分

先舉一三等分三角形面積的例子再加以說明，對一般多邊形形上點的N等分線作法自可一目瞭然：

〔已知〕P爲△ABC上一點(如圖㈤)

〔求作〕過P作 $\overline{PQ_1}$ ，$\overline{PQ_2}$ 將△ABC三等分



圖㈤

〔作法〕

1.連$\overline{PC}$，過A作$\overline{AD} \parallel \overline{PC}$交$\overleftrightarrow{BC}$於D；

2.在$\overline{BD}$上取$\overline{BQ_1} = \overline{Q_1Q_2} = \overline{QD}$；

3.連$\overline{PQ_1}$、$\overline{PQ_2}$即爲所求。

由上例即可看出，欲過一多邊形形上點P作N等分線的原則爲：

(1)將多邊形化成以P爲頂點的等積三角形；

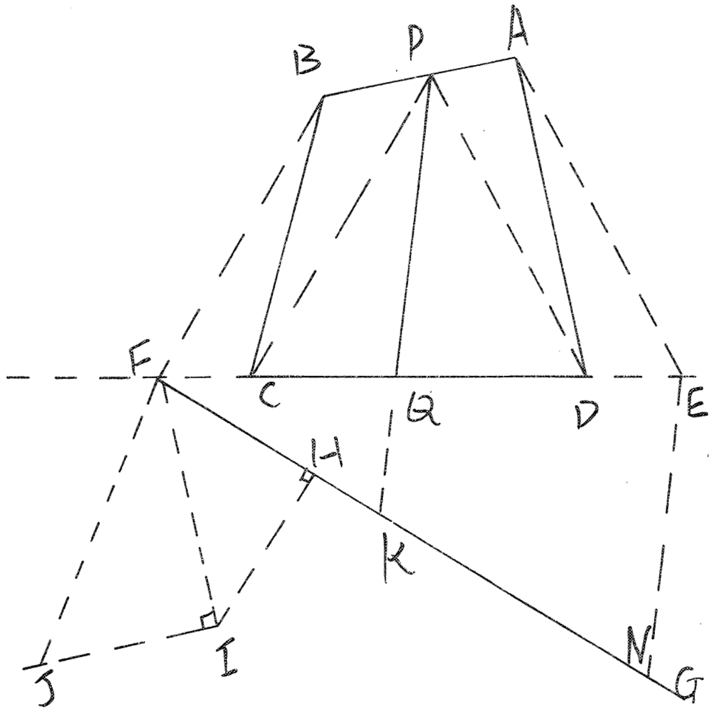
(2)利用〝平分線截等長〞原理等分P的對邊，再連接P與等分點Q_1……Q_{n-1}即可）

(3)若等分點Q_1、Q_2………Q_{n-1}中有不在形上的情形，可仿㈢部分利用原理㈡作平行線將之〝拉回〞到形上來。

2.任意等分

上述作法並不限於整數等分情形。只要是可以尺規作圖的，無理數也無妨。我們仍舉一例做個概括解釋：

〔已知〕P爲四邊形上一點（如圖㈥）



圖㈥

〔求作〕過P作$\overleftrightarrow{PQ}$將四邊形面積分割為$\sqrt{2}:\sqrt{3}$兩塊。

〔作法〕

1. 過A作$\overline{AE}\parallel\overline{PD}$交$\overleftrightarrow{CD}$於E，過B作$\overline{BF}\parallel\overline{PC}$交$\overleftrightarrow{CD}$於F；
2. 過F作$\overleftrightarrow{FG}$，利用商高定理作等腰直角△FHI得$\overline{FI}=\sqrt{2}\,\overline{FH}$，再作直角△FIJ得$\overline{FI}=\sqrt{3}\,\overline{FH}$在$\overleftrightarrow{FG}$上取$\overline{FK}=\overline{FI}$，$\overline{KN}=\overline{FJ}$；
3. 連$\overline{EN}$，作$\overline{KQ}\parallel\overline{EN}$交$\overline{CD}$於Q；
4. 連$\overleftrightarrow{PQ}$即為所求。

說明：1. 先將四邊形化為等積△PEF；

2. 利用商高定理作$\sqrt{2}$及$\sqrt{3}$單位長，再利用〝平行線截比例線段〞得$\overline{FQ}:\overline{QE}=\sqrt{2}:\sqrt{3}$；

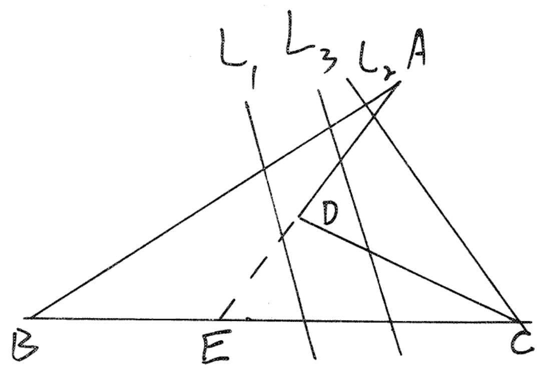
3. 因△PFQ與△PEQ為同高，故△PFQ：△PEQ＝$\overline{FQ}:\overline{QE}$，即（四邊形PBCQ）：（四邊形PQDA）$=\sqrt{2}:\sqrt{3}$

這個作法和上一作法原理相同，只是在取比例線段部分更一般化而已。對於更多邊形，或分割成更多塊情形的作圖都雷同。

㈢凹多邊形

1. 問題可解性——

直線與凹多邊形的相交情形是多樣化的。直線將它分割成三塊以上時，我們很難進行討論。如圖㈦所示，L_1、L_2、L_3與凹四邊形ABCD分別有2、3、4個交點；其中L_3更將它分割成三塊區域。因此，我們將類似於L_3的情形排除在討論範圍外。若圖㈦中△ABE＜△CDE，則將形如P點的面積平分線作圖問題視為無解。其它等分線情形類同。



圖㈦

2. 可解之作法——

我們的作法是可以推廣到凹多邊形的，從下面的例示中您不難看出它們仍遵守上述各項原則：

〔已知〕P為凹四邊形ABCD上一點（如圖㈧）

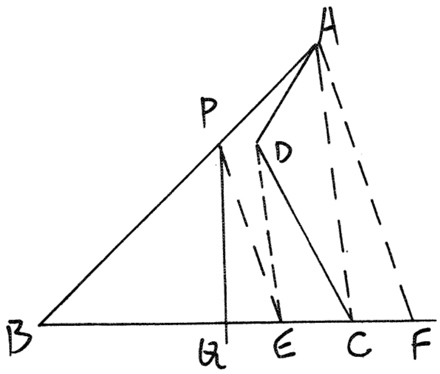
〔求作〕過P作一面積平分線$\overleftrightarrow{PQ}$。

〔作法〕

1.連$\overline{AC}$，過D作$\overline{DE}$∥$\overline{AC}$交$\overleftrightarrow{BC}$於E；

2.連$\overline{PE}$，過A作$\overline{AF}$∥$\overline{PE}$交$\overleftrightarrow{BC}$於F；

3.取$\overline{BF}$中點Q，連$\overleftrightarrow{PQ}$即爲所求。



圖(六)

說明：1.△ABE＝凹四邊形ABCD（∵$\overline{DE}$∥$\overline{AC}$）

2.△PBF＝△ABE（∵$\overline{AF}$∥$\overline{PE}$）

3.∴△PBQ＝$\frac{1}{2}$△PBF＝$\frac{1}{2}$△ABE＝$\frac{1}{2}$（凹四邊形ABCD)

討論：比較每一步驟的進行，竟與㈲部分二之(一)中作法完全相同，可見原理原則仍然適用。若P在$\overline{AD}$上，設$\overrightarrow{AD}$於$\overline{BC}$的交點爲G，因△ABG＜△DGC，則將無法作出$\overleftrightarrow{PQ}$平分凹四邊形ABCD。

〔已知〕P爲凹五邊形ABCDE上一點（如圖(九)）

〔求作〕$\overleftrightarrow{PQ_1}$、$\overleftrightarrow{PQ_2}$將ABCDE面積三等分。

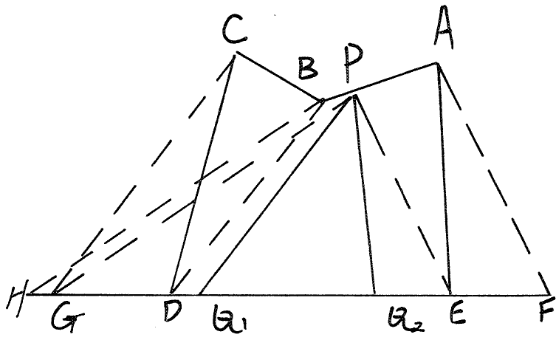
〔作法〕

1.連$\overline{PE}$，過A作$\overline{AF}$∥$\overline{PE}$交$\overleftrightarrow{DE}$於F；

2.連$\overline{BD}$，過C作$\overline{CG}$∥$\overline{BD}$交$\overleftrightarrow{DE}$於G；

3.連$\overline{PG}$；過B作$\overline{BH}$∥$\overline{PG}$交$\overleftrightarrow{DE}$於H；

4.取$\overline{HQ_1}$＝$\overline{Q_1Q_2}$＝$\overline{Q_2F}$，連$\overline{PQ_1}$，$\overline{PQ_2}$即爲所求。



圖(九)

說明：1△PFE=△PAE（∵$\overline{AF}$∥$\overline{PE}$）

△BGD=BCD（∵$\overline{CG}$∥$\overline{BD}$）⇒△PHF＝凹五邊形ABCDE。

△PHG=PBG（ $\overline{BH}$∥$\overline{PG}$）

2.△HQ_1P＝△Q_1Q_2P＝△Q_2FP⇒$PBCQ_1$＝△PQ_1Q_2＝

PQEA。

討論：這個例子顯示，凹多邊形面積平分線作圖亦可運用〝左右開弓〞方式進行，同殆地，若等分點不在形上時，仍可仿照前述方法加以〝拉回〞到形上。

四、結論

(一)過凸多邊形形上點作面積等分線恰有一解。根據〝二〞所述基本原理，先依圖(十四)方式略作直觀判定，選擇較佳底線，再按(甲)部分之原則進行作圖即可畫出。

(二)上述作法可推廣至任意等分及凹多邊形上。

五、參考資料

(一)三角形面積等分線

(二)多邊形面積平分研究

(三)N等分三角形面積研究

(四)三角形面積平分線探討

六、評語

本件作品，學生能由多邊形上一點求出等分面積線，進而推測至形內一點（一個區域）所能做等積線的個數，想法創新，相當不錯。