1° 的秘密

國中組數學科第二名

桃園縣凌雲國民中學

作　　者：林俊良

指導教師：陳淑婷、聶智慧

一、研究動機

延續去年 n 等分三角形問題，欲探索角度等分問題，於是對量角器上的 1° 產生興趣。

二、研究目的

欲利用數學尺規作圖方法畫出 1°，探索 n 等分角度問題。

三、研究過程

㈠ 15° 篇：

在國中已學過下列三種尺規作圖方法：

1.平角、90°、60°……等特殊角度作法。

2.角平分線法。

3.角度加、減法。

利用以上三種方法，所能尋得的最小整數角度是 15°，這離我們的目標 1°，還有很大距離。

㈡ 3° 篇

我們以正 n 邊形，邊角關係來幫助我們思考角度問題。

1.正△：屬 60° 系列、不予討論。

2.正方形：屬 90° 系列，已無問題。

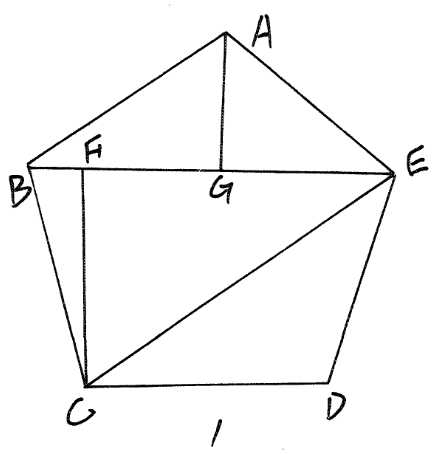
3.正五邊形：外角 72°、內角 108°，我們對這兩個角度產生興趣。

$\because 72^\circ \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 36^\circ \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 18^\circ \xrightarrow[15^\circ]{} 3^\circ$

$\because 108^\circ \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 54^\circ \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 27^\circ \xrightarrow[30^\circ]{} 3^\circ$

換言之，只要能利用尺規作圖畫出五邊形，也就尋得 3°。

〔正五邊形討論篇〕



設ABCDE爲正五邊形，令邊長爲1單位長：

①連各線段如左圖，其中$\overline{AG}\perp\overline{BE}$，$\overline{CF}\perp\overline{BE}$

②設$\overline{BG}=x$，則$AG=\sqrt{1-x^2}$，$\overline{CE}=2x$　（$\overline{CE}=\overline{BE}$）

$\overline{EF}=x+\frac{1}{2}$（利用BC DE爲等腰梯形）

③$\because\triangle ABG\sim\triangle CEF$

$\therefore\overline{AB}:\overline{BG}=\overline{CE}:\overline{EF}$

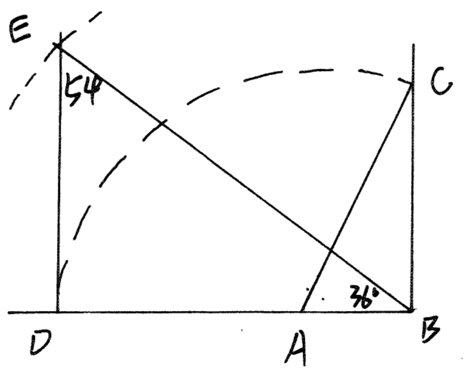
即 $1:x=2x:(x+\frac{1}{2})$

則 $2x^2=x+\frac{1}{2}\Rightarrow 4x^2-2x-1=0$

$\therefore x=(1+\sqrt{5}/4$〔$(1-\sqrt{5})/4$不合〕)

換言之，我們的問題簡化成利用尺規作圖，畫出（$1+\sqrt{5}$）/ 4 之比例。

〔（$1+\sqrt{5}$）/ 4比例作圖篇〕：



①如左圖，A、B、D共線，B C C′共線，且$\overline{BC}=2\overline{AB}$，$\overline{BC}\perp\overline{AB}$，$\overline{AD}=\overline{AC}$

②$\overline{DE}\perp\overline{AD}$，$\overline{BE}=4\overline{AB}$

③則△EDB爲36°—54°—90°之直角△。

㈢ 1° 篇：

1.正六邊形→屬於60°系列，已無問題。

2.正七邊形→非整數角度，不予討論。

3.正八邊形→屬於45°系列，已無問題。

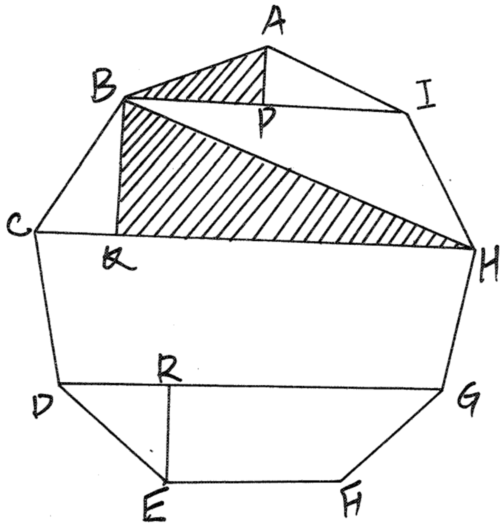
4.正九邊形→外角＝40°，內角＝140°適於討論。

$\because\ 40^\circ \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 20^\circ \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 10^\circ \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 5^\circ \xrightarrow[3^\circ]{} 2^\circ \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 1^\circ$

$\because\ 140^\circ \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 70^\circ \xrightarrow[60^\circ]{} 10^\circ \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 5^\circ \xrightarrow[3^\circ]{} 2^\circ \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 1^\circ$

換言之，九邊形的邊角關係，包藏著 1° 的秘密。

〔正九邊形討論篇〕：



①設 A B C D E F G H I 爲正九邊形（左圖），邊長爲 1 單位長。

②設 $\overline{BP} = x$，則 $\overline{IP} = x$

（$\overline{AP} \perp \overline{BI}$）

$\because \angle ABP = 20^\circ \quad \therefore \cos 20^\circ = x$

③△ B C Q 中，（$\overline{BQ} \perp \overline{CH}$）

$\because \angle BCQ = 60^\circ \quad \therefore \overline{CQ} = \frac{1}{2}$

則 $\overline{QH} = 2x + \frac{1}{2}$（BCHI爲等腰梯形）

④$\overline{ER} \perp \overline{DG} \quad \because \angle RDE = 40^\circ$

（$\cos 2\theta = 2\cos 2\theta - 1$）

$\therefore \overline{DR} = 2x^2 - 1$

$\therefore \overline{DG} = 4x^2 - 1$　　（$\because$ D E F G 爲等腰梯形）

則 $\overline{BH} = \overline{DG} = 4x^2 - 1$（等圓中等弧↔等弦）

⑤$\triangle ABP \sim \triangle BHQ$（A A）

$\therefore \overline{AB} : \overline{BP} = \overline{BH} : \overline{HQ}$

$\therefore 1 : x = (4x^2 - 1) : (2x + \frac{1}{2})$

$\Rightarrow 8x^3 - 6x - 1 = 0$

〔$8x^3 - 6x - 1 = 0$ 之根討論篇〕：

$\because 8x^3 - 6x - 1 = 0$

$\Rightarrow (2x)^3 - 3(2x) - 1 = 0$　（令 $X = 2x$）

$\therefore x^3 - 3x - 1 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots$(A)

設(A)式之解爲 x_1、x_2、x_3；利用根與係數關係可知下列關係式：

$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \cdots\cdots\cdots$(B)

ㄅ、證(A)無〝有理根〞

設(A)式有一〝有理根〞$\frac{q}{P}$，其中（P、q）= 1 且 P、q ∈ Z

代入(A)式得

$(\frac{q}{P})^3 - 3(\frac{q}{P}) - 1 = 0$

則 $q^3/P^2 = 3q + P$　或　$q^2 - 3P^2 = P^3/q$

利用恒等式左右相等，可知等式左、右應同爲整數，換言之，P、q 必須爲 1 或 -1，則(A)式必有一根爲 1 or -1，但是將 ± 1 代入(A)均不合，故矛盾。所以(A)無〝有理根〞

ㄆ、證(A)式無〝可作圖之根〞

設(A)式有根型如 $A+B\sqrt{C}$，其中 A、B 表級次低於 $\sqrt{C}$ 的可作圖數，將 $A+B\sqrt{C}$ 代入(A)式可得

$(A+B\sqrt{C})^3-3(A+B\sqrt{C})-1=0$　展開即

$(A^3+3AB^2C-3A-1)+(3A^2B+B^3C-3B)\sqrt{C}=0$

∵級次問題，可知上式中兩括號內之量皆等於 0。但若將 $A-B\sqrt{C}$ 代入(A)式中，展開後所得之式爲 $(A^3+3AB^2C-3A-1)-(3A^2B+B^3C-3B)\sqrt{C}=0$ 亦成立。即 $A-B\sqrt{C}$ 必同時爲(A)式之解。我們由此發現共軛根之關係。

將 $A+B\sqrt{C}$ 與 $A-B\sqrt{C}$ 代入(B)式中　可知

$\because x_1+(A+B\sqrt{C})+(A-B\sqrt{C})=0$

$\therefore x_1=-2A$

故　(A)式必有另一可作圖根 $-2A$，且級次較 $\sqrt{C}$ 爲低。因爲 $-2A$ 表可作圖數，故亦可用 $L+M\sqrt{N}$ 表示之，（其中 L、M、N 爲可作圖數，且 L、M 級次低於 $\sqrt{N}$，$\sqrt{N}$ 級次低於 $\sqrt{C}$）將 $L+M\sqrt{N}$ 代入(A)式，可發現(A)式必有另一根 $-2L$，級次又再降低，如此反覆討論下去，因爲 $A+B\sqrt{C}$ 級次有限，所以必可推論出(A)式有〝有理根〞存在，但是在ㄅ，我們已證出(A)無〝有理根〞，故矛盾，則(A)式亦無〝可作圖〞之根。

綜合上述推導結果，我們可知 1° 的尺規作圖是不可能的。

〔尺規作圖討論篇〕

我們必須思考的是，在實數系中，哪些數是可以尺規作圖得到，哪些數是不能作圖得到的。

ㄅ、尺規代數、幾何特性：

	代　　數	幾　何
尺	二元一次方程式	直　線
規	二元二次方程式	圓

ㄆ、利用尺規，在數線上最基本作圖是取定單位長。其它數表示與單位長之比例。

ㄇ、尺與尺：

$$\begin{cases} a_1x+b_1Y=C_1 \\ a_2x+b_2Y=C_2 \end{cases}$$

其交點（解），必為 a_1、a_2、b_1、b_2、c_1、c_2 之加、減、乘、除運算。

ㄈ、尺與規（規與規）

$$\begin{cases} a_1x+b_1Y=C_1 \\ (x-x_1)^2+(Y-Y_1)^2=r_1^2 \end{cases}$$

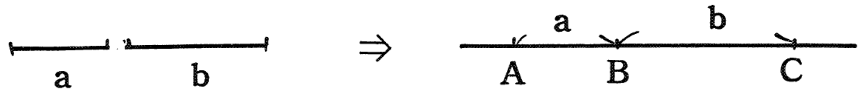
（規與規之討論可看成公弦與圓之情形）

利用代入消可法，可得到一元二次方程式，其交點（解）必為係數之加、減、乘、除與開平方根。

綜合ㄇ、ㄈ之討論，我們且大膽推斷實數系中，並非所有數，可藉尺規作圖比例求得，且只有＋、－、×、÷$\sqrt{\ }$五種運算可以作圖，（必須有限次數）

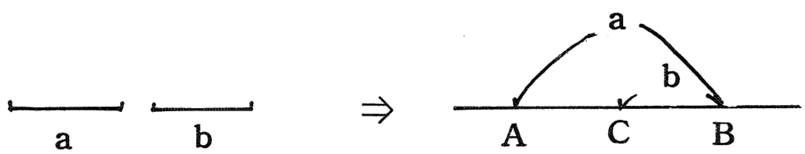
ㄉ、尺規之＋、－、×、÷$\sqrt{\ }$篇

(ㄅ) 加法篇：



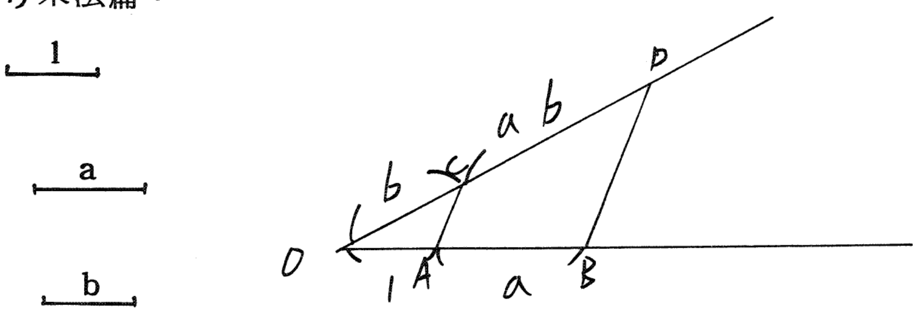
$(a+b)$

(ㄆ) 減法篇：



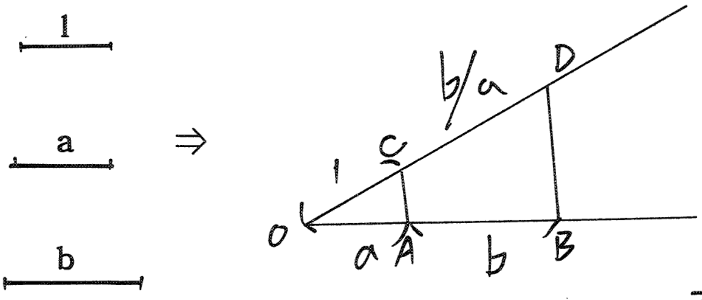
$\overline{AC}=a-b$

(ㄇ) 乘法篇：



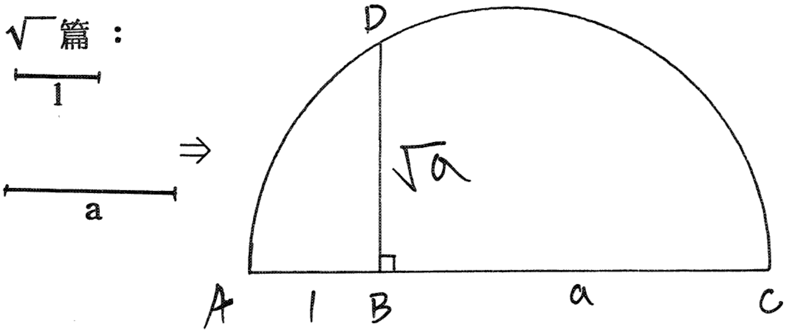
$\overline{AC}\parallel\overline{BD}$　$\overline{CD}=a\times b$

(ㄷ) 除法篇：



$\overline{AC} /\!/ \overline{BD}$　$\overline{CD} = b \div a$

(ㄉ) $\sqrt{\ }$ 篇：



$\overline{BD} \perp \overline{AC}$

半圓中　$\overline{BD} = \sqrt{a}$

四、結論

(一)我們發現量角器上的 1° 無法經由數學方法取得。換言之，我們認爲當初在刻劃量角器時 1° 只是近似值。故我們日常生活中，熟用的度量單位並非精準，實在令人覺得奇怪。

(二)因爲 3° 可藉尺規作圖求得，而 1° 却不能，所以我們認爲並非所有角度皆可任意等分。

(三)在方程式討論中，我們發現共軛根關係。

(四)在尺規作圖討論中，我們發現只能做出有限次的＋、－、×、÷ $\sqrt{\ }$ 關係。

五、參考資料

(一)高中數學課本（三角函數）

(二)國中數學課本（比例、尺規作圖）

(三)徐道寧先生著—〝三等分角問題〞

評語

本件作品，學生對於尺規作圖的觀念非常清楚，從企圖利用尺規作圖做出1°，而結果發現不可能，退而求出 3°，是非常難能可貴。