尋找多邊形重心

國中組數學科第一名

桃園縣立文昌國民中學

作　　者：王哲麒、翁士傑

指導教師：顏芳男、王美惠

一、研究動機

在國中數學選修上册，我們學到三角形的重心。我們不禁想問：「平面的圖形在物理學上並無相對的重量存在，何以會有重心呢？」但仔細想想在日常生活中我們所能接觸到的事物都不是學理上的〝理想平面〞，也就是說，這些事物都有厚度；再換句話說，我們可以見到許多的多邊形體，那麼這些物體就有重心囉！如果我們要找的是一個厚度均勻的物體的重心，必須先從面積著手，所以只要我們能找到多邊形的〝重心〞，那麼要找多邊形體的重心就不困難了。

二、研究目的

我們希望找到簡潔而且有系統的方法，可藉此而利用圓規、直尺作出任意凸多邊形的重心。

三、研究設備器材

(一)尺

(二)圓規

(三)厚度均勻的壓克力板

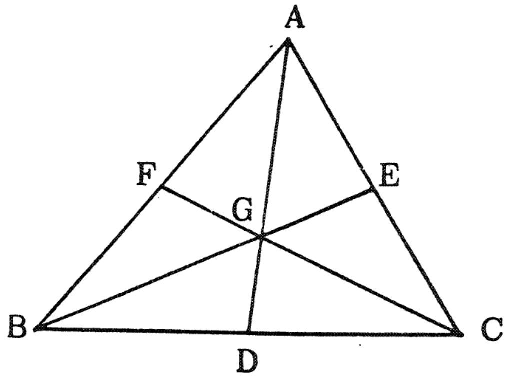
四、研究過程與方法

(一)預備知識

1.三角形的重心：三角形中三中線之交點G稱爲該三角形之重心。（如圖一）

性質a：$\overline{AD}:\overline{GD}=\overline{BE}:\overline{GE}=\overline{CF}:\overline{GF}=3:1$

2.槓桿原理：如圖二，G爲支點則$F_1 \cdot L_1 = F_2 \cdot L_2$



圖一

性質b：由$F_1 \cdot F_1 = F_2 \cdot L_2 \Rightarrow F_1 \cdot \overline{AG} = F_2 \cdot \overline{BG} \Rightarrow \overline{AG} : \overline{BG} = F_2 : F_1$

3.如圖三：在$\overline{AB}$上若$\overline{AC} = \overline{BD}$則$\overline{BC} = \overline{AB} - \overline{AC} = \overline{AB} - \overline{BD} = \overline{AD}$

性質C：$\overline{BD} : \overline{AD} = \overline{AC} : \overline{BC}$

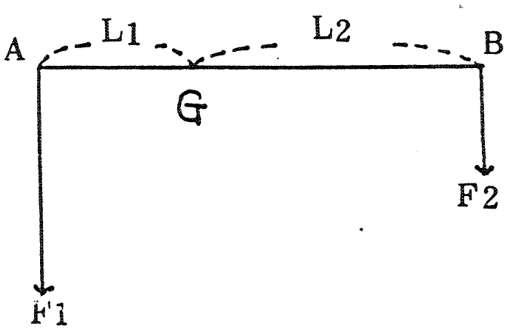


圖　二

圖三

4.相似形：如圖四

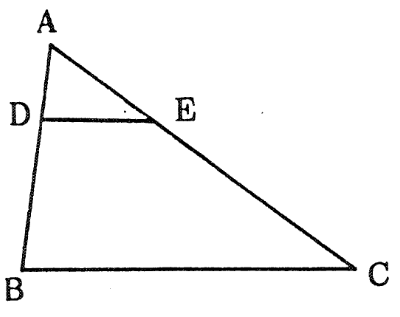
性質d：$\overline{DE} /\!/ \overline{BC} \Leftrightarrow \overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$

性質e：$\overline{DE} /\!/ \overline{BC} \Leftrightarrow \overline{AD} : \overline{AB} = \overline{DE} : \overline{BC} = \overline{AE} : \overline{AC}$

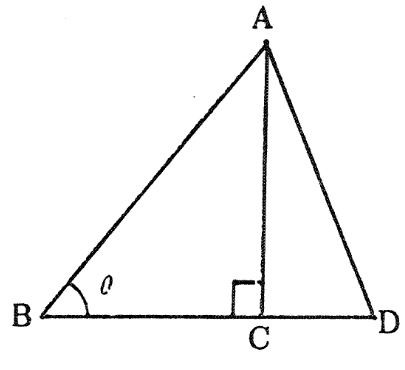
5.三角函數：在$\triangle ABC$中若$\angle ACB = 90$度，令$\theta = \angle B$

定義：$\mathrm{Sin}\,\theta = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \mathrm{Sin}\theta$（如圖五）

性質f：$\triangle ABD$面積$= \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AB} \cdot \mathrm{Sin}\,\theta$



圖四



圖五

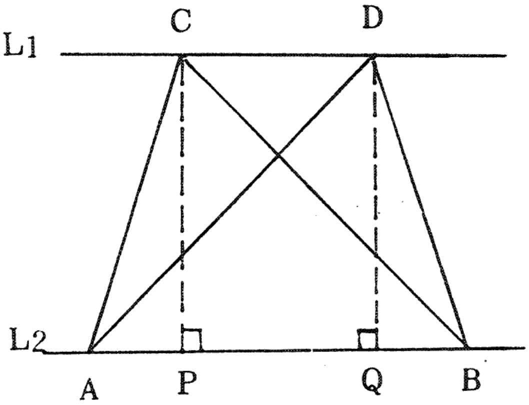
6.性質g：同底等高的兩三角形面積相等如圖六：$L_1 /\!/ L_2$　$\therefore \overline{CP} = \overline{DQ}$

$a\triangle ABC = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CP} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{DQ} = a\triangle ABD$

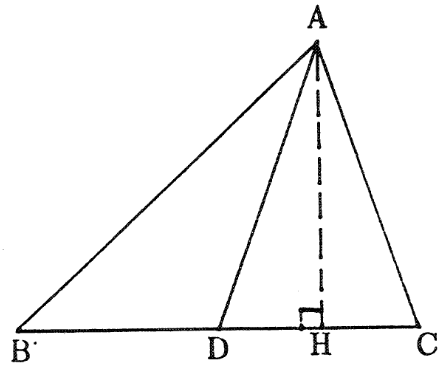
7.性質h：等底同高的兩三角形面積相等

如圖七：D爲$\overline{BC}$中點，$\overline{AH} \perp \overline{BC}$　$\because$ D爲BC中點　$\therefore \overline{BD} = \overline{CD}$

$a\triangle ABD = \frac{1}{2}\overline{BD} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{CD} \cdot \overline{AH} = a\triangle ADC$



圖六



圖七

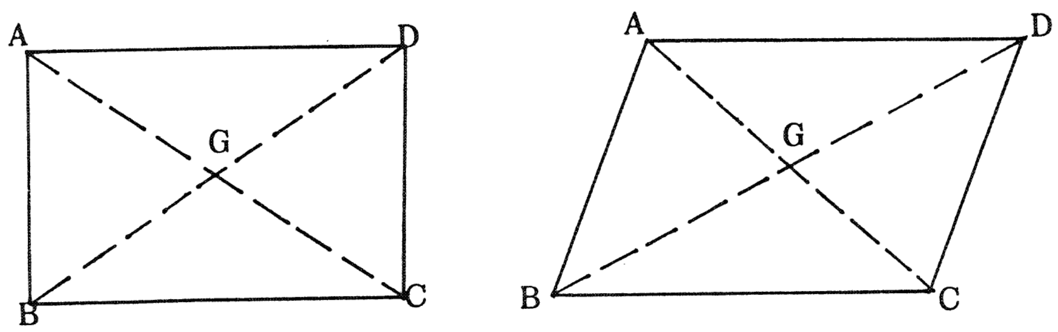
(二)多邊形的重心

A：以物理學的觀點來說，重心是一個物體重量的均衡點，倘若此物體是一個厚度均勻的多邊形體，如果厚度→ 0，則可以得到一〝理想平面〞，而且重心就落在此平面的面積平分線上，只要找出兩條面積平分線，其交點即為所求。上面這個推論可以在三角形上得到印證，因為三角形三中線之交點即是重心，而且每一中線都是此一三角形的面積平分線（見性質 h ）。

而我們所要探討的多邊形重心就從四邊形著手，當然我們最先想到的方法就是找尋面積的平分線。

1.長方形或平行四邊形的重心

見圖八：∵對角線 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 皆為面積平分線∴ $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 之交點 G 即為四邊形 A B C D 之重心。



圖八

2.不規則凸四邊形的重心

當我們遇到不規則的凸四邊形時，我們該如何取面積平分線呢？如果我們能夠成功地將四邊形轉化為面積相等的三角形，則面積平分線只要連

接頂點與對邊中點即可得到，於是我們找到了下面的方法。

作法：（見圖九）

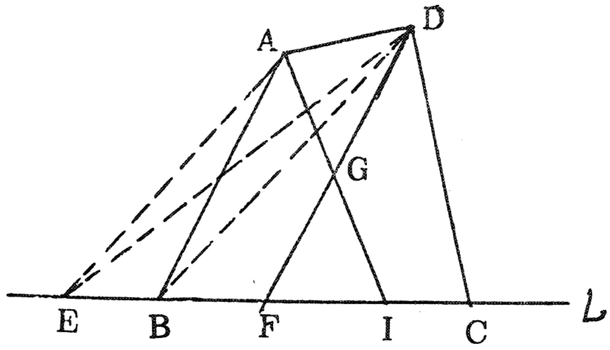
(1)連$\overline{DB}$

(2)作$\overline{AE}$∥$\overline{DB}$交L於E

(3)連$\overline{DE}$

(4)取$\overline{CE}$中點F

(5)連$\overline{DF}$，$\overline{DF}$即爲四邊形ABCD之面積平分線＃



圖九

證明：

∵$\overline{AE}$∥$\overline{DB}$　By 性質g ∴ a△ADB＝a△EBD

a四邊形ABCD＝a△DBC＋a△ADB＝a△DBC＋a△EBD

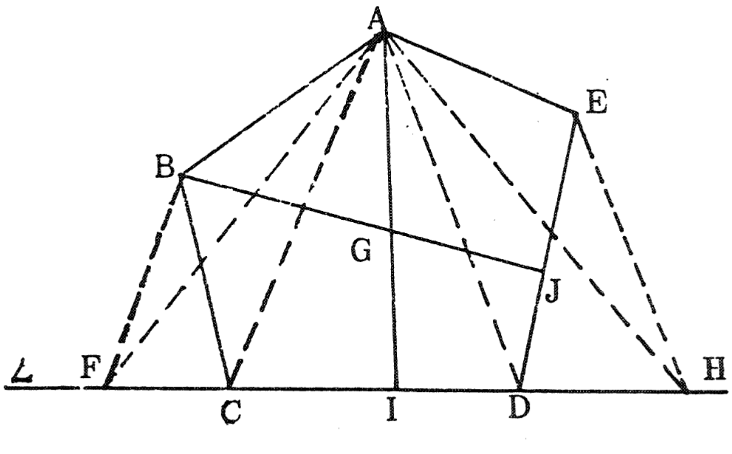
＝a△DEC

∵F爲$\overline{CE}$中點　∴$\overline{DF}$平分△$\overline{DE}$C（By 性質h）即$\overline{DF}$爲四邊形ABCD之面積平分線。

所以我們要找四邊形ABCD的重心，只要再依上述的方法再作一條面積平分線$\overline{AI}$（見圖九），則$\overline{AI}$與$\overline{DF}$之交點G即爲四邊形ABCD之重心。

3.不規則凸五邊形的重心

作法：（見圖十）



圖十

(1)連$\overline{AC}$、$\overline{AD}$

(2)作$\overline{BF}$∥$\overline{AC}$；$\overline{EH}$∥$\overline{AD}$分別交L於F、H

(3)連$\overline{AF}$、$\overline{AH}$；取$\overline{FH}$中點I

(4)連$\overline{AI}$

(5)同法可得$\overline{BJ}$

(6)得$\overline{AI}$與$\overline{BJ}$之交點G，即爲所求#

證明：

$\because \overline{BF} /\!/ \overline{AC}$，$\overline{EH} /\!/ \overline{AD}$

by 性質g　a△ABC＝a△ACF＆a△AED＝a△ADH

∴ a五邊形ABCDE＝a△ABC＋a△ACD＋a△AED

＝a△ACF＋a△ACD＋a△ADH＝a△AFH

又∵ I 爲$\overline{FH}$中點　by 性質h　　a△AFI＝a△AHI

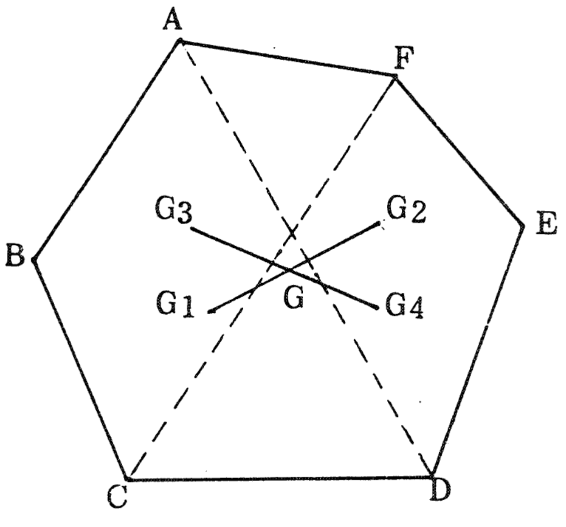
∴$\overline{AI}$爲五邊形ABCDE之面積平分線

同理$\overline{BJ}$亦爲五邊形ABCDE之面積平分線

∴$\overline{AI}$與$\overline{BJ}$之交點G即爲五邊形ABCDE之重心。#

4.可是這個方法在面臨六邊形或更多邊形時，要找到面積平分線不容易。經過反覆的思考，我們發現可以從兩個方向來處理：（以六邊形爲例）

(1)分別找出四邊形ABCD、AFED、ABCF、CDEF之重心G_1、G_2、G_3、G_4，則重心即在$\overline{G_1G_2}$與$\overline{G_3G_4}$之交點G。（如圖十一）



圖十一

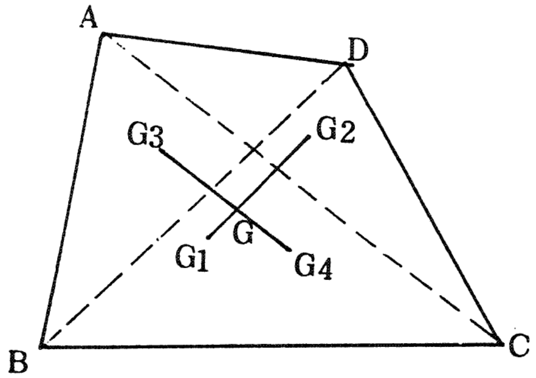
(2)只求四邊形ABCD、AFED之重心G_1、G_2則重心必落在$\overline{G_1G_2}$上，利用槓桿原理，可以推得重心G所在位置有下列之關係：（見圖十一）$\overline{GG_1}:\overline{GG_2}$＝a四邊形AFED：a四邊形ABCD

(3)爲了找尋較有系統的方法，我們依照上述兩個方向再回到四邊形作討論，分別在B、C兩部分討論。

B：重心在多邊形部分重心連線之交點上

在(二)、A、4、(1)中，我們已簡略地說明這一部分所要討論的方向。而在物理學上倘若我們將一多邊形S分成S_1、S_2兩部分則分別存在S_1、S_2之重心G_1、G_2，則S之重心在G_1與G_2之連線段上，依此法再將多邊形S分成S_3、S_4兩部分，同理S之重心亦落在S_3、S_4之重心G_3、G_4的連線段上，則$\overline{G_1G_2}$與$\overline{G_3G_4}$之亦點即爲S之重心G。

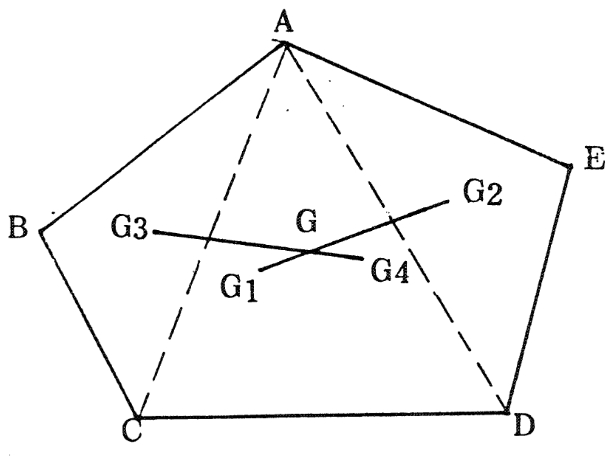
1.四邊形：（見圖十二）



圖十二

若G_1、G_2、G_3、G_4分別爲△ABC、△ADC、△ABD、△BCD之重心，則$\overline{G_1G_2}$與$\overline{G_3G_4}$之交點G即爲此四邊形ABCD之重心。

2.五邊形：（見圖十三）



圖十三

若G_1、G_2、G_3、G_4分別是四邊形ABCD、△ADE、△ABC、四邊形ACDE之重心，則$\overline{G_1G_2}$與$\overline{G_3G_4}$之交點G即爲此五邊形ABCDE之重心。

3.六邊形的重心已在前面提過，依此方法我們獲得初步的結論：

欲尋求一多邊形S之重心，如果S超過五邊形，我們不容易利用面積平

分線求重心，但可以先將S分成S1、S2兩部分而找到一組部分重心之連線段$\overline{G_1G_2}$，再將S分成另外之S3、S4兩部分而找到另一部分重心之連線段$\overline{G_3G_4}$，則S之重心即落在$\overline{G_1G_2}$與$\overline{G_3G_4}$之交點上。

4.這個方法雖然可以彌補邊數太多而難以作出面積平分線的缺點，但所要找的部分重心太多，所以並不太理想，所以再從另一個方向來討論。

C：在(一)、A、4、(2)中我們已說明了這一部分所欲討論的方向，現在我們再回到四邊形來討論：

1.四邊形（見圖十四）

(1)若G_1、G_2分別為△ABC與△ADC之重心，則四邊形ABCD之重心必在$\overline{G_1G_2}$上，利用物理學的槓桿原理，G的所在位置必有下列關係：

$$\overline{G_1G} : \overline{G_2G} = a\triangle ADC : a\triangle ABC$$

Now $a\triangle ADC = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{OD}\cdot\sin\theta$
$a\triangle ABC = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{OB}\cdot\sin\theta$ （By性質 f ）

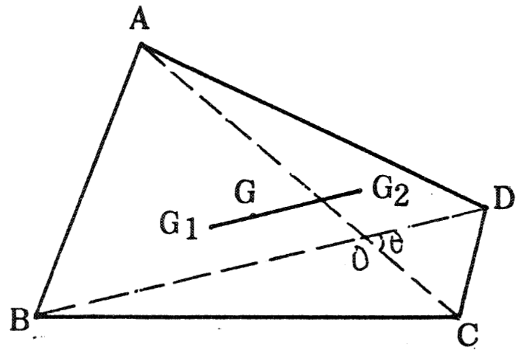
$\therefore a\triangle ADC : a\triangle ABC$

$=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{OD}\cdot\sin\theta : \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{OB}\cdot\sin\theta = \overline{OD} : \overline{OB}$

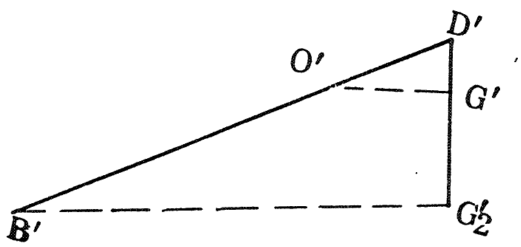
即$\overline{G_1G} : \overline{G_2G} = \overline{OD} : \overline{OB}$

∴我們希望將$\overline{G_1G_2}$分為$\overline{G_1G} : \overline{G_2G} = \overline{OD} : \overline{OB}$於是我們找到了下面的方法：

作法：（見圖十四、十五）



圖十四



圖十五

①作△ABC與△ADC之重心G_1、G_2，連$\overline{G_1G_2}$

②連對角線$\overline{AC}$、$\overline{BD}$交於O；$\theta=\angle AOB=\angle COD$

③作$\overline{D'B'}=\overline{DB}$，且在$\overline{D'B'}$上取一點$O'$使得$\overline{D'O'}=\overline{DO}$

④作$\overline{D'D'_2}=\overline{G_1G_2}$

⑤連$\overline{B'G_2'}$

⑥過O'作$\overline{O'G'} \parallel \overline{B'G_2'}$交$\overline{D'G_2'}$於$G'$

⑦以G_1為圓心，$\overline{D'G'}$為半徑，畫弧交$\overline{G_1G_2}$於G，G即為所求#

證明：$\because \overline{O'G'} \parallel \overline{B'G_2'}$ $\therefore \overline{D'O'} : \overline{O'B'} = \overline{D'G'} : \overline{G'G_2'}$ …… (a)

又$\because \overline{G_1G_2} = \overline{D'G_2'}$、$\overline{G_1G} = \overline{D'G'}$ $\therefore \overline{GG_2} = \overline{G'G_2'}$ …… (b)

$\overline{DB} = \overline{D'B'}$、$\overline{DO} = \overline{D'O'}$ $\therefore \overline{OB} = \overline{O'B'}$ ……… (c)

by (a)(b)(c) $\overline{G_1G} : \overline{G_2G} = \overline{D'G'} : \overline{G'G_2'} = \overline{D'O'} : \overline{O'B'} = \overline{DO} : \overline{OB}$

………… (※)

(2)承(1) & by 性質C（見圖三、十四、十六）

在△XBD中，若取O_1使得

$\overline{BO_1} = \overline{DO}$

by 性質C $\overline{BO_1} : \overline{O_1D} = \overline{DO} : \overline{OB}$

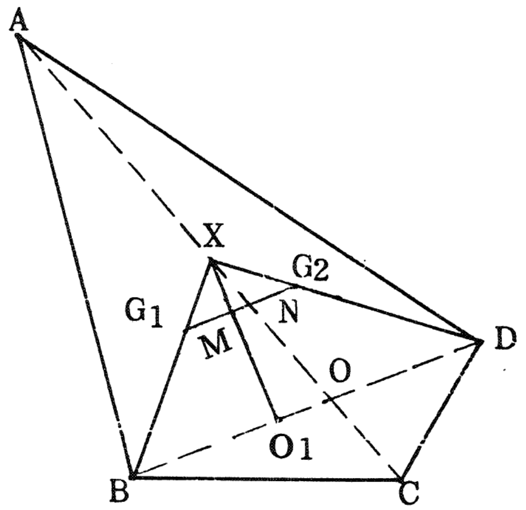
連$\overline{XO_1}$交$\overline{G_1G_2}$於M，$\overline{AC}$交$\overline{G_1G_2}$於N

$\because G_1$、G_2分別為△ABC及△ADC之重心

$\therefore$ by 性質 a

$\overline{XG_1} : \overline{XB} = 1 : 3 = \overline{XG_2} : \overline{XD}$

by 性質 e $\therefore \overline{G_1G_2} \parallel \overline{BD}$



圖十六

Now $\overline{G_1G_2} \parallel \overline{BD}$ $\therefore \overline{G_1M} \parallel \overline{BO_1}$ & $\overline{G_2N} \parallel \overline{DO}$

by 性質 a、e

$$\frac{\overline{G_1M}}{\overline{BO_1}} = \frac{\overline{XG_1}}{\overline{XB}} = \frac{1}{3} = \frac{\overline{XG_2}}{\overline{XD}} = \frac{\overline{G_2N}}{\overline{DO}}$$

即$\dfrac{\overline{G_1M}}{\overline{BO_1}} = \dfrac{\overline{G_2N}}{\overline{DO}}$ $\because \overline{BO_1} = \overline{DO}$ $\therefore \overline{G_1M} = \overline{G_2N}$# ………… (*)

Now $\overline{G_1M} = \overline{G_2N}$ by 性質C，$\dfrac{\overline{G_1M}}{\overline{G_2M}} = \dfrac{\overline{G_2N}}{\overline{G_1N}}$ …………………(a)

$\because \overline{G_1G_2} \parallel \overline{BD}$ $\therefore \overline{G_2N} \parallel \overline{DO}$、$\overline{G_1N} \parallel \overline{BO}$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{G_2N}}{\overline{DO}} = \dfrac{\overline{XN}}{\overline{XO}} = \dfrac{\overline{G_1N}}{\overline{BO}} \Rightarrow \dfrac{\overline{G_2N}}{\overline{G_1N}} = \dfrac{\overline{DO}}{\overline{BO}}$ …………………(b) by (a)(b) $\dfrac{\overline{G_1M}}{\overline{G_2M}}=\dfrac{\overline{DO}}{\overline{BO}}$ 與（※）比較

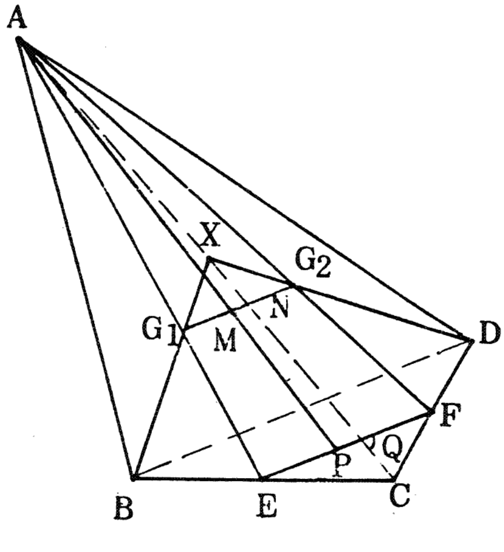
我們知道M即是四邊形ＡＢＣＤ之重心Ｇ，而在（ * ）中M點的特性是使得$\overline{G_1M}=\overline{G_2N}$

結論：經由這一連串的推論與驗證我們知道，要求得四邊形ＡＢＣＤ的重心，只要先求得△ＡＢＣ與△ＡＤＣ之重心G_1、G_2；若$\overline{AC}$交$\overline{G_1G_2}$於Ｎ，只要在$\overline{G_1G_2}$上取一點Ｇ使得$\overline{G_1G}=\overline{G_2N}$即可。

(3)在圖十六中我們發現了一個有趣的現象（見圖十七）若G_1、G_2分別爲△ＡＢＣ及△ＡＤＣ之重心。M爲四邊形ＡＢＣＤ之重心。Ｅ、Ｆ分別爲$\overline{BC}$及$\overline{CD}$中點毫無疑問的Ａ、G_1、Ｅ及Ａ、G_2、Ｆ分別三點共線

作$\overline{AM}$交$\overline{EF}$於Ｐ、設$\overline{AC}$交$\overline{EF}$於Ｑ，那麼Ｐ與Ｅ、Ｆ、Ｑ有何關係呢？而Ａ、Ｍ、Ｐ三點是否也有特殊的關係呢？

現在讓我們來瞧瞧！



圖十七

∵Ｅ、Ｆ分別爲$\overline{BC}$及$\overline{CD}$中點

∴$\overline{EF}\,/\!/\,\overline{BD}$

又∵$\overline{G_1G_2}\,/\!/\,\overline{BD}$

∴$\overline{G_1G_2}\,/\!/\,\overline{EF}$ 即$\overline{G_1M}\,/\!/\,\overline{EP}$ & $\overline{G_2N}\,/\!/\,\overline{FQ}$

$$\Rightarrow\frac{\overline{G_1M}}{\overline{EP}}=\frac{\overline{AG_1}}{\overline{AE}}=\frac{2}{3}=\frac{\overline{AG_2}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{G_2N}}{\overline{FQ}}\text{ 即 }\frac{\overline{G_1M}}{\overline{EP}}=\frac{\overline{G_2N}}{\overline{FQ}}$$

∵$\overline{G_1M}=\overline{G_2N}$ (See *) ∴$\overline{EP}=\overline{FQ}$……………(a)

而且∵$\overline{G_1M}\,/\!/\,\overline{EP}$ by 性質ｄ、ｅ $\dfrac{\overline{MP}}{\overline{AP}}=\dfrac{\overline{G_1E}}{\overline{AE}}=\dfrac{1}{3}$………(b)

由(a)(b)我們可以知道：$\overline{EP}=\overline{FQ}$且$\overline{MP}=\frac{1}{3}\overline{AP}$

我們不禁要想，是否找重心有另一種方法呢？

作法：見圖十七

①取$\overline{BC}$、$\overline{CD}$中點Ｅ、Ｆ

②連$\overline{EF}$交$\overline{AC}$於Ｑ

③在$\overline{EF}$上取一點P使得$\overline{EP}=\overline{FQ}$

④連$\overline{AP}$，且在$\overline{AP}$上取一點M使得$\overline{PM}=\frac{1}{3}\overline{AP}$

⑤M即是四邊形ABCD之重心#

證明：見圖十七

$\because$ G_1、G_2分別爲△ABC及△ADC之重心，而且$\overline{MP}=\frac{1}{3}\overline{AP}$

$\therefore \dfrac{\overline{G_1E}}{\overline{AE}}=\dfrac{\overline{MP}}{\overline{AP}}=\dfrac{\overline{G_2F}}{\overline{AF}}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \overline{G_1M}\,/\!/\,\overline{EP}$即$\overline{G_1M}\,/\!/\,\overline{EF}$　又G_1 $\overline{NG_2}\,/\!/\,\overline{EF}$

$\Rightarrow$ G_1、M、N、G_2四點共線（N爲$\overline{AC}$與$\overline{G_1G_2}$交點）

$$\Rightarrow \frac{\overline{G_1M}}{\overline{EP}}=\frac{\overline{AG_1}}{\overline{AE}}=\frac{2}{3}=\frac{\overline{AG_2}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{G_2N}}{\overline{FQ}} \Rightarrow \frac{\overline{G_1M}}{\overline{EP}}=\frac{\overline{G_2N}}{\overline{FQ}}$$

$\Rightarrow \because \overline{EP}=\overline{FQ}$　　$\therefore \overline{G_1M}=\overline{G_2N}$

by(二)、C、1、(2)之（＊）我們已經證實了M即是四邊形ABCD之重心。

2.五邊形的重心

從上面我們可以歸納出兩種方法來

(1)作法：見圖十八

①作△ABC、△ACD、△ADE之重心G_1、G_2、G_3

②連$\overline{G_1G_2}$交$\overline{AC}$於P、連$\overline{G_2G_3}$交$\overline{AD}$於Q

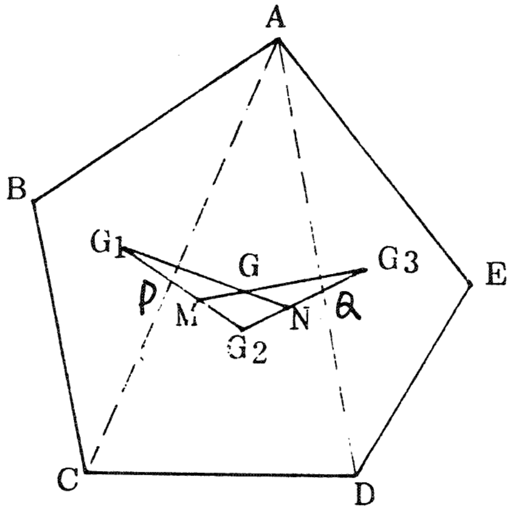
③在$\overline{G_1G_2}$上作$\overline{G_2M}=\overline{G_1P}$、在$\overline{G_2G_3}$上作$\overline{G_2N}=\overline{G_3Q}$

④連$\overline{G_1N}$、$\overline{G_3M}$相交於G即爲所求#

證明：四邊形ABCD中$\because \overline{G_2M}=\overline{G_1P}$

$\therefore$ M爲四邊形ABCD之重心

同理N爲四邊形ACDE之重心

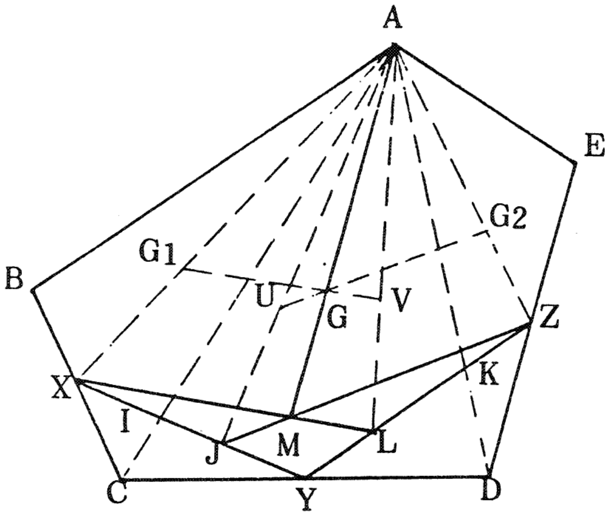


圖十八

而G_1、G_3分別爲△ABC及△ADE之重心

$\therefore \overline{G_1N}$與$\overline{G_3M}$之交點G即爲五邊形ABCDE之重心#

(2)作法：見圖十九



圖十九

①取$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$之中點X、Y、Z

②連$\overline{XY}$交$\overline{AC}$於I、連$\overline{YZ}$交$\overline{AD}$於K

③$\overline{XY}$上取$\overline{XJ}=\overline{XI}$、在$\overline{YZ}$上取$\overline{YL}=\overline{KZ}$

④連$\overline{XL}$、$\overline{ZJ}$、令$\overline{XL}$交$\overline{ZJ}$於M

⑤在$\overline{AM}$上取一點G使得$\overline{MG}=\frac{1}{3}\overline{AM}$，G點即為所求#

證明：若G_1、G_2分別為△ABC與△ACE之重心

在$\overline{AJ}$上取一點U使得$\overline{UJ}=⅓\overline{AJ}$

在$\overline{AL}$上取一點V使得$\overline{VL}=⅓\overline{AL}$

則U、V分別為四邊形ABCD、ACDE之重心

連$\overline{G_1G}$、$\overline{GV}$則$\dfrac{\overline{AX}}{\overline{XG_1}}=\dfrac{3}{1}=\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MG}}=\dfrac{3}{1}=\dfrac{\overline{AL}}{\overline{VL}}$ $\therefore \overline{G_1G} /\!/ \overline{XL} /\!/ \overline{GV}$

∴ G_1、G、V三點共線　同理G_2、G、U三點共線

且G為$\overline{G_1V}$與$\overline{G_2U}$之交點

by (一)C・2(1)即上面已經證明了

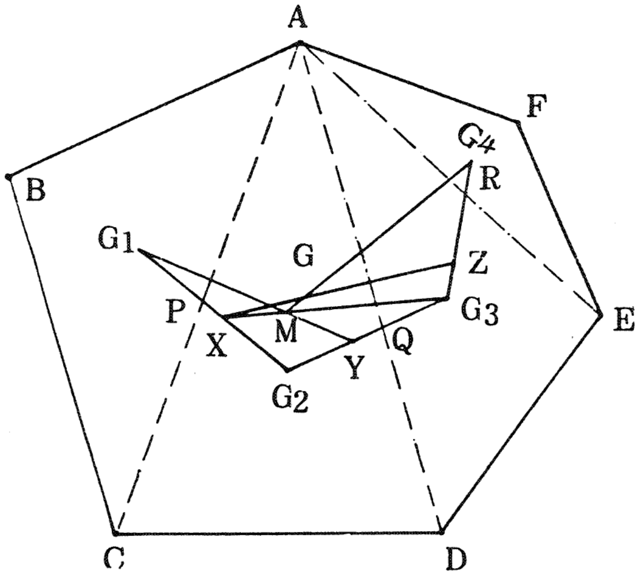
∴ G為五邊形ABCD之重心#

3.六邊形的重心

(1)作法・見圖二十

①作△ABC、△ACD、△ADE、△AEF之重心G_1、G_2、G_3、G_4

②連$\overline{G_1G_2}$交$\overline{AC}$於P、連$\overline{G_2G_3}$交$\overline{AD}$於Q連$\overline{G_3G_4}$交$\overline{AE}$於R



圖二十

③在$\overline{G_1G_2}$上取一點X使得$\overline{G_2X}=\overline{G_1P}$

在$\overline{G_2G_3}$上取一點Y使得$\overline{G_2Y}=\overline{G_3Q}$

在$\overline{G_3G_4}$上取一點Z使得$\overline{G_3Z}=\overline{G_4R}$

④連$\overline{G_1Y}$、$\overline{G_3X}$令$\overline{G_1Y}$交$\overline{G_3X}$於M

⑤連$\overline{XZ}$、$\overline{G_4M}$令$\overline{XZ}$交$\overline{G_4M}$於G，即爲所求#

證明：G_1、G_2、G_3、G_4分別爲△ABC、△ACD、△ADE、△AEF之重心

而X、Y、Z分別爲四邊形ABCD、ACDE、ADEF之重心則$\overline{XG_3}$與$\overline{YG_1}$之交點M爲五邊形ABCDE之重心

∴$\overline{G_4M}$與$\overline{XZ}$之交點G即爲六邊形ABCDEF之重心#

(2)作法：見圖二十一

①取$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$之中點W、X、Y、Z

②連$\overline{WX}$交$\overline{AC}$於P，連$\overline{XY}$交$\overline{AD}$於Q，連$\overline{YZ}$於$\overline{AE}$於R

③在$\overline{WX}$上取一點T使得$\overline{XT}=\overline{WP}$

在$\overline{XY}$上取一點U使得$\overline{XU}=\overline{YQ}$

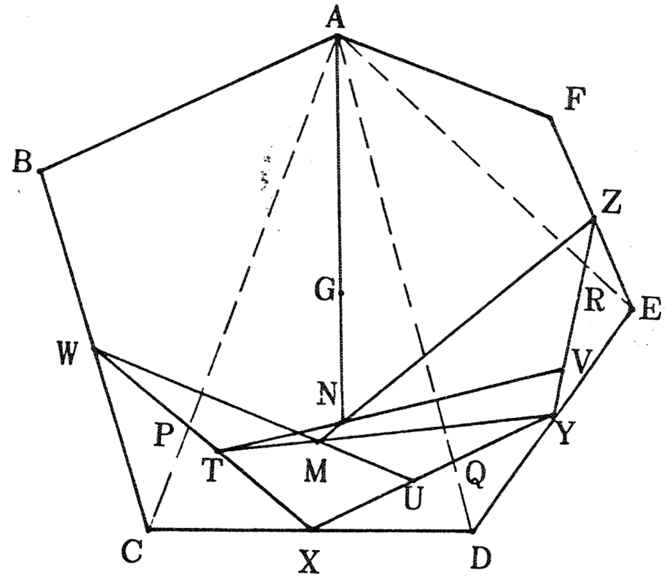
在$\overline{YZ}$上取一點V使得$\overline{YV}=\overline{ZR}$

④連$\overline{WU}$、$\overline{YT}$　令$\overline{WU}$交$\overline{YT}$於M

⑤連$\overline{TV}$、$\overline{ZM}$　令$\overline{TV}$交$\overline{ZM}$於N

⑥連$\overline{AN}$　且在$\overline{AN}$上取一點G使得$\overline{NG}=\frac{1}{3}\overline{AN}$

則G即爲所求#



圖二十一

五、結論與討論

經由一連串的演繹，我們終於推導並證明出較簡潔而且有系統的方法來找尋不規則凸多邊形的重心。

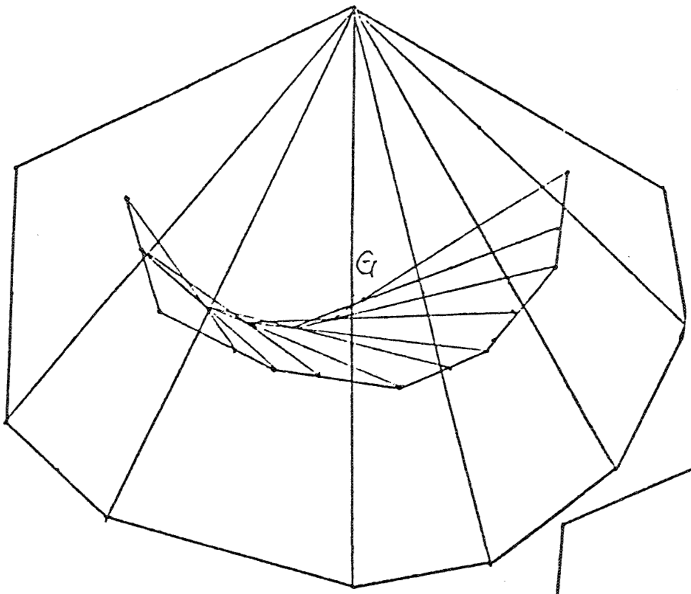
首先由三角形我們可以印證：重心在面積之平分線交點上。所以我們一開始就以找尋面積平分線為出發點，進而發展到重心在多邊形之部分重心的連線段上，這是一個相當重要的性質，雖然我們後來發展出的方法較迅捷，但基本的原理還是以此為基礎的。綜合以上的推論我們可以歸納出兩種方法來：

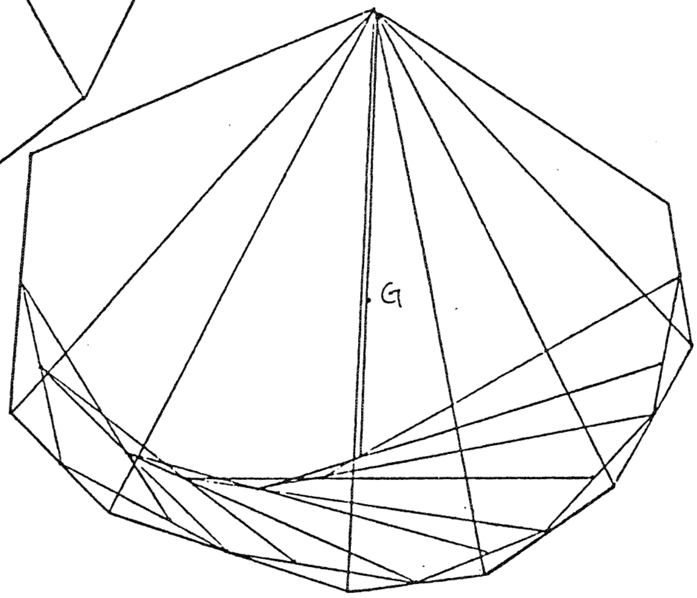
即(一)將 n 多邊形分割成（ n － 2 ）個相鄰的三角形，再找到這（ n － 2 ）個三角形的重心 G_1、G_2、……、G_{n-2}，再藉由相鄰重心連線與所夾對角線之交點而作出此 n 邊形之重心，方法可參照(二)、C 、 3 、(1)。

(二) n 邊形的重心亦可先將此 n 多邊形分割成（ n － 2 ）個相鄰的三角形，藉由找出的 P_1、P_2、………、P_{n-2}等（ n － 2 ）個邊中點，再藉連接相鄰的中點與所夾對角線之交點而作出此 n 邊形之重心，方法可參照(二)、C 、 3 、(2)。

六、驗證

我們以厚度均勻的壓克力板製成七邊、八邊及九邊形，依上述之方法均可找到該多邊形之均衡點，證實了我們所找尋之方法的實用及確實性。





七、參考書目

(一)國中數學選修上册

(二)國中數學選修下册

(三)國中理化第二册

評語

本件作品，學生能夠從三角形的重心之求法推廣至多邊形的重心之求法，而且做出一系列相當嚴密的推論過程，對國中組而言，實在是一件不可多得之作品。