

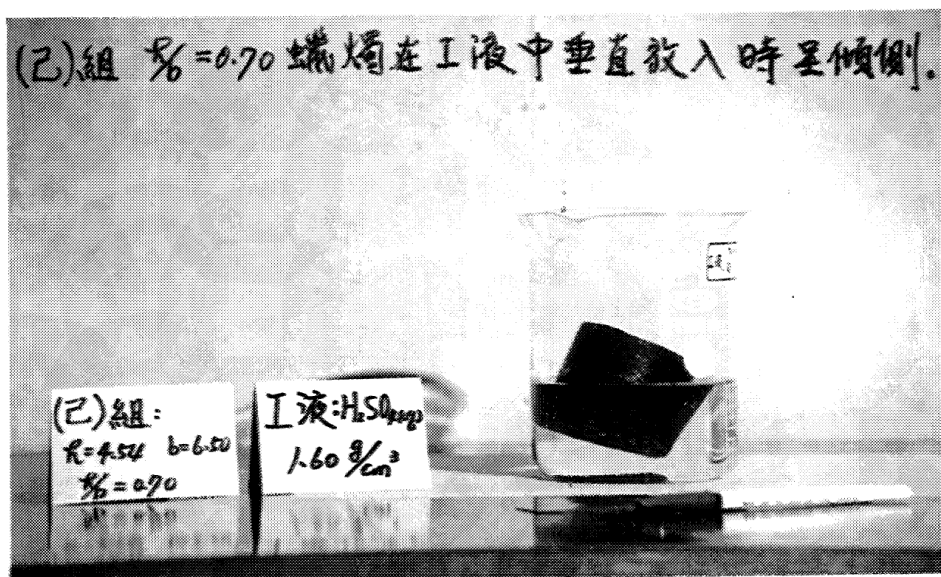
# 圓柱形浮體的穩定性問題研究

國中組物理科第三名

彰化縣立埔心國民中學

作者：陳啓文、王啓晉  
邱權進

指導教師：洪瑞男、桃風儒



## 一、研究動機

在學浮力章節裏，老師提到如果把一根長圓柱體形的蠟燭放在水中，蠟燭的中心對稱軸會與水平面平行；但若將蠟燭切成如鈕釦般的極短圓柱體，則置於水中時，其中心對稱軸會與水平面垂直。到底蠟燭短到何種程度，其軸才會與水平垂直？這個問題引起了我們的興趣與好奇，於是進行以下研究。（Experiments in Physics P. 18）

## 二、研究目的

- (一)圓柱形浮體在液體中，其對稱軸與液面能呈垂直穩定的條件？
- (二)圓柱形浮體在液體中，其對稱軸與液面能呈平行穩定的條件？
- (三)以力學理論推導理論值。
- (四)將實驗值與理論值互相比較。

### 三、研究設備器材

蠟燭、硫酸、乙醇、比重計、燒杯、量筒、天平、三角板、直尺、鋸子、鉗鍋掛。

### 四、研究過程與研究結果與方法

我們將本研究分為實驗探討與理論探討兩大部分：

#### (一) 實驗探討：

- 我們將所購得直徑不同規格的蠟燭分成(甲)(乙)(丙)(丁)(戊)五組。每組中將蠟燭鋸成長度不同的各種尺寸，且規則地增加蠟燭的長度如(表一)至(表五)所示。並配製三種不同密度液體如下(表六)所示。

(註)：由於我們買來的蠟燭，兩端直徑有微小的差異，故我們於每次鋸下不同長度蠟燭時，再精確量其直徑值  $b$ ，這也就是(表一)至(表五)的  $b$  值為何會有許不同之因。蠟燭密度用重錘法得  $0.89 \text{ g/cm}^3$

- 本實驗探討部分所使用代號如下：

$h$ ：蠟燭長度             $b$ ：蠟燭直徑             $\delta_l$ ：液體密度  
 $o$ ：表蠟燭放入液中呈穩定             $\delta_d$ ：蠟燭密度( =  $0.89 \text{ g/cm}^3$  )  
 $x$ ：表蠟燭放入液中呈傾側或傾覆

(表一)：(甲)組蠟燭其長度  $h$  自  $0.54 \text{ cm}$  起依次增加  $0.18 \text{ cm}$

$h \text{ (cm)}$	0.54	0.72	0.90	1.08	1.26	1.44	1.62	1.80	1.98	2.16	2.34
$b \text{ (cm)}$	1.80	1.80	1.80	1.80	1.80	1.80	1.80	1.80	1.80	1.80	1.80
$h / b$	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.30

(表二)：(乙)組蠟燭其長度  $h$  自  $1.11 \text{ cm}$  起依次增加  $0.35 \text{ cm}$

$h \text{ (cm)}$	1.11	1.46	1.81	2.16	2.51	2.86	3.21	3.56	3.91	4.26	4.61
$b \text{ (cm)}$	3.70	3.70	3.70	3.60	3.60	3.60	3.60	3.60	3.60	3.50	3.50
$h / b$	0.30	0.39	0.49	0.60	0.70	0.79	0.89	0.99	1.09	1.22	1.32

(表三)：(丙)組蠟燭其長度  $h$  自  $1.50\text{ cm}$  起依次增加  $0.49\text{ cm}$

$h\text{ (cm)}$	1.50	1.99	2.48	2.97	3.46	3.95	4.44	4.93	5.42	5.91	6.40
$b\text{ (cm)}$	5.00	5.00	4.90	5.00	4.90	4.90	4.90	5.00	5.00	5.00	5.00
$h / b$	0.30	0.40	0.51	0.59	0.71	0.81	0.89	0.99	1.08	1.81	1.28

(表四)：(丁)組蠟燭其長度  $h$  自  $1.77\text{ cm}$  起依次增加  $0.59\text{ cm}$

$h\text{ (cm)}$	1.77	2.36	2.95	3.54	4.13	4.72	5.31	5.90	6.49	7.08	7.67
$b\text{ (cm)}$	5.90	5.90	5.90	6.00	5.90	5.90	5.90	5.90	5.90	5.90	5.90
$h / b$	0.30	0.40	0.50	0.59	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.30

(表五)：(戊)組蠟燭其長度  $h$  自  $1.98\text{ cm}$  起依次增加  $0.64\text{ cm}$

$h\text{ (cm)}$	1.98	2.62	3.26	3.90	4.54	5.18	5.82	6.46	7.10	7.74	8.38
$b\text{ (cm)}$	5.40	6.60	6.60	6.40	6.50	6.70	6.50	6.40	6.40	6.30	6.40
$h / b$	0.30	0.40	0.49	0.61	0.70	0.77	0.90	1.01	1.11	1.23	1.31

(表六)：液體的配製(1)

液體編號	液體名稱	液體密度	配製過程		
			溶劑	溶質	溶液
A 液	水	$1.00\text{ g/cm}^3$	600ml		
B 液	$\text{H}_2\text{SO}_4$ 水溶液	$1.10\text{ g/cm}^3$	600ml	60ml	650ml
C 液	$\text{H}_2\text{SO}_4$ 水溶液	$1.46\text{ g/cm}^3$	400ml	300ml	640ml

### 3. 垂直穩定部分

#### (1) 實驗(I)(II)(III)步驟：

以鋸成的五組不同規格蠟燭（共 55 根），垂直放入 A 液中，觀察其是否垂直穩定。以符號  $\circ$  表示能垂直穩定， $\times$  表示傾側或傾覆，紀錄於（圖一），（註：詳細數據因受版面限制省略）。並描（圖一）中的臨界  $\circ$  點於（圖二）中。

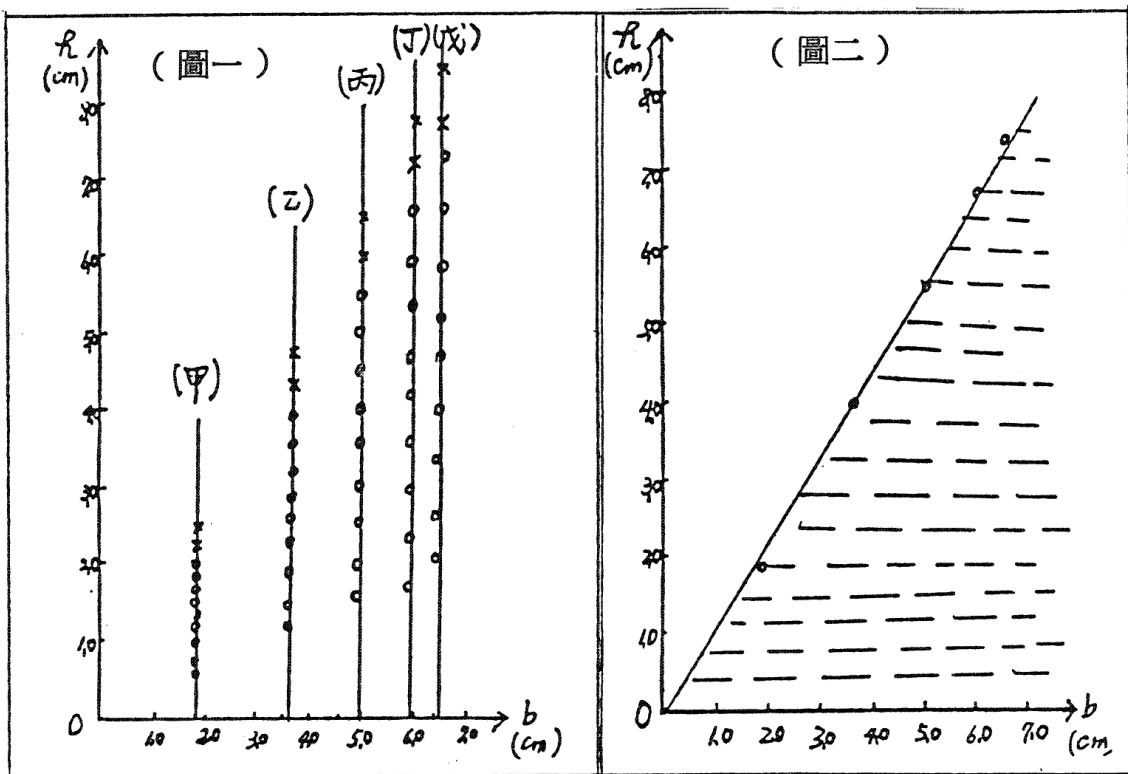
重複  $\hookrightarrow$ ，但分別改以 B、C 液為對象，紀錄於（圖三）、（圖四）及（圖五）、（圖六）中。

將(戊)組蠟燭擴增為 23 根，定名為(己)組。（註：數據省略）。並配製各種不同密度的液體。（註：數據省略）。使(己)組蠟燭置於各種液體中，觀察其是否呈垂直穩定，紀錄於（圖九）中。

#### (2) 實驗(I)(II)(III)結果：

實驗次別：(I)

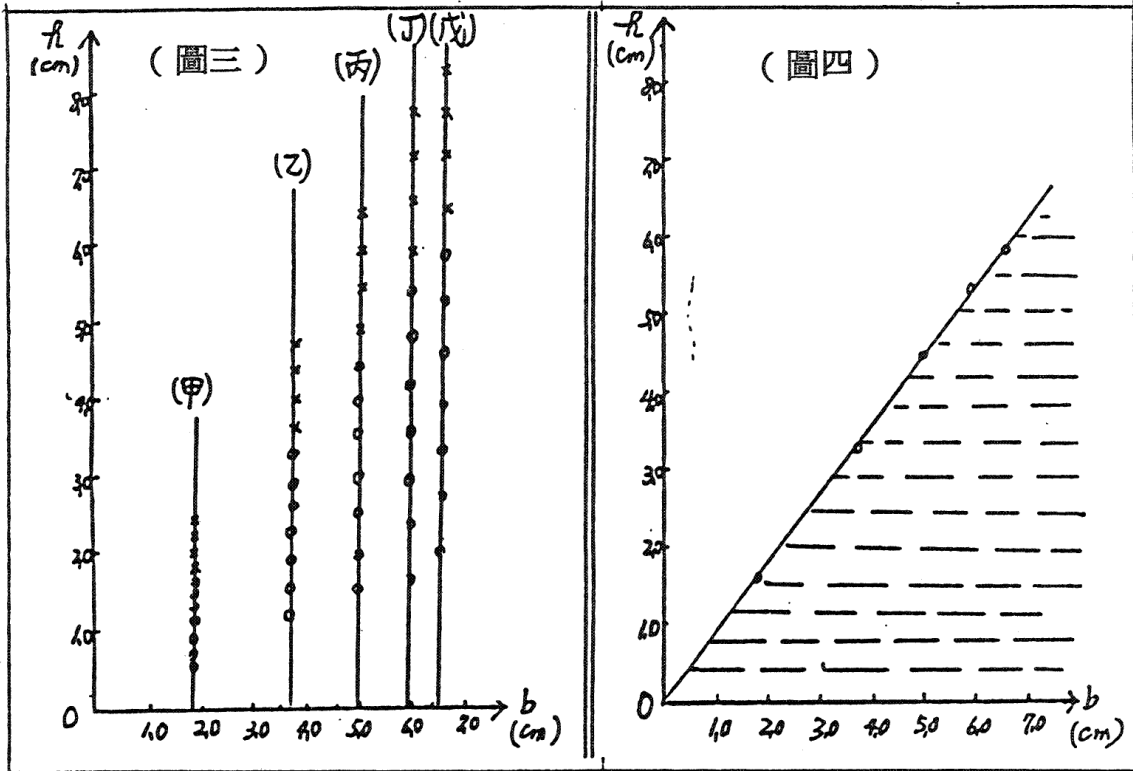
液體：A 液  $1.00 \text{ g/cm}^3$



實驗次別：(II)

液體：B液

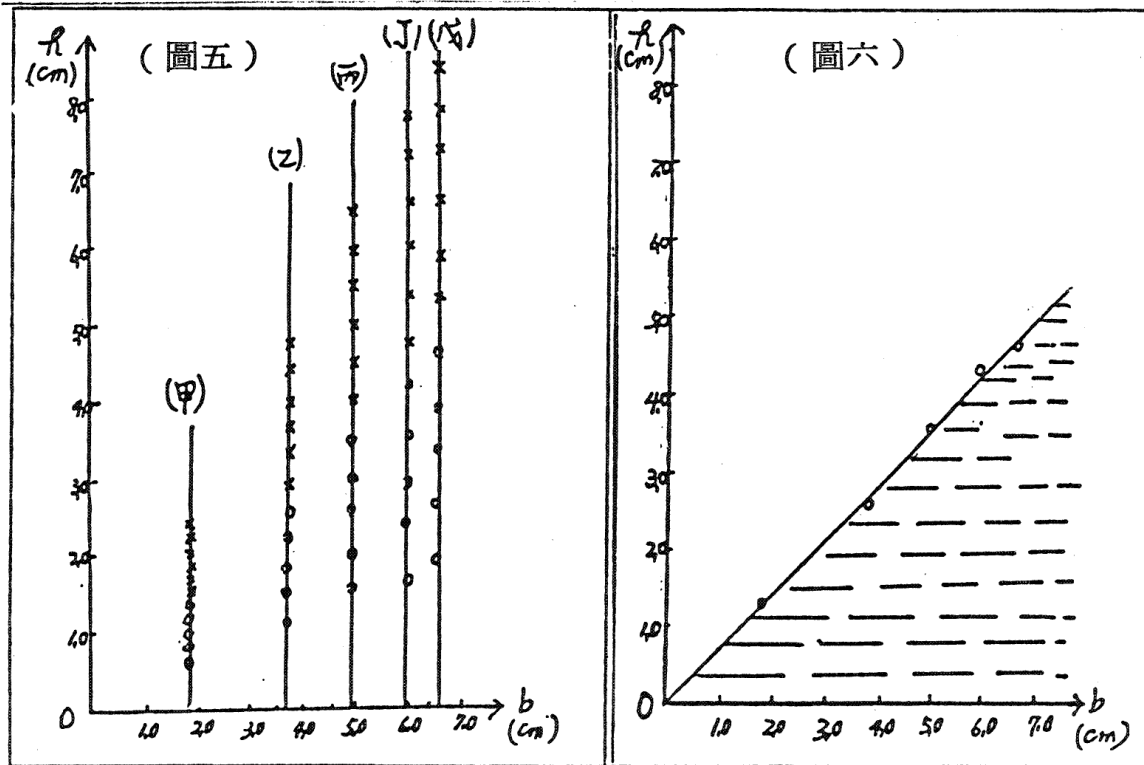
1.10 g/cm<sup>3</sup>



實驗次別：(III)

液體：C液

1.46 g/cm

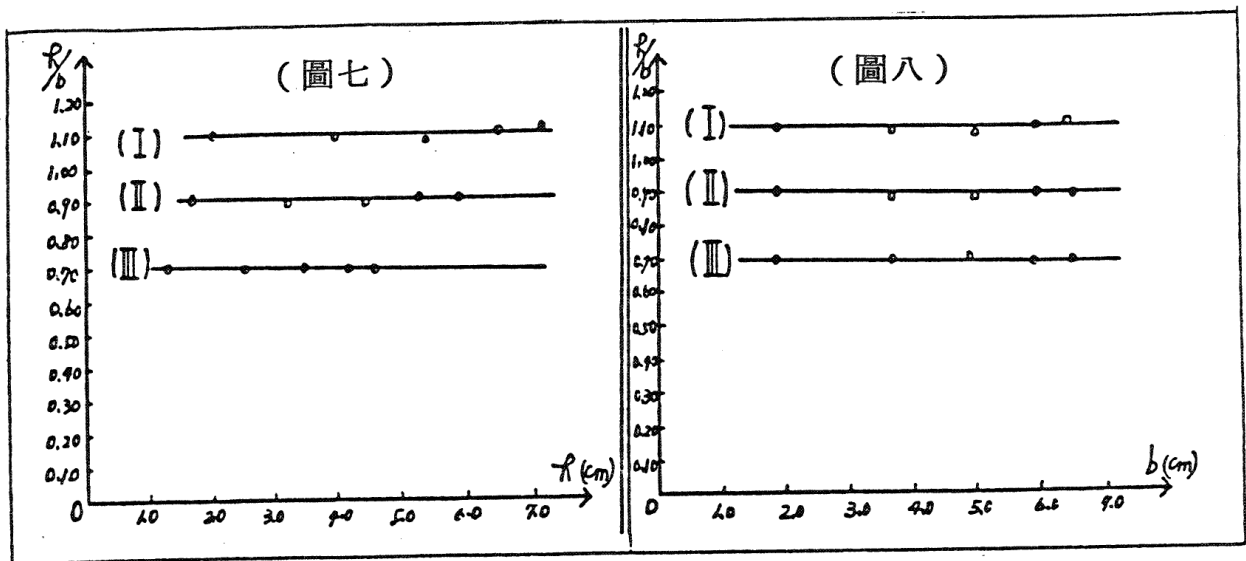


(3)〔討論一〕：由(圖二)、(圖四)、(圖六)可知虛線部分表蠟燭可呈垂直穩定平衡之區域。

又將實驗(I)(II)(III)所得之臨界 $h/b$ 對 $h$ 及 $h/b$ 對 $b$ 作圖，則可得(圖七)、(圖八)兩圖形。從(圖七)、(圖八)兩圖形，我們得到兩點認知：

(1)在同一種液體中，不管蠟燭的長度 $h$ ，直徑 $b$ 為何，只要 $h/b$ 比值相同，則當蠟燭的對稱軸與液面垂直的放入液中時，其位置狀態所呈現的結果(傾覆或穩定)會相同。

(2)而在不同的液體中，使蠟燭的對稱軸與液面呈垂直穩定狀態的 $h/b$ 值皆不同。



(4)實驗(IV)部分及結果：基於對以上討論的認知，接下來，我們配製D~K共8種液體，並以(2)組蠟燭試驗，求取臨界垂直穩定的 $\theta$ 點，紀錄於(圖九)中。並以虛線表可垂直穩定的區域。

4.平行穩定部分：此部分步驟與垂直穩定部分完全相同，但因受限版面，無法畫出圖形及列出數據，僅將最後結果繪於(圖九)中，並以斜線表蠟燭可呈平行穩定的區域。

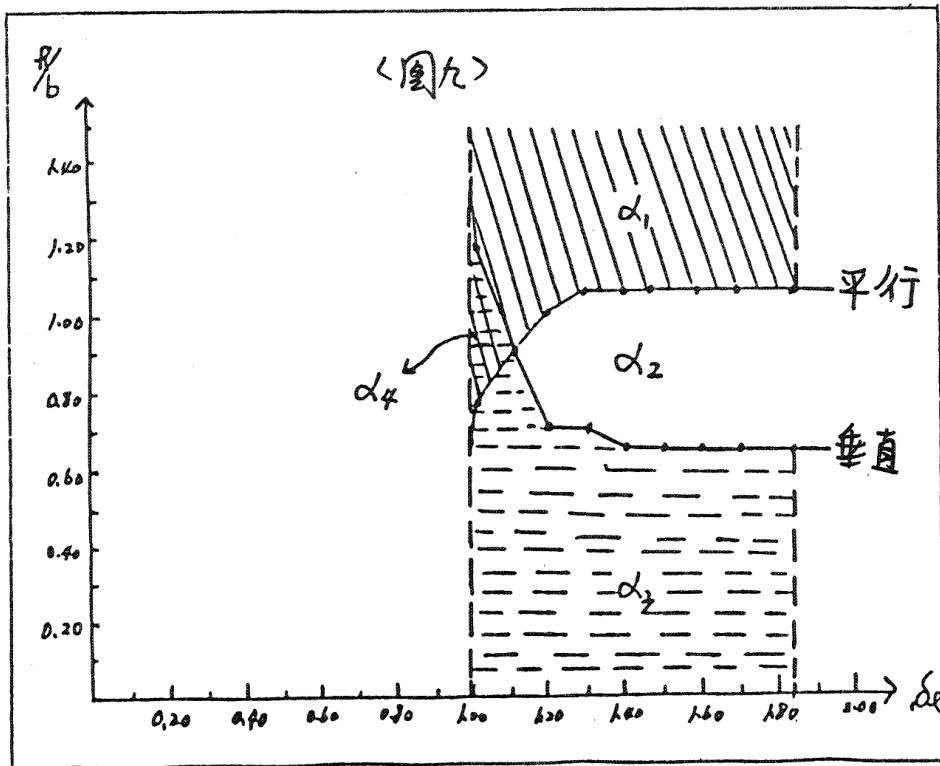
(1)〔討論二〕：從(圖九)中可知：

由 $\alpha_1$ 斜線區域表蠟燭在液中能呈平行穩定。

由 $\alpha_2$ 區域表蠟燭既無法垂直穩定，亦無法平行穩定。

由 $\alpha_3$ 虛線區域表蠟燭在液中能呈垂直穩定。

由 $\alpha_4$ 區域表蠟燭在液中能既呈平行穩定，亦能呈垂直穩定。



(二)理論探討：

〔前言〕：從前面實驗探討部分的（圖九）之圖形，我們看出其似為具規則性的曲線，因此我們想對其做深入的研究，希望能增加本研究的完整性，同時，這也是我們最主要探討之重點。

1.地心引力作用於物體可視為作用於此物體的重心，我們用P表物體重心。而對浮體而言，亦可視浮力作用於浮體在液面下體積部分的重心，我們暫稱它為“浮力中心”，以Q表示。

2.假設有一圓柱體長h，直徑b，體積V，密度δb。其對稱軸與液面垂直穩定浮於密度δe的液體上且其重心在P。將此圓柱體傾斜一很小角度θ，如下（圖十）所示：液面在線1；在線1底下對稱P點處作線2；在線2底下通過角頂點作水平線線3。假設圓柱體在此狀態下重力與浮力平衡而力矩未平衡。

如（圖十）所示，V<sub>1</sub>的浮力中心在P，V<sub>2</sub>的浮力中心在Q<sub>2</sub>。設V<sub>3</sub>的浮力中心在Q<sub>3</sub>。且令P(0, 0)；Q<sub>2</sub>(x<sub>2</sub>, y<sub>2</sub>)；Q<sub>3</sub>(x<sub>3</sub>, y<sub>3</sub>)。若對P取力矩則：

$$\zeta_2 = \delta e V_2 x_2 > 0 \dots\dots\dots ① \quad \zeta_2 \text{表 } V_2 \text{對 } P \text{點所造成之力矩}$$

$$\zeta_3 = \delta e V_3 x_3 < 0 \dots\dots\dots ② \quad \zeta_3 \text{表 } V_3 \text{對 } P \text{點所造成之力矩}$$

要達到恢復穩定平衡必須 | ζ<sub>3</sub> | > ζ<sub>2</sub>，即須

$$V_3 x_3 + V_2 x_2 < 0 \dots\dots\dots ③ \quad \text{此為浮體恢復穩定平衡之條件}$$

3. 當  $\theta$  很小時  $V_2 - V_3 \approx V_2$ 。下 (圖十一) 顯示分別以  $Z'$  及  $Z$  當支點將蠟燭傾斜  $\theta$  所畫出線 3 底下  $V_3$  部分與兩楔形體  $S'ZS$  及  $T'ZT$  間之關係。可看出  $S'ZS$  會使浮體減少一向上之力，而  $T'ZT$  會使其增加一向上之浮力。這兩個力其大小相等而恰達穩定平衡抵消，但却無法達成轉動平衡，即會產生一力偶。 $V_3$  部分對  $P$  造成之力矩恰等於兩楔形體所形成之力偶。

4. 對楔形  $S'ZS$  及  $T'ZT$  而言，其距中心  $Z$  點  $X_i$  處之一小鉛直柱體之體積可表為  $X_i \tan \theta \Delta A_i$ 。其中  $\Delta A_i$  表此小鉛直柱體的水平截面積。(如圖十二) 所示。而整個楔形體  $S'ZS$  之體積可表為

$$X_1 \tan \theta \Delta A_1 + X_2 \tan \theta \Delta A_2 + X_3 \tan \theta \Delta A_3 + \dots = \tan \theta \sum_i X_i \Delta A_i$$

(註)： $\sum_i$  表對  $i$  的連加符號。

$$\text{則此楔形體對 } P \text{ 之力矩為 } \delta \ell \cdot \left( \tan \theta \sum_i X_i \Delta A_i \right), X_i = \delta \ell \tan \theta \sum_i X_i^2 \Delta A_i = |\zeta_3| = \delta \ell V_3 X_3 \dots \dots \dots \textcircled{4}$$

其中的  $\sum_i X_i^2 \Delta A_i$  由老師的講解及參考高中物理第二冊第八章 P.37 知其代表轉動運動中的水平面質點對中心軸的轉動慣量。令  $\sum_i X_i^2 \Delta A_i = I_1$ 。

5. 設  $R_1 = \delta b / \delta \ell$ ，由 (圖十) 知  $V \delta b = (V_1 + V_2 + V_3) \delta \ell$  因此  $R_1 = \frac{\delta b}{\delta \ell} = (V_1 + V_2 + V_3) / V \dots \dots \dots \textcircled{5}$

若有另一圓柱體  $h$ ， $b$  與上述 (圖十) 情形相同而液面在線 2。若其密度為  $\delta' b$ ，則設  $R_2 = \delta b' / \delta \ell$ ，在此  $V \delta b' = (V_2 + V_3) \delta \ell$

$$\therefore R_2 = \delta b' / \delta \ell = (V_2 + V_3) / V \dots \dots \dots \textcircled{6}$$

由⑤⑥可得  $R_1 + R_2 = (V_1 + V_2 + V_3) / V = V/V = 1$  即當  $R_1 + R_2 = 1$  時，兩浮體之穩定條件相同。

6. 解軸與液面垂直穩定問題：

(1) 如 (圖十三) 所示，令  $\theta = 0^\circ$ ，則  $Q_3(0, y_3) = Q_3(0, -h/2)$ ;  $Q_2(0, y_2)$

取位於水平面之點  $P_1(x_1, y_1)$  由  $\delta b V = \delta e V_2 \Rightarrow \delta b \pi (b/2)^2 h = \delta \ell V_2$

$$\therefore V_2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 (\delta b / \delta e) h \dots \dots \dots \textcircled{7} \quad \text{又 } \delta b \pi (b/2)^2 h = \delta e \pi (b/2)^2 L_1$$

$$\therefore L_1 = (\delta b / \delta \ell) h \dots \dots \dots \textcircled{8}$$

$$(2) |y_2| = \frac{h}{2} - \frac{L_1}{2} = \frac{h}{2} - \frac{h}{2} \left(\frac{\delta b}{\delta \ell}\right) = \frac{h}{2} \left(1 - \frac{\delta b}{\delta \ell}\right) \dots \dots \dots \textcircled{9}$$

$$(3) \text{則 } \zeta_2 = \delta e V_2 X_2 = \delta e \left[\pi \left(\frac{b}{2}\right)^2 (\delta b / \delta e)\right] \left[\frac{h}{2} \left(1 - \delta b / \delta e\right)\right] \tan \theta \dots \dots \dots \textcircled{10}$$

$$(4) \text{由 } \textcircled{4} \text{ 式知： } \zeta_3 = \delta \ell V_3 X_3 = -\delta \ell \tan \theta \sum_i X_i^2 \Delta A_i$$

由一流出版社所出版轉動、彈性學及流體力學一書中 P.28(j)，我們查

$$\text{到 } I_1 = \frac{1}{4} \pi \left(\frac{b}{2}\right)^4 \quad \therefore \zeta_3 = \delta \ell V_3 X_3 = -\delta \ell \tan \theta \frac{\pi}{4} \left(\frac{b}{2}\right)^4 \dots \dots \dots \textcircled{11}$$



(5)根據③式，再由⑪式及⑩式知恢復穩定平衡須  $\zeta_2 + \zeta_3 < 0$

$$\text{故解得 } h/b < \frac{1}{\sqrt{8 \frac{\delta b}{\delta \ell} (1 - \delta b/\delta \ell)}} \dots\dots\dots \text{⑫}$$

7.解軸與液面平行穩定問題：

(1)如(圖十四)所示，令  $\theta = 0^\circ$  則  $Q_3(0, y_3) = Q_3(0, -b/2)$ ;  $Q_2(0, y_2)$

取一在水平面之點  $P_1(x_1, y_1)$  由  $\delta b V = \delta \ell V_2 \Rightarrow \delta b (b/2)^2 \pi h = \delta b V_2$

可得  $V_2 = \pi (b/2)^2 (\delta b / \delta \ell) h \dots\dots\dots \text{⑬}$

又由  $L_2/b = \delta b / \delta \ell$  得  $L_2 = (\delta b / \delta \ell) b \dots\dots\dots \text{⑭}$

在簡化問題的情況下，我們設  $y_2 = 1/2 (y_1 + y_3)$

$$\therefore |y_2| = \frac{b}{2} - \frac{L_2}{2} = \frac{b}{2} - \frac{b}{2} (\delta b / \delta \ell) = \frac{b}{2} (1 - \frac{\delta b}{\delta \ell}) \dots\dots\dots \text{⑮}$$

$$(2) \therefore \zeta_2 = \delta \ell V_2 X_2 = \delta \ell [ \pi ( \frac{b}{2} )^2 ( \delta b / \delta \ell ) h ] [ \frac{b}{2} ( 1 - \delta b / \delta \ell ) ] \tan \theta \dots\dots \text{⑯}$$

(3)而  $I_1$  仍由查表，我們可得  $\zeta_3 = \delta \ell V_3 X_3 = -\delta \ell \tan \theta \sum_i X_i^2 \Delta A_i =$

$$-\delta \ell \tan \theta [ \frac{1}{b} h^3 b \sqrt{ \frac{\delta b}{\delta \ell} ( 1 - \frac{\delta b}{\delta \ell} ) } ] \dots\dots\dots \text{⑰}$$

$$\text{由⑯⑰式 } \zeta_2 + \zeta_3 < 0 \text{ 解得 } h/b > [ \frac{3\pi}{4} \sqrt{ \frac{\delta b}{\delta \ell} ( 1 - \frac{\delta b}{\delta \ell} ) } ]^{1/2} \dots\dots\dots \text{⑱}$$

8.以  $\delta b = 0.89 \text{ g/cm}^3$ ，A~K 共 11 種不同液體密度  $\delta \ell$  代入⑫、⑱式求取臨界穩定的  $h/b$  值。列表(註：省略)，並描圖於(圖十五)中。

9.計算理論所得臨界  $h/b$  值與實驗值之誤差。列表(註：省略)。垂直穩定部分平均誤差 6.89%，平行穩定部分為 4.16%。

## 五、結論

(一)浮體在液中的穩定行為與液體密度、浮體長度、直徑有關。

(二)其他形狀如長方體要達某個方向的穩定也必須滿足在傾斜一小角度後的  $\zeta_2 + \zeta_3 < 0$  這個條件。

## 六、參考資料

(一)國中理化第一冊

(二)高中物理第二冊

(三)流體力學

(四)轉動、彈性學及流體力學

(五) Experiments in Physics

## 評語

本作品所探討之圓柱形浮體的穩定性問題複雜超出國中的程度，然而作者研究精神可佩，理論分析上鍥而不捨地找參考資料，物理觀念尚為正確（包括轉動慣量、微積分的基本觀念，微小位移及穩定性的關係等）在實驗上選擇的變因甚為恰當。