

美妙的和弦

高中組應用科學科第三名

省立新竹高級中學

作者：林永信、洪冠寅
胡文彧、賴萱和
指導教師：楊世文、王理書

一、研究動機

每當聽合唱比賽時，總覺得三部合唱比只有一部齊唱來得好聽，向老師詢問之下，才知道那是美妙的和弦所造成的效果。奇怪，為何三個音（或更多）所組成的和弦會好聽，又是不是任意的音組合起來都可形成好聽的和弦？基於好奇心的驅使，於是我們給這位「和弦小姐」徹底剖析！

二、研究目的

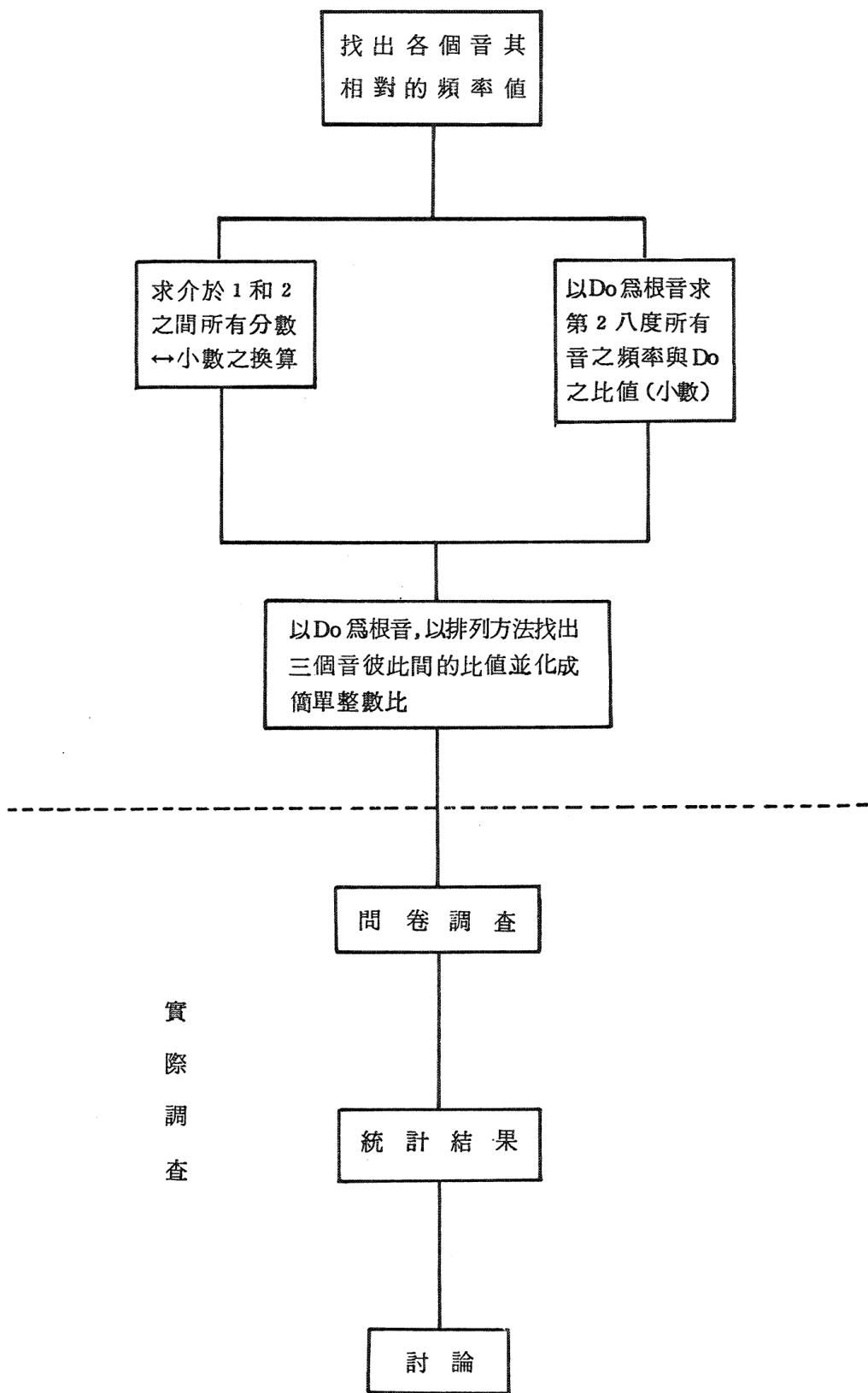
找出原有公認和諧之和弦的特性，進而創造出更多美妙的和弦。

三、研究設備器材

| | |
|--------------|--------|
| 電 腦 | 1 臺 |
| 電子琴 | 1 臺 |
| 音 叉（附音錘、共鳴箱） | 2 組 |
| 問 卷 | 1100 份 |

四、研究過程

爲了能清楚明瞭，我們以流程圖簡要說明研究過程：



五、討論

我們分兩方面討論：

(一)理論研究方面：

1. 頻率：

(1)從資料的調查得知「各個音其相對的頻率值」如下：

Do : 262 Do[#]:277 Re : 294 Re[#]:311 Me : 330 Fa : 349

Fa[#]: 370 So : 392 So[#]:415 La:440 La[#]:466 Si : 494 單位Hz

由於我們利用頻率值來求和弦之頻率比，為避免誤差過大，我們要自行找出更準確的頻率值。根據巴哈十二平均律得知：音階每提高八度，頻率變為原來的 2 倍，且每個音的頻率成等比關係如下：

| | | | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------------|--------------------|
| Do | Do [#] | Re | Re [#] | Me | Fa | Fa [#] |
| 1 | $\sqrt[12]{2}$ | $(\sqrt[12]{2})^2$ | $(\sqrt[12]{2})^3$ | $(\sqrt[12]{2})^4$ | $(\sqrt[12]{2})^5$ | $(\sqrt[12]{2})^6$ |
| So | So [#] | La | La [#] | Si | Do | |
| $(\sqrt[12]{2})^7$ | $(\sqrt[12]{2})^8$ | $(\sqrt[12]{2})^9$ | $(\sqrt[12]{2})^{10}$ | $(\sqrt[12]{2})^{11}$ | $(\sqrt[12]{2})^{12} = 2$ | |

已知 $f(\text{La}) = 440\text{Hz}$ ，利用上表及工程計算機幫助，我們找出更精確的頻率值如下：

| | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------|-------|--|
| | | | | 單位：Hz | |
| Do : 216.6257 | Do [#] : 277.1828 | Re : 293.6649 | Re [#] : 311.271 | | |
| Me : 329.6277 | Fa : 349.2283 | Fa [#] : 369.9945 | So : 391.9955 | | |
| So [#] : 415.3074 | La : 440 | La [#] : 466.1638 | Si : 493.8833 | | |

(2)由於 Do 與高音 Do 之頻率比值 = 2，當我們求第 2 八度所有音與 Do 的頻率比必小於 2 大於 1，所以我們只需做介於 1 與 2 之間的分數(=)小數換算表

$$1 = \frac{\text{Do}}{\text{Do}} < \frac{\text{第 2 八度所有音頻}}{\text{Do}} < \frac{\text{Do}'}{\text{Do}} = 2$$

(3)當我們把頻率比化為分數時，遇到一個困難；就是頻率值是以 $\sqrt[12]{2}$ 為公比求出來的，每個值都取到小數後四位，像這樣複雜的小數想用簡單整數比來表示，幾乎不可能。而這正是我們實驗的最大關鍵，因為根據心理學一書得知：人的耳朵能分辨的頻率差約為 $\frac{1}{300}$ ，例如：440 Hz 在人耳中是 La，則 $440 \div 440 \times \frac{1}{300}\text{Hz}$ 在人耳中仍然是 La，由於我們研究的第 2 八度的音大部分在 300 Hz 以上，也就是在這範圍內人耳能分辨的頻率差都在 1 Hz 以上，應用這個差值，我們終於準確地把所有小

數比化爲簡單分數，例如：

$$f(\text{Do}) = 261.6257 \text{ Hz} \qquad f(\text{So}) = 391.9955 \text{ Hz}$$

$$\frac{390.9955}{262.6257} < \frac{\text{So}}{\text{Do}} = \frac{391.9955}{261.6257} < \frac{392.9955}{260.6257}$$

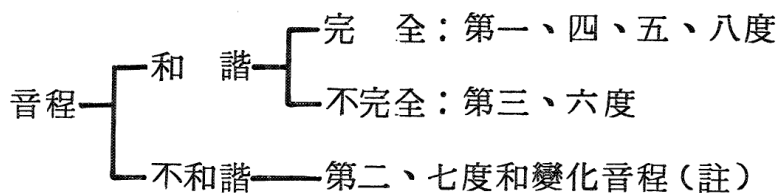
$$\Rightarrow 1.488794 < \frac{\text{So}}{\text{Do}} < 1.507892$$

所以 $\frac{\text{So}}{\text{Do}}$ 可化爲 $1.5 = \frac{3}{2}$ 。利用此法，我們可找出以 Do 爲根音所成音程

之簡單頻率比如下表：

| | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| Do : Do $\Rightarrow 1 : 1$ | Do : Do $\sharp \Rightarrow 15 : 16$ |
| Do : Re $\Rightarrow 8 : 9$ | Do : Re $\sharp \Rightarrow 11 : 13$ |
| Do : Me $\Rightarrow 4 : 5$ | Do : Fa $\Rightarrow 3 : 4$ |
| Do : Fa $\sharp \Rightarrow 12 : 17$ | Do : So $\Rightarrow 2 : 3$ |
| Do : So $\sharp \Rightarrow 12 : 19$ | Do : La $\Rightarrow 3 : 5$ |
| Do : La $\sharp \Rightarrow 9 : 16$ | Do : Si $\Rightarrow 8 : 15$ |
| Do : Do $\Rightarrow 1 : 2$ | |

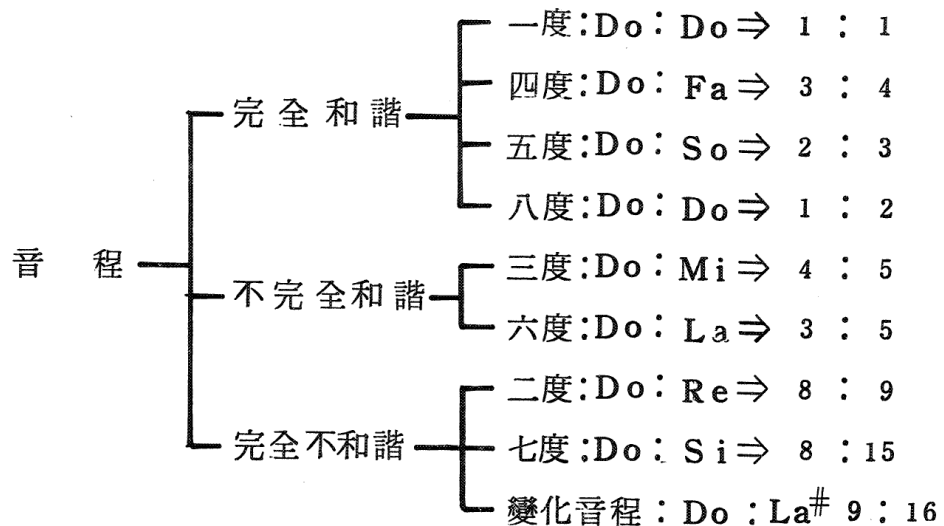
(4)我們利用上表對音樂上的音程作個分析，可發現很多規律。音程即音符在樂譜上的距離，其單位爲「度」，例如：Do 與 Do 是一度，Do 與 Mi 是三度，Do 與 Do' 間是八度。音程分爲和諧與不和諧，和諧音程又有完全與不完全的分別，其種類如下：



註：變化音程即增減音程或含升降記號之音程。

我們以 Do 爲根音算出上述各種音程頻率如下：（詳見下頁）

由以下的數據可發現：音程的和諧與否和頻率比的繁雜程度有關；頻率比愈簡單的音程愈和諧，事實上，往後的研究就是要驗證這個特性的普遍性。



(5)我們再利用兩兩成對的頻率比進一步求三個音的頻率比，如此我們可以討論和弦了。同樣地，我們發現：公認的和弦其頻率比亦很簡單，如下表：

$$\begin{aligned} \text{Do} : \text{Fa} : \text{La} &\Rightarrow 3 : 4 : 5 \\ \text{Do} : \text{Mi} : \text{So} &\Rightarrow 4 : 5 : 6 \\ \text{La} : \text{Do}' : \text{Fa} &\Rightarrow 5 : 6 : 8 \\ \text{So} : \text{Si} : \text{Re}' &\Rightarrow 12 : 15 : 18 \quad (4 : 5 : 6) \\ \text{Fa} : \text{La} : \text{Do}' &\Rightarrow 4 : 5 : 6 \\ \text{Re} : \text{So} : \text{Si} &\Rightarrow 9 : 12 : 15 \quad (3 : 4 : 5) \\ \text{So} : \text{Do}' : \text{Mi} &\Rightarrow 3 : 4 : 5 \end{aligned}$$

接著我們以排列組合方法逐一求出三個音的所有組合，並將頻率比用電腦計算出後由簡而繁印表列出。

2. 波形：

我們以電腦程式做和弦合成波的模擬，為了能明顯表現其特性，我們以最簡單的正弦波來做模擬，從波形上我們看出：

- (1)和諧的和弦其合成波拍音週期小，也就是重複一次之時間很短。
- (2)和諧的和弦其合成波振幅能大致維持一定而不會有忽大忽小的嗡嗡聲。

3. 程式：

針對探討頻率與波形的需要，我們設計了一個程式來作為輔助工具。

(一)實際調查方面：

- 1.我們把所有的頻率比找出後，選取五十個具有代表性的和弦做為測試的題目，並設計問卷。（參看附圖）

您可曾受過任何音樂訓練（例如學過鋼琴、小提琴、吉他，或參加合唱團）..... 是 否

| | | | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

附圖：問卷

- 2.問卷上有些題目是爲了能挑選出有效的樣本，因爲有受過音樂訓練的人，音感通常較普通人好，而這樣受測人所做的問卷，其可信度也就比一般人來得高。
- 3.在50題中我們隨意安插了七個公認的和諧和弦作爲鑑定標準，因爲如果受測人的感覺能代表一般的感覺，那他在回答這七題時，一定會選擇好聽，利用這七題的答對數，我們把不合格的過濾掉。

六、結果

(一)理論研究：

由合成波之波形圖及其頻率比得出下列結果：

和諧的和弦有以下三個特性：

- 1.頻率比簡單。
- 2.合成波之拍音週期小。
- 3.合成波的振幅變化小。

(二)實際調查：

- 1.把問卷加以統計分析，得出「合格標準」如下：

所有受測人 512 人 { 有受過音樂訓練的人：108 人 7 題中平均答對數：6.3333 題
沒受過音樂訓練的人：304 人 7 題中平均答對數：4.2063 題
⇒合格標準：6 題 合格人數：284 人

2. 依有無受過音樂訓練及合格與否分類，我們得出四種不同可信度資料：

- (1) 所有受測人的統計資料 (412)
- (2) 有受過音樂訓練的人的統計資料 (108)
- (3) 所有合格的人的統計資料 (284)
- (4) 受過音樂訓練且合格的人的統計資料 (88)

3. 一般人所能接受的和弦，據統計結果分析得知，其頻率之簡單程度整數比的整數部份約在 40 至 50 之間。

七、結論

(一) 綜合分析：

由理論研究加上問卷調查的驗證，證實：

1. 和弦的頻率比簡單且其各項相差小。
2. 其合成波的拍音週期短且振幅變化小。

就是好聽的和弦。至於以上條件，要到什麼程度才算好聽？—這要視作曲家而定，古典與現代，前衛當然不同。

(二) 展望：

1. 從巴哈十二平均律開始，近代的音樂幾乎完全侷限在那幾個和弦，我們進行本研究主要是希望發掘更多的和弦，使作曲更自由，進而替音樂史立下一個里程碑。
2. 我們做本研究或許對於音樂界並沒有立竿見影的影響，但我們研究的目的是為了給音樂界一個發展的方向，做本研究並不是想一舉成功（事實上也不太可能），而是要定下一個研究模式，將來若是有人能照著我們的方向繼續前進的話一定能給音樂一個漂亮的革新！
3. 如今電子樂器盛行，我們的研究可以提供給製造商作為新開發的參考，使電子樂器一日千里。
4. 我們設計問卷調查，可進一步對不同文化、地區、民族、國家作調查，不但可以明白其音樂的差異，同時可以提供給音樂製作單位或作曲家作為參考，以使其作品更廣為流行。
5. 我們設計的電腦程式，可以提供給音樂製作單位或作曲家作為輔助工具，以利其創作。

6.現代作曲已有趨向全音階、微分法，無論音樂等以自由頻率爲主的新潮流，但是國內仍以傳統方法爲主，希望我們的研究能夠爲國內音樂界注入新生命。

7.我們的研究雖然看來簡單，但是過程中充滿了腦力激盪，讓我們嘗到研究的酸甜苦辣，同時更學到了許多科學的方法，這些都是課本所學不到的，當然，音樂上的收穫更不在話下。

八、參考資料

- | | | |
|------------|---------------------|-----------------|
| (一)心理學 | Erne R. Higard etc. | 桂冠圖書股份有限公司 |
| (二)魅力民謠吉他 | 施夢濤 | 長亭文化事業股份有限公司出版部 |
| (三)實用和聲學入門 | 李查·史多博士 | |
| (四)基礎樂理 | 張錦鴻 | 大陸書局 |
| (五)樂器的和聲學 | 安藤由典 | 幼獅出版社 |
| (六)吉他和聲學 | 游 民 | 文化圖書公司 |

評語

從音符頻率之相對比值著手，以聽覺測試方式進行和諧和弦之探討，歸納出「好聽」和弦應具備的條件。除了印證七個公認的和諧和弦符合應具備條件之外，更找出一些其他的和諧和弦，可供設計和弦之參考。研究過程及實驗方法，很能表現科學求證的精神，作者的創造力與思考方式，很值得稱許。